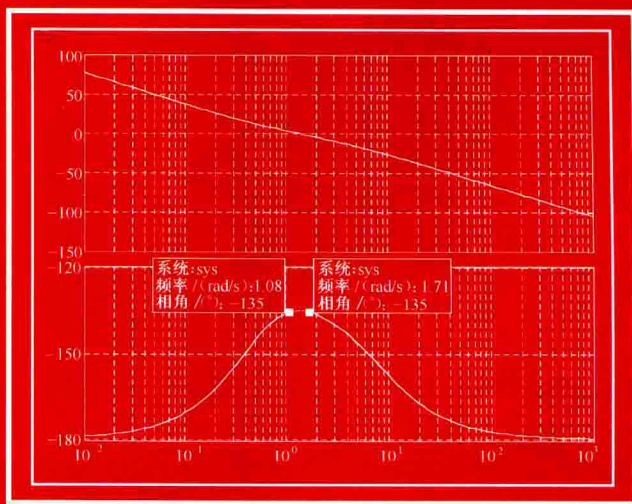


# 分数阶控制系统设计

王春阳 李明秋 姜淑华 王宇 著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

# 分数阶控制系统设计

王春阳 李明秋 姜淑华 王宇 著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

近年来,分数阶控制系统的设计及应用开始成为控制领域中一个新的研究热点,本书论述了分数阶控制器的设计、参数整定方法及工程应用。第1章介绍了分数阶微积分理论的基础知识;第2章至第4章介绍了整数阶被控对象分数阶控制器的设计及仿真;第5章介绍了分数阶被控对象分数阶控制器的设计;第6章介绍了分数阶控制器自整定方法;第7章介绍了分数阶控制器的应用实例;第8章介绍了在 LabVIEW 半实物仿真平台上实现分数阶控制器的参数整定方法。

本书适用于从事控制理论及相关领域研究的科研工作者。

### 图书在版编目(CIP)数据

分数阶控制系统设计/王春阳等著. —北京:国防  
工业出版社,2014. 8  
ISBN 978-7-118-09657-6

I. ①分… II. ①王… III. ①分数—控制系统设计  
IV. ①O121. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182639 号

※

国防工业出版社出版发行  
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)  
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司  
新华书店经售

\*

开本 710×960 1/16 印张 10 $\frac{1}{4}$  字数 200 千字  
2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 46.80 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

# 前 言

进入 21 世纪以来,随着分数阶微积分理论研究不断取得突破,分数阶微积分控制理论研究开始成为控制领域中一个新的研究热点。研究发现,基于分数阶微积分方程描述的实际系统或非线性系统,物理意义更清晰,物理特性更精确;而基于分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器参数整定方法,因多了两个整定参数(积分阶次  $\lambda$  和微分阶次  $\mu$ ),从而使系统控制更灵活,控制效果更好。然而,由于分数阶控制理论尚处于理论研究阶段,分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器参数整定方法主要还是采用整数阶 PID 控制器参数整定方法,分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器设计与实现方法比较复杂,对计算能力要求高,因此,分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器的理论和应用研究有待进一步深入和完善。

本书首先面向整数阶被控对象及分数阶被控对象,开展分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器设计、实现与仿真研究。内容包括面向一阶被控对象、二阶被控对象、三阶被控对象、时滞被控对象及倒立摆不稳定对象等,开展整数阶 PID(IOPID)、分数阶  $PD^\mu$ (FOPD、FO[PD])、分数阶  $PI^\lambda$ (FOPI 和 FO[PI])和分数阶  $PI^\lambda D^\mu$ (FOPID)等控制器设计、实现与仿真研究,分析系统动态响应特性,并论述了针对整数阶被控对象的基于向量法的参数整定方法。

其次论述了分数阶微积分算子  $s^{\pm\alpha}$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ) 的解析数值近似法、直接离散化近似法和间接离散化近似法。重点研究了近似效果较好的 Al-Alaoui+CFE 直接离散化方法以及 Oustaloup 和改进 Oustaloup 间接离散化方法,并利用这些方法实现了分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器数值离散化处理。

