

“十二五”国家重点图书出版规划项目

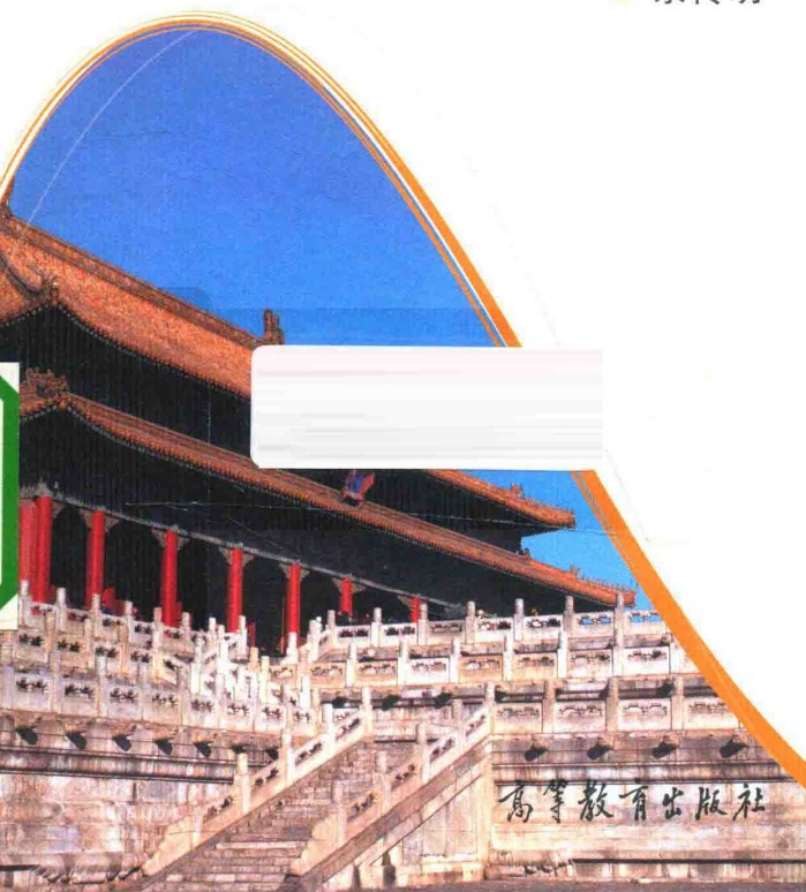
24

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

堆球的故事

◎ 宗传明



高等教育出版社

弘扬数学文化 感受数学魅力

本丛书精选对人类文明发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，深入浅出地介绍数学文化的丰富内涵、数学发展史中的一些重要篇章以及一些著名数学家的历史功绩和优秀品质等内容，适于包括中学生在内的读者阅读。

内容简介

这本小册子以尽量通俗的方式介绍堆球理论四百多年来的主要成就。它着重突出一些主要人物、有趣故事、奇妙方法和优美结论。

ISBN 978-7-04-031852-4



定价 9.00 元

“十二五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

堆球的故事

Duiqiu de Gushi

宗传明



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

堆球的故事 / 宗传明编. -- 北京: 高等教育出版社, 2014. 3
(数学文化小丛书 / 李大潜主编. 第3辑)
ISBN 978-7-04-031852-4

I. ①堆… II. ①宗… III. ①几何学—普及读物
IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 018228 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	杨帆	封面设计	张楠
版式设计	王艳红	插图绘制	尹文军	责任校对	殷然
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开本	787mm×1092mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
印张	3	版次	2014年3月第1版
字数	51千字	印次	2014年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	9.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 31852-00

数学文化小丛书编委会

顾 问：项武义（美国加州大学伯克利分校）

姜伯驹（北京大学）

齐民友（武汉大学）

王梓坤（北京师范大学）

主 编：李大潜（复旦大学）

副主编：王培甫（河北师范大学）

周明儒（江苏师范大学）

李文林（中国科学院数学与系统科学
研究院）

编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）

王彦英（河北师范大学）

张惠英（石家庄市教育科
学研究所）

杨桂华（河北经贸大学）

周春莲（复旦大学）

本书责任编辑：杨桂华

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学,而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用,是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学,不等于拼命做习题、背公式,而是要着重领会数学的思想方法和精神实质,了解数学在人类文明发展中所起的关键作用,自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样,才能从根本上体现素质教育的要求,并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多,更远未引起各方面足够的重视,很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下,本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益,本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对

世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月



2000年11月8日晚我接到陈省身先生从南开大学打来的电话，请我去天津聊一聊堆球的事。我第二天中午赶到南开，就住在先生的宁园寓所。那是我第一次见到陈先生，也是我第一次去南开。在两天的逗留期间，我们一直都在讨论开普勒猜想，西方哪些数学家曾研究过这一问题以及堆球专家们对项武义的工作有些什么看法和评价等。十多年过去了，先生的一句话始终记在我的脑海里：“如果武义的证明能得到西方的承认，那么华人数学的地位会提高。”

