Math

线性代数与概率统计

主编 / 伍超林
主审 / 龚友运

特点

1. 教材内容实行“案例驱动”，从实际经济管理问题出发，引出并讲清概念；
2. 叙述简明、通俗易懂、由浅入深、循序渐进，遵循“数学为体，经济为用”的原则；
3. 例题、练习、习题的选取体现经济管理类不同专业的经济数学应用的特点；
4. 每章末的习题分为A、B两组，A组为基本题，B组为提高题，并附本章知识要点。

中国人民大学出版社

Math

线性代数与概率统计

主编／伍超林
主审／龚友运

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率统计/伍超林主编．—北京：中国人民大学出版社，2014.2
ISBN 978-7-300-18604-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①伍…　Ⅲ.①线性代数-高等职业教育-教材②概率论-高等职业教育-教材③数理统计-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 316509 号

线性代数与概率统计

主编　伍超林

主审　龚友运

Xianxing Daishu Yu Gailü Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 2 月第 1 版
印　　张	17.75	**印　　次**	2014 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	409 000	**定　　价**	38.00 元

前言

经济学的许多研究方法都依赖于数学思维（如经济指标分析、金融市场风险评估、效益的合理分配、生产成本控制等），许多重要的结论也来源于数学的推导。同时，数学在经济学中的应用也日益广泛（如统计、税收、金融证券、利息、保险、贸易和生产等）。大多数的经济理论都是建立在数学理论和方法之上的，经济学只有运用好数学，才能达到真正完善的地步。因此，在经济学与数学相互交叉的跨学科领域中，数学知识的应用越来越普遍。

经济数学通常包含微积分、线性代数、概率论与数理统计、程序设计、西方经济学、数学模型、计量经济学、金融经济学、金融投资数量分析、风险管理、经济预测与决策、信息系统分析与设计、大系统分析等多门课程。

根据教育部颁布的经济管理类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲的要求，以及经济类、管理类本科生的培养规定、后续课程和工作实践的需要，结合独立本科院校教学改革的要求，由华南师范大学增城学院有较丰富教学经验的老师编写的这套大学本科经济应用数学系列教材，第一批推出的有《微积分》、《线性代数与概率统计》两本。

我们所编写的这套教材，吸取了众多同类教材的一些优点，并且具有以下的特点：

(1) 本教材适合于大学独立本科院校经济类各专业的学生使用。

(2) 在编写过程中，力求做到以培养“厚基础、宽口径、重应用、强技能、高素质”的高级应用型人才为目标。教材内容实行“案例驱动”，即从实际经济管理问题出发，引出概念，并讲清概念，同时注意将建立经济问题的数学模型的思想渗透到教材中。

(3) 叙述简明、通俗易懂、由浅入深、循序渐进，遵循“数学为体，经济为用”的原则。

(4) 例题、练习和习题的选取体现经济管理类不同专业的经济数学应用的特点，并且适当选取了经济数学模型实例。

(5) 每章末的习题分为 A、B 两组：A 组为基本题，B 组为提高题，并附本章知识要点。

(6) 每章编写阅读材料，简介数学简史或名人轶事，强调知识背景介绍。

本书介绍了线性代数及概率统计的基本知识及其在经济分析中的应用。全书共五章，内容包括：行列式与矩阵代数、线性规划初步、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步。带“*”的内容供选学，每章末附有本章知识要点、习题及阅读材料，书末附有常用分布表及参考文献。

本套教材获华南师范大学增城学院校内立项资助，由华南师范大学增城学院长期担任教学第一线的教师徐春平担任《微积分》的主编、伍超林担任《线性代数与概率统计》的主编，龚友运担任主审，潘丽华、欧润庆等参加了编写工作。

在编写过程中，我们参考了一些同类教材，并选用了其中某些例题、习题，在此一并表示感谢。由于作者水平有限，加之时间比较仓促，对于书中存在的不足之处，欢迎读者提出宝贵的意见。

目　录

第1篇　线性代数及其应用

第2篇 概率与统计初步

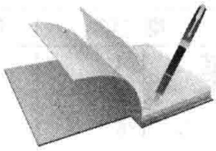
第1篇

线性代数及其应用

线性代数是高等代数的主体，它可以使线性方程组的研究得到简化，其理论的发展促进了行列式理论和矩阵论的创立与发展，行列式和矩阵代数是线性代数的主要内容之一．最初的线性方程组问题大多来源于生活实践，大量的实际问题刺激了线性代数这一学科的诞生与发展．

线性代数在经济科学、管理科学等领域有着广泛的应用，如矩阵是经济研究和经济工作中处理线性经济模型的重要工具．著名的投入产出分析就是以线性代数理论为基础的，是线性代数卓有成效的应用．应用投入产出方法可以进行经济预测、研究某项经济政策的实施将对社会经济产生什么影响以及用于一些专门的社会问题研究（如环境污染问题、人口问题、世界经济结构问题等）．线性代数知识也是线性规划问题研究的必备基础．