最后论述了基于 LabVIEW 的半实物实验平台实现分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器参数整定的方法。通过将数据采集板、控制软件、外设接口、放大器和物理设备进行合理配置,搭建了实验仿真平台,并在该平台上进行了基于 IOPID、FOPD、FO[PD] 等控制器的系统动态特性仿真实验研究,进一步验证了采用分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器参数整定方法不仅可以改善系统动态响应特性,而且可以获得优于传统 PID 控制器参数整定方法的系统鲁棒性及抗干扰性。这推动了分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器在实时控制系统中的应用。

本书重点突出、条理清晰、通俗易懂,便于知识点的理解与进一步研究,具有较高的学术价值。为便于学术交流,本书中的函数均采用英文表达方式。

本书第1章至第4章由王春阳编写,第5章及第6章由李明秋编写,第7章由姜淑华编写,第8章由王宇编写。在此,也向本实验室对本书提供帮助的蔡年春等同学表示感谢。

由于作者水平有限,书中的缺点和错误在所难免,欢迎各位读者批评指教。

# 目 录

第 1 章 分数阶微积分理论与分数阶系统 .....	1
1.1 分数阶微积分的发展 .....	1
1.1.1 分数阶微积分的历史 .....	1
1.1.2 分数阶微积分在控制领域的应用 .....	1
1.2 基本函数 .....	2
1.3 分数阶微积分定义及性质 .....	4
1.3.1 分数阶微积分定义 .....	4
1.3.2 分数阶微积分性质 .....	6
1.4 分数阶控制系统 .....	7
1.4.1 分数阶控制系统描述 .....	7
1.4.2 分数阶控制器参数校正方法研究现状 .....	8
1.4.3 分数阶系统求解方法研究现状 .....	10
1.4.4 分数阶微积分特点及存在的问题 .....	10
第 2 章 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器设计 .....	11
2.1 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器描述 .....	11
2.1.1 概述 .....	11
2.1.2 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器描述 .....	11
2.1.3 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器分类 .....	12
2.2 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器设计 .....	14
2.2.1 PID 控制器参数变化对系统性能的影响 .....	14
2.2.2 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器参数整定方法 .....	16
2.3 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器实现 .....	19
2.3.1 解析法 .....	19
2.3.2 直接离散化方法 .....	20
2.3.3 间接离散化方法 .....	23

2.4	分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制系统设计举例 .....	30
<b>第3章</b>	<b>整数阶被控对象分数阶 <math>PI^{\lambda}D^{\mu}</math> 鲁棒控制 .....</b>	<b>32</b>
3.1	一阶被控对象分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制 .....	32
3.1.1	一阶被控对象与控制器模型 .....	32
3.1.2	整数阶 PID 控制器的设计 .....	33
3.1.3	分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器设计 .....	34
3.1.4	数值仿真与结果分析 .....	42
3.2	二阶被控对象分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制 .....	45
3.2.1	二阶被控对象与控制器模型 .....	46
3.2.2	分数阶 $PD^{\mu}$ 控制器设计 .....	47
3.2.3	数值仿真与结果分析 .....	52
3.3	三阶被控对象分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制 .....	57
3.3.1	三阶被控对象与控制器模型 .....	58
3.3.2	分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器设计 .....	58
3.3.3	数值仿真与结果分析 .....	62
3.4	时滞被控对象分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制 .....	64
3.4.1	时滞被控对象模型 .....	64
3.4.2	时滞被控对象分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制器设计 .....	65
3.4.3	数值仿真和结果分析 .....	72
<b>第4章</b>	<b>基于向量法的分数阶控制器的设计 .....</b>	<b>78</b>
4.1	引言 .....	78
4.2	基于向量法的 FOPI 及 FO[PI] 控制器的设计 .....	78
4.2.1	控制器的向量模型的建立 .....	78
4.2.2	基于向量法的参数整定步骤 .....	79
4.2.3	控制器的向量表示 .....	80
4.2.4	IOPID 控制器参数整定 .....	82
4.2.5	FOPI 控制器参数整定 .....	83
4.2.6	FO[PI] 控制器参数整定 .....	84
4.2.7	基于向量方法的控制器参数求解唯一性 .....	86
4.2.8	仿真结果 .....	87

