应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型

（上册）

主　编　彭年斌　张秋燕

副主编　张诗静　武伟伟

科学出版社

应用技术型大学数学课程系列教材

微积分与数学模型(上册)

主　编　彭年斌　张秋燕
副主编　张诗静　武伟伟

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是由电子科技大学成都学院数学建模与工程教育研究项目组的教师，依据教育部颁发的“关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求”，以培养应用型科技人才为目标而编写的. 与本书配套的系列教材还有《微积分与数学模型》(下册)、《线性代数与数学模型》、《概率统计与数学模型》.

本书共5章，主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及其应用、不定积分、定积分等一元函数微积分学的基本内容，同时还介绍了极限模型、导数模型、优化与微分模型、定积分模型. 每节后面配备有适当的习题，每章配备有复习题，最后附有参考解答与提示. 本书注重应用，在介绍微积分基本内容的基础上，融入很多模型及应用实例.

本书可作为普通高校、独立学院及成人教育、自考等各类本科微积分课程的教材或相关研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型. 上册/彭年斌，张秋燕主编. —北京：科学出版社，2014. 8

应用技术型大学数学课程系列教材

ISBN 978-7-03-041730-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①彭… ②张… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172 ②O141. 4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第192941号

责任编辑：昌 盛 周金权/责任校对：桂伟利

责任印制：肖 兴/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2014年8月第一次印刷 印张：16 3/4

字数：337 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈印科〉)

前　言

为了培养应用型科技人才，我们在大学数学的教学中以工程教育为背景，坚持将数学建模、数学实验的思想与方法融入数学主干课程教学，收到了好的效果. 通过教学实践我们认为将原来的高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程分别改设为微积分与数学模型、线性代数与数学模型、概率统计与数学模型课程，对转变师生的教育理念，引领学生热爱数学学习、重视数学应用很有帮助，对理工类应用型本科学生工程数学素养的培养很有必要.

"将数学建模思想全面融入理工类数学系列教材的研究"是电子科技大学成都学院"以 CDIO 工程教育为导向的人才培养体系建设"项目中的课题，也是四川省 2013～2016 年高等教育人才培养质量和教改建设项目.

本套系列教材主要以应用型科技人才培养为导向，以理工类专业需要为宗旨，在系统阐述微积分、线性代数、概率统计课程的基本概念、基本定理、基本方法的同时融入了很多经典的数学模型，重点强调数学思想与数学方法的学习，强调怎样将数学应用于工程实际.

本书主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学等内容以及极限模型、导数模型、优化与微分模型、定积分模型.

本书的编写具有如下特点：

(1) 在保证基础知识体系完整的前提下，力求通俗易懂，删除了繁杂的理论性证明过程；教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律；在对内容深度的把握上，考虑应用型科技人才的培养目标和学生的接受能力，做到深浅适中、难易适度.

(2) 在重要概念和公式的引入上尽量根据数学发展的脉络还原最质朴的案例，教材中引入的很多案例都是数学建模活动中或讨论课上学生最感兴趣的问题，其内容丰富、生动有趣，视野开阔、宏微兼具. 这对于提高学生分析问题和解决问题的能力都很有帮助.

(3) 按节配备了难度适中的习题，按章配备了复习题，并附有答案或提示.

全书讲授与模型讨论需要 80 学时. 根据不同层次的需要，课时和内容可酌情取舍.

本书由彭年斌、张秋燕主编，第 1 章由张秋燕编写，第 2 章由武伟伟编写，第 3 章由彭年斌编写，第 4 章和第 5 章由张诗静编写. 全书由彭年斌负责统稿.

在本书的编写过程中，我们参阅了大量的教材与文献资料，在此向这些作者表

示感谢.

由于编者水平有限,书中难免有缺点和不妥之处,恳请同行专家和读者批评指正.

电子科技大学成都学院
数学建模与工程教育研究项目组
2014 年 5 月于成都

目　录

绪　论

微积分是研究函数的微分、积分，以及相关概念和应用的数学基础学科. 它是17世纪由英国的牛顿(Newton，1643～1727)和德国的莱布尼茨(Leibniz，1646～1716)在前人成果的基础上分别而又几乎是同时创立起来的. 17世纪的欧洲，正处于工业革命时期，航海、造船业的兴起，运河、渠道的修建，以及各种机械的制造，都促使人们寻求研究物体(包括天体)的运动变化，呼唤人们去探求研究曲线、图形的一般数学方法，并将这些方法应用到实践中去. 牛顿-莱布尼茨创立的微积分虽然一开始并不严格，但却直观生动，并且无论是对数学还是对其他科学乃至于技术的发展都产生了巨大的影响.

系统地将微积分建立在极限理论基础之上的，是19世纪上半叶的法国数学家柯西(Cauchy，1789～1857)，而现在人们之所以能够运用集合论来处理微积分的问题，应归功于19世纪下半叶的数学家康托尔(Cantor，1845～1918). 微积分的发展经过了漫长的三百多年.