本篇介绍线性代数及线性规划的基本知识及其应用．



第一章　行列式与矩阵代数

在科学技术、生产生活中，经常会遇到解线性方程组的问题．当方程以及变量的个数较少的时候，可以运用初等数学中介绍的方法求解．但是，如果由实际问题列出的方程及变量的个数较多的时候，就需要研究使用新的数学工具——行列式和矩阵．

案例 1.1　成本问题

若一次投料生产，能获得产品及副产品共四种，每种产品的成本未单独核算．现在投料四次，得到四批产品的总成本如表 1—1 所示，试问每种产品的单位成本分别是多少？

表 1—1

产品（千克）／批次	A	B	C	D	总成本（元）
第一批产品	40	20	20	10	580
第二批产品	100	50	40	20	1 410
第三批产品	20	8	8	4	272
第四批产品	80	36	32	12	1 100

案例 1.2　折旧率问题

企事业单位中，可供长期使用的劳动资料和消费资料，如房屋、机器设备等叫做固定资产．固定资产在使用过程中，逐渐损耗而转移到成本中的一部分价值叫做折旧．某企业有四台机器，其使用年限及折旧率如表 1—2 所示：

表 1—2

机器价值（元）	使用年限	折旧率			
		第一年	第二年	第三年	第四年
A：60 000	4	1/4	1/4	1/4	1/4
B：30 000	3	1/2	1/3	1/6	0
C：40 000	3	1/2	1/3	1/6	0
D：25 000	2	1/2	1/2	0	0

如何编制一张折旧明细表？

案例 1.3 现有资源的充分利用问题

某工厂计划生产 A，B，C 三种产品，每件产品所需资源及现有资源如表 1—3 所示（单位：吨）：

表 1—3

产品 / 资源名称	A	B	C	现有资源
钢 材	1	2	0	210
燃 料	2	1	3	390
电 力	1	2	2	350

为了充分利用现有资源，A，B，C 三种产品的产量各为多少？

案例 1.4 成本总额与销售总额问题

设有甲、乙、丙三种产品，其中两年的产量如表 1—4（单位：件）所示：

表 1—4

产 品 / 年 份	甲	乙	丙
第一年	200	300	400
第二年	600	700	800

产品的成本和单价如表 1—5 所示（单位：万元）：

表 1—5

产 品 / 金 额	甲	乙	丙
成 本	2	3	5
单 价	3	4	6

三种产品两年的成本总额与销售总额分别是多少？

解决以上问题，需要运用行列式或矩阵代数的有关知识．

第一节　二阶及三阶行列式

行列式起源于解线性方程组．首先看下述引例．

【引例 1.1.1】　二元线性方程组求解公式问题

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 x_1，x_2 为未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}及 b_1，b_2 为常数．

可以运用初等数学中的消元法解此线性方程组．由 $a_{22}\times$（1）式$-a_{12}\times$（2）式，得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

$a_{11}\times$（2）式$-a_{21}\times$（1）式，得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

经检验可知，式（1.1.2）中的 x_1，x_2满足方程组（1.1.1），因此，式（1.1.2）提供了方程组（1.1.1）的解的一般公式．但是，它难于记忆，应用时也不方便，因而有必要引进一个新的符号来表示它，这样就产生了行列式．

一、二阶行列式

在方程组（1.1.1）的解的表达式（1.1.2）中，分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并且只含有未知量的系数．把未知量的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形，即

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

可以看出，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是这样两项的和：一项是正方形中实线表示的对角线（左上角到右下角的对角线称为**主对角线**）上两元素的积，再添上正号；另一项是虚线表示的对角线（由右上角到左下角的对角线叫做**次对角线**）上两元素的积，再添上负号．在这四个数的两旁各加一条竖线，于是有下列定义．

定义 1.1.1

规定符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

就是表示

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.4}$$

式（1.1.3）叫做二阶行列式，式（1.1.4）叫做二阶行列式的展开式，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做行列式（1.1.3）的元素．这四个元素排成两行两列（横排叫行，竖排叫列），如，a_{21} 是位于第 2 行第 1 列上的元素．

利用对角线把二阶行列式（1.1.3）展开成式（1.1.4），这种方法叫做二阶行列式展开的对角线法则．

方程组（1.1.1）的解的表达式（1.1.2）中的两个分子也可分别写成二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，这样当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，线性方程组（1.1.1）的解可以写成

$$\begin{cases} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

为简便起见，通常用 D，D_1，D_2 分别表示式（1.1.5）中作为分母和分子的行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组（1.1.1）中未知量 x_1，x_2 的系数组成的，叫做这个方程组的**系数行列式**．D 中第 1 列元素 a_{11}，a_{21}（即 x_1 的系数）分别换成方程组（1.1.1）的常数项 b_1，b_2，就得到行列式 D_1；D 中第 2 列的元素 a_{12}，a_{22}（即 x_2 的系数）分别换成常数项 b_1，b_2，就得到行列式 D_2．