<b>第 5 章</b>	<b>分数阶被控对象分数阶 <math>PI^\lambda D^\mu</math> 鲁棒控制</b>	92
5.1	分数阶被控对象与分数阶控制器	92
5.1.1	分数阶被控对象数学模型	92
5.1.2	控制器模型	92
5.2	分数阶被控对象分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 鲁棒控制器设计	94
5.2.1	整数阶 PID (IOPID) 控制器设计	94
5.2.2	分数阶 $PI^\lambda$ (FOPI) 控制器的设计	95
5.2.3	分数阶 $PI^\lambda$ (FO[PI]) 控制器设计	96
5.2.4	分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ (FOPID) 控制器设计	98
5.3	数值仿真和结果分析	100
5.3.1	FOPI 控制系统仿真	101
5.3.2	FO[PI] 控制系统仿真	101
5.3.3	FOPID 控制系统仿真	102
5.3.4	基于不同控制器的分数阶系统特性对比分析	103
<b>第 6 章</b>	<b>分数阶 <math>PI^\lambda D^\mu</math> 控制器自整定方法</b>	104
6.1	分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器自整定原理	104
6.2	基于继电反馈的自整定分数阶 $PI^\lambda$ 控制器的设计	105
6.2.1	自整定分数阶 $PI^\lambda$ (FOPI、FO[PI]) 控制器设计规则	105
6.2.2	自整定分数阶 $PI^\lambda$ (FOPI) 控制器设计	106
6.2.3	自整定分数阶 $PI^\lambda$ (FO[PI]) 控制器设计	109
6.2.4	自整定控制器参数求解	111
6.3	数值仿真与结果分析	111
6.3.1	高阶被控对象 FOPI 和 FO[PI] 控制系统仿真	111
6.3.2	带积分环节被控对象的 FOPI 和 FO[PI] 控制系统仿真	115
6.3.3	延迟被控对象的 FOPI 和 FO[PI] 系统仿真	117
<b>第 7 章</b>	<b>分数阶控制系统设计应用举例</b>	121
7.1	无人机飞行控制系统分数阶控制器的设计	121
7.1.1	无人机飞行控制系统概述	121
7.1.2	无人机飞行控制系统数学模型	122
7.1.3	纵向飞行姿态控制回路控制器设计	123
7.1.4	横侧向飞行姿态控制回路控制器设计	129



7.2	倒立摆系统分数阶控制器的设计 .....	134
7.2.1	倒立摆系统的建模 .....	134
7.2.2	倒立摆系统控制器的设计与仿真 .....	135
<b>第8章</b>	<b>基于 LabVIEW 软件的分数阶控制系统实验 .....</b>	<b>140</b>
8.1	基于 LabVIEW 的分数阶控制系统半实物仿真平台 .....	140
8.2	基于 LabVIEW 的分数阶控制系统特性实验 .....	141
8.2.1	基于 IOPID 控制器的控制系统实验 .....	141
8.2.2	基于 FOPD 控制器的控制系统实验 .....	142
8.2.3	基于 FO[PD]控制器的控制系统实验 .....	143
8.2.4	动态特性分析 .....	145
<b>参考文献</b>	<b>.....</b>	<b>147</b>

# 第 1 章 分数阶微积分理论与分数阶系统

## 1.1 分数阶微积分的发展

### 1.1.1 分数阶微积分的历史

分数阶微积分是一个古老而又新鲜的概念。分数阶微积分主要研究任意阶次的微分、积分算子的特性及其应用。早在整数阶微积分创立的初期,就有一些数学家开始考虑它的含义,如数学家 L'Hospital 和 Leibniz 等。然而,由于缺乏应用背景和计算困难等多方面原因,分数阶微积分理论及应用研究一直没有得到太多的关注。随着自然科学和社会科学的发展以及复杂工程应用需求的增加,尤其是 20 世纪 80 年代以来对各种复杂系统的深入研究,使得分数阶微积分理论及其应用开始受到广泛关注。同时,随着计算机技术的不断发展,分数阶微积分理论为许多学科的研究和发展提供了理论基础与数学工具,特别是分数阶微积分建模方法和理论在高能物理、反常扩散、复杂黏弹性材料力学本构关系、系统控制、流变学、地球物理、生物医学工程、经济学等诸多领域有了许多非常成功的应用,凸显了其自身独特的优势和不可替代性,其理论及应用研究在国际上已经成为一个热点。