数学模型是用数学语言抽象出的某个现实对象的数量规律. 构造数学模型的过程主要有三个步骤. 第一步，构造模型：从实际问题中分析、简化、抽象出数学问题；第二步，数学解答：对所提出的数学问题求解；第三步，模型检验：将所求得的答案返回到实际问题中去，检验其合理性并进一步总结出数学规律.

微积分的产生和发展与人类的实际需要密切相关. 而借助于微积分，在解决各类问题的同时也建立了很多数学模型.

微积分的产生与下面两个典型模型直接相关.

模型1　阿基米德(Archimedes，约公元前287年～约公元前212年)问题.

如图0.1所示，由曲线 $y=x^2$ 与 x 轴，直线 $x=1$ 可以围成一个平面图形 D，求平面图形 D 的面积 S.

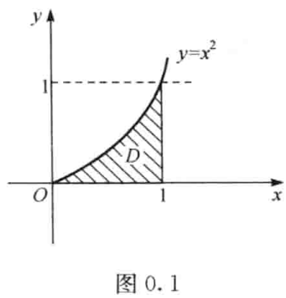

图0.1

求平面图形的面积，并不是一个新话题. 我们熟知三角形、长方形、平行四边形、梯形、圆等平面图形的面积计算公式，也研究过一些其他规则图形的面积，在研究中大多都是将其分割成已知图形面积的和或差. 然而，本题中平面图形的面积却不能如法炮制.

实际上，这个问题早在公元前就被古希腊数学家阿基米德解决了. 如图0.2(a)～(d)所示，我们发现每个图中小矩形面积的和是随小矩形个数的变化而变化

的,而且随小矩形面积个数的增多,小矩形面积的和越来越接近于要求的平面图形的面积. 阿基米德的解题思想正是基于此,即将区间[0,1]平均分成 n 等份. 若把 n 个小矩形面积的和记为 S_n,则当 n 充分大时,S_n 趋近于 S.

后来的数学家们将此过程细化为四个步骤:分割、近似、求和、取极限,这正是积分的思想. 该书第 4 章有详细叙述.

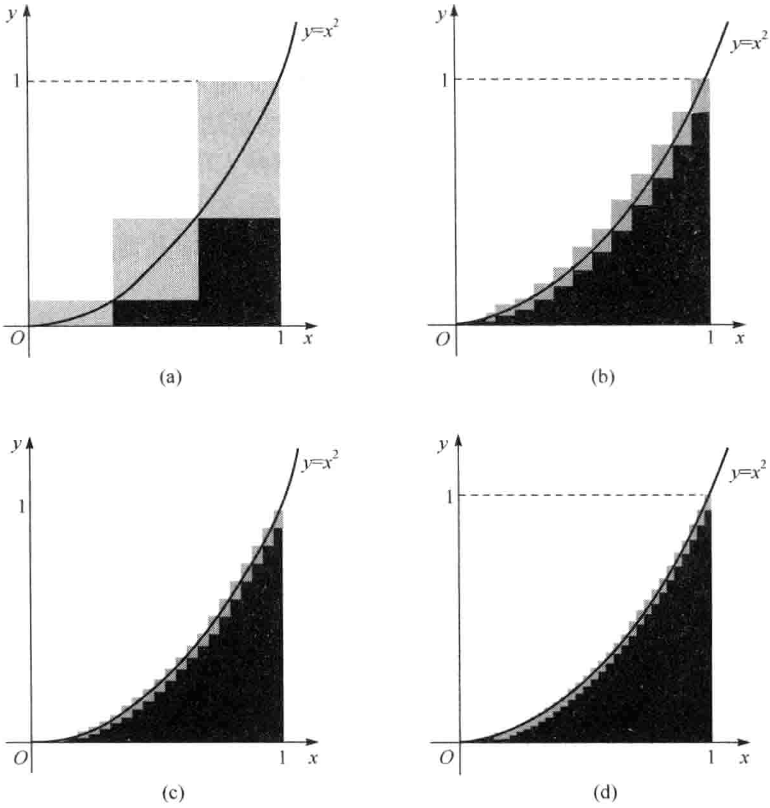

图 0.2

模型 2　变速直线运动的瞬时速度问题.

某质点做变速直线运动,已知 t_0 时刻的位移为 $s(t_0)$,t 时刻的位移为 $s(t)$. 求 t_0 时刻的瞬时速度 v_{t_0}.

本题的难点在于“变”. 其实,这个问题早在 17 世纪就已由英国的物理学家牛顿解决了,即先求平均速度 $\bar{v}=\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$,则当 t 趋近于 t_0 时,平均速度 $\bar{v}$ 就趋近于 v_{t_0}. 后来的数学家就将瞬时速度定义为平均速度的极限,即

$$v_{t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

而这个特殊的极限后来就抽象为导数的定义. 这属于微分学的内容,将在该书第 2 章中详述.

微积分与数学模型一书主要包括函数、极限与连续;一元函数微积分学及其模型应用实例;多元函数微积分学及其模型应用实例;常微分方程与无穷级数等,其中重点介绍了极限模型、优化与微分模型、定积分模型、数量值函数积分模型、向量值函数积分模型、微分方程中的模型与经济数学模型. 函数是微积分研究的基本对象,极限是微积分的基本工具,微分和积分方法是基本技能,众多的结合工程实际的数学模型应用是基本训练.