——谨以这本小书纪念陈省身先生

目 录

引言	1
1. 雷利爵士的问题与开普勒的猜想	3
2. 牛顿与格里高利的一次讨论	10
3. 高斯的意外贡献	15
4. 贪婪的国王与聪明的银器匠	22
5. 闵可夫斯基的直觉与天才	25
6. 希尔伯特问题	30
7. 牛顿是对的	33
8. 塔默斯问题和德尔萨特引理	38
9. 利奇格与康韦群	42
10. 奇妙的构造	48
11. 香肠猜想	53
12. 布利克费尔特, 费耶什·托特和罗杰斯	57
13. 项武义... 黑尔斯	68
14. 神奇的二十四维球	72
结束语	76
基本文献	78

引 言

1594 年, 为了尽可能多地携带炮弹到美洲征服殖民地, 英国探险家雷利爵士提出了堆球问题: 如何摆放球形炮弹可使船队的弹药仓装的炮弹最多? 1611 年, 基于哈里奥的构造和计算, 开普勒猜测: 堆球的最大密度是 $\pi/\sqrt{18}$. 1694 年, 牛顿和格里高利提出了如下问题: 一个球能否跟 13 个等半径的球同时相切? 这是历史悠久、非常著名的两个数学问题.

四百多年以来, 这两个问题及其在高维空间的推广吸引了许多科学家的兴趣. 它导致了一些美妙的发现, 成就了一些数学家的辉煌事业; 也耗尽了许多人的才华, 留下了许多让人感叹不已的故事.

数学是由数学家创造的. 同时, 数学又造就了许多天才. 优美的数学结论背后常有一些非凡的人物, 更有许多戏剧性的故事. 这本小册子将以尽量通俗的方式介绍堆球理论四百多年来的主要进展. 它着重突出一些主要人物、有趣故事、奇妙方法和优美结论.

1. 雷利爵士的问题 与开普勒的猜想

1594 年的一天, 英国著名探险家雷利爵士 (Sir Walter Raleigh, 1552—1618) 听说了南美洲有金矿的消息. 他决定再次出海发一笔横财. 为了这次探险, 他需要准备足够的食物、淡水、火药、枪弹和炮弹. 那时候, 炮弹都是同样半径的圆铁球. 为此, 他命令哈里奥 (Thomas Harriot, 1560—1621) 找出在有限空间中尽量多地堆放炮弹的方法, 并计算一下船队的炮弹仓能堆放多少发炮弹.



图 1 Sir Walter Raleigh
(1552—1618)



图 2 Thomas Harriot
(1560—1621)

雷利爵士曾参与最早的美洲殖民计划：在北卡罗来纳和弗吉尼亚建立殖民地。1587 年，英国在罗阿诺克岛建立了一个一百多人的殖民村。由于弹药不足，补给中断，三年后全军覆没。所以，雷利爵士这次特别重视利用船队有限的炮弹仓尽量多地携带炮弹。

哈里奥是雷利爵士的助手，负责探险队的地理、天文、气象等方面的咨询工作，自然深知任务的重要性。他很快就给出了答案，而且还给出了堆放炮弹的一个高效方案：如图 3，先排放一层炮弹。在这一层的上面叠放完全相同的一层，并且使得第二层的球心尽可能的低。依次增加层数，可以得到一个尽量高效的堆积。当然，在这一过程中需要注意边界（炮弹仓的墙）造成的误差。

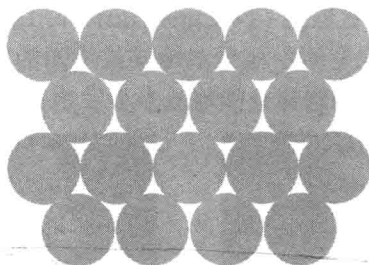


图 3

容易看出，这样构造的堆积内部的每一个球都恰好跟 12 个球相切（如图 4 所示）。假设每个炮弹是一个单位球，过这 12 个切点作单位球的切平面，我们得到一个包含位于中间的单位球的十二

面体. 根据阿基米德的体积公式, 单位球的体积是 $4\pi/3$. 将该十二面体分成十二个锥体, 容易得到它的体积是 $4\sqrt{2}$. 由排放的规律性, 可以得到这一堆积的密度大致为单位球与十二面体的体积之比, 即 $\pi/\sqrt{18}$. 当然, 这并不是最简便的计算. 用 P 表示棱长全为 2, 且在某一顶点的三个角全为 $\pi/3$ 的一个平行六面体. 这一堆积的密度亦即单位球与 P 的体积之比, 且该平行六面体的体积也是 $4\sqrt{2}$.