### 1.1.2 分数阶微积分在控制领域的应用

与整数阶微积分相比,分数阶微分和积分过程更柔性、更细腻,于是一些学者开始考虑能否采用分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器代替整数阶 PID 控制器来改善系统动态特性。但由于分数阶微积分环节的离散化数字实现一直是分数阶微积分研究领域的难点,它在很大程度上限制了分数阶微积分理论在实际工程中的应用。直到最近 20 年,随着计算机技术的飞速发展,分数阶微积分开始应用于冶金、化工、机械等工业过程。同时,分数阶控制也成为自动控制领域的一个新的分支。

20 世纪末,分数阶微积分在控制系统的应用取得了一些令人瞩目的成果。Oustaloup 以控制动态系统的思想,开发了 CRONE 控制器,而且证明了 CRONE 控制器与传统 PID 控制器相比具有很大优势。Matignon 等人针对分数阶系统的稳定性、可控性和可观性进行了研究。Podlubny 在研究分数阶控制系统基础上提出了分数阶

PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> 控制器,它为分数阶控制理论的发展做出了巨大贡献,他提出的分数阶 PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> 控制器是分数阶控制系统的里程碑。目前,Podlubny 仍然活跃在分数阶控制研究的最前沿。由于分数阶微积分方程对被控对象的描述更为精确,分数阶 PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> 控制器在一定范围内对本身和被控对象的参数变化不敏感,在稳定性和动态性能方面,分数阶 PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> 控制器参数整定方法具有整数阶 PID 控制器参数整定方法不可比拟的优势,加之分数阶 PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> 控制器参数整定方法在无人机(UAV)等实际控制系统中的成功应用,大大加快了分数阶控制理论的发展,因此,加强分数阶微积分理论在系统控制领域中的研究与探索有着深远的理论意义和实际应用价值。

## 1.2 基本函数

分数阶微积分的定义和运算会用到 Gamma、Bata、Mittag - Leffler、Agarwal、Erdelyi、Robotnov - Hartley 等基本函数,这些基本函数是分数阶微分方程的基础。由于这些基本函数都是超越函数,对其研究比级数函数、指数函数复杂得多,所以对分数阶微分方程的求解也就比整数阶微分方程求解要复杂得多。这里主要介绍以下三种基本函数。

### 1. Gamma 函数

分数阶微积分中最为常用的基本函数之一是欧拉的 Gamma 函数( Γ(z) ),它是用 n! 的形式表示的, n 可取实数或复数。

Gamma 函数的极限形式的表达式为

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \tag{1.1}$$

式中: Re(z) > 0,它在复平面右半平面收敛。

Gamma 函数的积分形式的表示式为

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.2}$$

式中: Re(z) > 0。

Gamma 函数具有如下性质:

$$\begin{cases} \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(0) = \pm\infty \\ \Gamma(z) = (z-1)!, z \in \mathbf{N} \end{cases} \tag{1.3}$$

Gamma 函数的另一个重要性质是在 z = -n (n = 0, 1, 2, ...) 处为单极点,可以表示为

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.4)$$

式中:积分  $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  是一个广义积分。

## 2. Bata 函数

Bata 函数是 Gamma 函数的特殊组合形式,在大多数情况下,用 Bata 函数比用 Gamma 函数表示更方便。Bata 函数可以表示为

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{(\omega-1)} d\tau, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0 \quad (1.5)$$

用 Laplace 变换建立 Bata 函数和 Gamma 函数之间的关系,即

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)} \quad (1.6)$$

而且

$$B(z, \omega) = B(\omega, z) \quad (1.7)$$

根据 Bata 函数, Gamma 函数可建立两个重要关系式。

第一个关系式为

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.8)$$

如果取  $z = 1/2$ , 得 Gamma 函数的一个特殊值,即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.9)$$

第二个关系式为

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z), 2z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (1.10)$$

如果取  $z = n + \frac{1}{2}$ , 得

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n} \Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n} (2n)!}{n!} \quad (1.11)$$

## 3. Mittag-Leffler 函数

指数函数  $e^z$  在整数阶微分方程中起着非常重要的作用, Mittag-Leffler 函数作为一种特殊的指数函数,在分数阶微分方程中的作用同等重要,指数函数  $e^z$  可以看做是 Mittag-Leffler 函数的特殊情况。Mittag-Leffler 函数因含参数个数的不同具有单参数、双参数等形式。