从数学发展的历史可以看出,微积分的产生,是由常量数学向变量数学转变的一件具有划时代意义的大事,它是学习数学和掌握任何一门自然科学与工程技术的基础,读者要充分认识到学习微积分与数学模型的重要性,要注重研究和掌握微积分与数学模型学习的特点,认真理解基本概念,熟悉基本定理,掌握基本技能,应用基本模型,以期使自己的思想方法从不变到变、从有限到无限、从有形到无形、从特殊到一般、从直观到抽象,产生一个质的飞跃.

微积分生动有趣但又深邃严谨,贴近生活但又复杂多变,希望读者在学习时勤于思考、善于发现,在掌握基本的数学方法的同时,不断提高工程应用能力.

第 1 章　函数、极限与连续

函数是数学中的一个基本概念，它反映了客观世界中变量变化之间的相依关系，是微积分的主要研究对象. 极限是研究微积分的重要工具. 本章介绍函数的概念及特性，极限的概念、性质与运算，函数的连续性. 它是学习微积分的基础，也是数学应用中建立数学模型的基础.

1.1　函数的基本概念

1.1.1　准备知识

1. 集合

集合是某些指定对象组成的总体. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合. 构成集合的成员称为**元素**，一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 并且，若 a 是集合 A 的元素，则可记作 $a\in A$，读作"a 属于 A". 不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 本书所涉及的集合主要是数集. 一般地，自然数集合用 $\mathbf{N}$ 表示；正整数集合用 $\mathbf{N}^*$ 表示；整数集合用 $\mathbf{Z}$ 表示；有理数集合用 $\mathbf{Q}$ 表示；实数集合用 $\mathbf{R}$ 表示.

2. 区间

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$. 类似地，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开区间**. 以上这些区间的长度是有限的，统称为**有限区间**. 否则，称为**无限区间**，如 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$.

另外，还有一类特殊的区间在本书的数学表述中经常遇到，就是邻域. 开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

在以后的数学表述中，有两个常用的逻辑量词符号"$\forall$"和"$\exists$". "$\forall$"表示"任意". "$\exists$"表示"存在".

1.1.2　函数定义

一切物质皆在变化，从古至今，由生到死，亘古不变. 因此，生活中充满了许多变化的量，而这些量的变化往往不是独立的，它们是遵循一定规律相互关联的. 例如，一天中的气温是随时间而变化的，居民每日用电量是随当日气温而变化的，而

居民每月的用电费用是随当月用电量变化的……为更好地把握变量变化之间的客观规律，我们可以用图形、表格或数学表达式来表示它们之间的数量关系. 下面来看几个具体实例.

例 1.1.1　专家发现，学生的注意力随老师讲课时间的变化而变化. 讲课开始时，学生的兴趣激增；中间有一段时间，学生的兴趣保持较理想的状态；随后，学生的注意力开始分散. 设 $f(t)$ 表示学生注意力，t 表示时间. $f(t)$ 越大，表明学生注意力越集中. 经实验分析得知

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+24t+100, & 0<t\leqslant 10,\\ 240, & 10<t\leqslant 20,\\ -7t+380, & 20<t\leqslant 40.\end{cases}$$

此例中的学生注意力 $f(t)$ 就是时间 t 的函数，而且还是分段定义的. 函数 $f(t)$ 的图像如图 1.1所示.

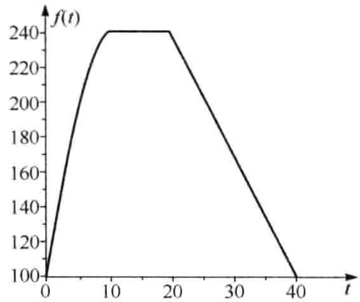

图 1.1

例 1.1.2　据统计，20 世纪 60 年代世界人口数据见表 1.1(单位：亿)，根据表中数据，可用关系式 $N(t)=e^{0.0186t-33.0383}$ 进行数据拟合得到世界人口随时间的变化规律.

表 1.1　世界人口数据

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	29.72	30.61	31.51	32.13	32.34	32.85	33.56	34.20	34.83

例 1.1.3　某小行星运行过程中位置的 10 个观测点数据见表 1.2，据此，也可模拟出此小行星的运行轨道方程为 $\dfrac{(x-0.2852)^2}{0.8549^2}+\dfrac{(y-0.6678)^2}{0.5462^2}=1$.

表 1.2　小行星轨道坐标数据

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

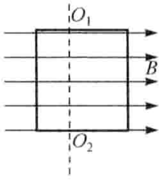

图 1.2

例 1.1.4　如图 1.2 所示，在匀强磁场中匀速转动的矩形线圈的周期为 T，转轴 O_1O_2 垂直于磁场方向，线圈电阻为 2Ω. 从线圈平面与磁场方向平行时开始计时，线圈转过60°时的感应电流为 1A. 于是我们可以计算出任意时刻线圈中的感应电动势与时间的关系式为$e=4\cos\dfrac{2\pi}{T}t$.