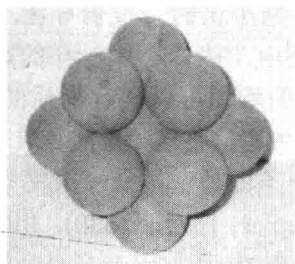


图 4

雷利爵士的这次探险抵达了南美洲的圭亚那和委内瑞拉, 确实使他发了财. 回到英国后, 尽管此前他曾因为跟女王伊丽莎白一世的侍女秘密结婚而失宠并被关押到伦敦塔 (英国关押贵族的著名监狱), 但他很快又得到了女王的宠爱并飞黄腾达. 然而, 好景不长. 女王于 1603 年驾崩, 雷利爵士因为卷入反对新国王詹姆斯一世的一场阴谋再次被捕投入伦敦塔. 他 1616 年获释, 再次赴委内瑞拉探险. 这次他的探险队洗劫了一个西班牙殖民地哨所. 他于 1618 年返回伦敦. 为了向西班牙示好, 雷利爵士被逮捕并于 10 月 29 日被送上了断头台.

哈里奥毕业于牛津大学，是一位杰出的数学家、天文学家和航海家。他曾研究过三次方程的求解，写过一本 *Artis Analyticae Praxis* 《实用分析术》。这是最早的数学著作之一，沿用至今的数学符号 $>$ 和 $<$ 就是由他引入的。他是最早用望远镜观测月球和太阳的人之一，并发现了太阳黑子。他的这些天文观测甚至比伽利略的还早。他的画像至今仍陈列在牛津大学三一学院的走廊中。

哈里奥是原子论的一位倡导者。该学说认为一切物质都是由一些像小球一样的原子构成。所以，研究小球的堆积可以理解物质的结构和性质。1601 年前后，他写信将这一想法和堆球问题告诉了在布拉格任神圣罗马帝国皇家天文学家的开普勒 (Johannes Kepler, 1571—1630)。那时开普勒正在创立他的天体理论，所以没有多少时间和兴趣研究微观世界。

1611 年，开普勒出版了一本小册子 *The Six-Cornered Snow Flake* 《论六角形的雪花》。在这本著作中他不仅试图解释雪花为什么是六角形，还探讨了蜂房的结构、石榴的籽为什么是十二面体等。这是最早用几何的理念来探讨自然的著作之一。开普勒认为，雪花之所以是六角形原因在于：一个圆盘最多能跟六个相同的圆盘同时相切，正六边形可以平铺整个平面。特别地，在这本著作中他还考虑了堆球问题并提出了如下猜想：



图 5

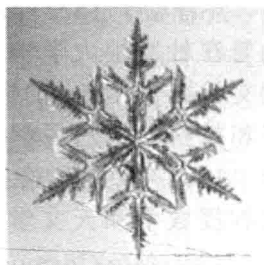


图 6

在一个容器中堆放同样的小球，所能得到的最大密度是 $\pi/\sqrt{18}$ 。

这就是著名的开普勒猜想。如前面所说，哈里奥所构造的堆积恰好达到这一密度。问题是如何证明这就是最大值。这是数学历史上最古老、最著名的问题之一。

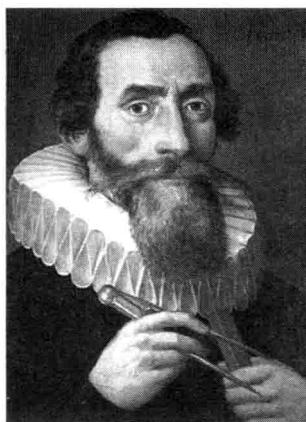


图 7 Johannes Kepler (1571—1630)

开普勒于 1571 年生于德国的斯图加特附近。他曾在杜宾根大学学习神学、数学和天文。受天文学家 Mästliu 的影响，他深信当时还饱受迫害和排挤的哥白尼学说：地球自转且绕太阳公转。1594 年，他到格拉茨（奥地利）的一所神学院教授数学和天文学。第二年，他写了一篇论文 *Mysterium Cosmographicum* 《神秘的宇宙》。这篇文章给天文学家布拉赫（Tycho Brahe, 1546—1601）留下了深刻印象。那时，他是神圣罗马帝国皇帝鲁道夫二世的皇家天文学家。1600 年，布拉赫邀请开普勒到布拉格做他的助手。1601 年，布拉赫去世，开普勒接替了他的职位。

1609 年开普勒的 *Astronomia Nova* 《新天文学》出版。在这部著作中他提出了行星运动的两个定律。第一定律：行星运行的轨道为椭圆，太阳恰好为该椭圆的一个焦点。第二定律：行星与太阳连线在等长的时间内扫过的面积相同。这两个定律将哥白尼学说建立在科学的基础之上，正式宣布古希腊天文学的结束。1619 年，开普勒又出版了 *Harmonices Mundi* 《宇宙的和谐》。在这部著作中他提出了行星运动的第三定律：行星绕行太阳一周所需要的时间 T 和椭圆轨道的半长轴 R 满足如下关系： T^2/R^3 是一个常数。这三个定律将太阳系用数学统一起来，为牛顿的万有引力学说奠定了基础。《新天文学》和《宇宙的和谐》是人类文明历史上非常重要的两部著作。

开普勒不仅是一位伟大的天文学家，也是一位