综上所述，引例 1.1.1 中"二元线性方程组求解公式"的问题，利用行列式这一工具可以得到圆满的解决：

线性方程组（1.1.1）的求解的公式是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (\text{当 } D \neq 0 \text{ 时}) \tag{1.1.5'}$$

其中 D_1，D_2 是把系数行列式 D 中第 1 列和第 2 列分别换成方程组（1.1.1）的常数项列而得到的两个二阶行列式．

例 1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$．

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times3-2\times4=-5$；

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha-(-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

例 2 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=18 \\ x_1-3x_2=-7 \end{cases}.$$

解 计算系数行列式，有

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-13\neq0,$$

又由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 18 & 4 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}=-26,\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=-39,$$

故方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-26}{-13}=2 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-39}{-13}=3 \end{cases}.$$

接下来考虑三元线性方程组求解公式问题.

二、三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (3) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

其中 x_1，x_2，x_3 为未知量，a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33} 及 b_1，b_2，b_3 为常数.

仿照引例 1.1.1，运用消元法解此线性方程组，可以得到它的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_2=\dfrac{b_1a_{31}a_{23}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{21}a_{13}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_3=\dfrac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{32}a_{11}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \end{cases}. \tag{1.1.7}$$

式 (1.1.7) 中的分母是相同的，都是由方程组 (1.1.6) 中各变量的系数构成的。可看做都是先由方程组 (1.1.6) 的未知量系数按照它们在方程组中原来的位置排列成三行三列的正方形，即

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

再把主对角线上三个元素相乘，主对角线的平行线上两个元素与对角元素相乘，一共有三个乘积，都取正号；然后把次对角线上三个元素相乘，次对角线的平行线上两个元素与对角元素相乘，又有三个乘积，且都取负号，最后再取此六项的代数和所得到（见图1—1）.

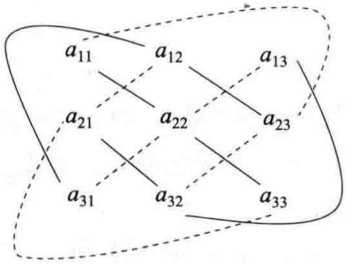


图 1—1

在这 3^2 个数组成的正方形两旁各加上一条竖线，于是有下列定义.

定义 1.1.2

规定符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.8}$$

就是表示

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.1.9}$$

式（1.1.8）叫做三阶行列式，式（1.1.9）叫做三阶行列式的展开式，把式（1.1.8）展开成式（1.1.9）的方法叫做三阶行列式展开的对角线法则.

方程组（1.1.6）的解的表达式（1.1.7）中的三个分子可以分别写成三个三阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则方程组（1.1.6）的解可简写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \quad (\text{当 } D\neq 0 \text{ 时}) \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1.1.10}$$

该结果与二元一次方程组的结果是类似的.

方程组（1.1.6）的解也可以由如下方法得到：

为消去未知量 x_2，x_3，分别用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ 乘以方程组（1.1.6）式的（1）、（2）、（3）式，然后将三个式子相加，可得

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\right)x_1$$
$$=b_1\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},$$

类似地，可以得到另外两个关于 x_2，x_3 的式子.

利用定义 1.1.1 及定义 1.1.2，其中 x_1 的系数

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

这与定义 1.1.2 完全一致，进一步可以得到式（1.1.10）. 同时可以看出，三阶行列式的计算能转化为二阶行列式的计算. 利用这一结论，可以给出三阶行列式的降阶法定义.

定义 1.1.2′

称

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}}\\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}}\end{vmatrix}$$

为三阶行列式，其值为三个二阶行列式的和：

$$\boldsymbol{a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}.$$

这里行列式的降阶法定义是依三阶行列式的第一列展开的，事实上，它还可以依其他行（或列）展开.

例 3 计算下列行列式：

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$，　(2) $D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

解 (1) $D_1=1\times1\times2+0\times0\times(-2)+(-1)\times2\times1$
$-1\times1\times(-2)-0\times2\times2-0\times1\times(-1)=2$；

(2) $D_2=1\times4\times4+2\times0\times(-3)+(-5)\times1\times0-(-3)\times4\times(-5)-2\times0$
$\times4-1\times0\times1$
$=-44.$

例 4 解三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=1.\\ x_1-x_2-2x_3=3\end{cases}$$