单参数 Mittag-Leffler 函数表达式为

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \alpha > 0 \quad (1.12)$$

双参数 Mittag-Leffler 函数表达式为

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1.13)$$

当  $\alpha = 1$  时, 式(1.12)可以表示为

$$E_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z \quad (1.14)$$

Mittag-Leffler 函数的广义形式为

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + j) z^j}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha j + \beta) \Gamma(j + 1)} \quad (1.15)$$

式中:  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ 。

对式(1.13)求  $k$  阶导数, 得

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \beta)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

为了叙述方便, 引入新的函数:

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y t^{\alpha}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

这个函数的 Laplace 变换为

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^{\alpha} \mp y)^{k+1}}, \operatorname{Re}(s) > |y|^{1/\alpha} \quad (1.18)$$

对函数  $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$  求导为

$${}_0 D_t^{\lambda} \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta - \lambda), \lambda < \beta \quad (1.19)$$

## 1.3 分数阶微积分定义及性质

### 1.3.1 分数阶微积分定义

数学家们从各自不同的角度给出了分数阶微积分定义, 其定义的合理性和科学性已经在实践中得到了检验。

一般分数阶微积分表达式为

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} f(t), \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \\ f(t), \operatorname{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t f(\tau) (d\tau)^{-\alpha}, \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

式中:  ${}_{\alpha}D_t^{\alpha}$  为微分或积分操作算子,  $\alpha$  和  $t$  为微积分上下限,  $\alpha$  可以是实数或复数。

不同数学家给出的分数阶微积分定义形式有所不同, 在控制领域中应用较多的三种分数阶微积分定义为 Grünwald-Letnikov (GL) 定义、Riemann-Liouville (RL) 定义和 Caputo 定义。

### 1. Grünwald-Letnikov (GL) 定义

1868 年, A. V. Letnikov 将连续函数经典整数阶微分的阶次从整数推广到分数。已知函数  $f(t)$  可导, 利用 Hospital 法则, 得到  $f(t)$  的一阶至三阶导数为

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (1.21)$$

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2} \quad (1.22)$$

$$f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+3h) - 3f(t+2h) + 3f(t+h) - f(t)}{h^3} \quad (1.23)$$

利用数学归纳法得函数  $f(t)$  的  $n (n \in \mathbf{N})$  阶导数为

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.24)$$

引入 Gamma 函数, 假设函数  $f(t)$  在  $[\alpha, t]$  区间上存在  $n+1$  阶导数, 对于任意的实数  $\alpha$ , 函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶微积分定义为

$${}_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-\alpha}{h}]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.25)$$

式中:  $[\cdot]$  为近似递推项数;  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1)}{j!} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}$  为递推函数系数。

当  $\alpha > 0$  时, 表示对函数  $f(t)$  求  $\alpha$  阶导数; 当  $\alpha < 0$  时, 表示对函数  $f(t)$  求  $\alpha$  次积分。若满足  $f^{(k)}(\alpha) = 0 (k = 0, 1, \dots, j-1)$ , 则  ${}_{\alpha}D_t^p f(t), {}_{\alpha}D_t^q f(t)$  有性质

$${}_{\alpha}D_t^q ({}_{\alpha}D_t^p f(t)) = {}_{\alpha}D_t^p ({}_{\alpha}D_t^q f(t)) = {}_{\alpha}D_t^{p+q} f(t) \quad (1.26)$$

### 2. Riemann-Liouville (RL) 定义

RL 定义是在 GL 定义基础上通过简化计算过程得到的。对于任意的实数  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}$ , RL 分数阶微分定义为

$${}_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_{\alpha}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.27)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数。

RL 分数阶积分定义为

$${}_{\alpha}I_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\alpha}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, t > 0, \alpha \in \mathbf{R}^+ \quad (1.28)$$

将分数阶微分和积分的 RL 定义统一到一个表达式中,则有分数阶微积分 RL 定义为

$${}_{\alpha}D_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{\alpha}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.29)$$

式中:  $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbf{N}$ 。

Riemann-Liouville 定义在数学上的要求比较苛刻,不仅需要函数是连续的,还需要满足  $f(t)$  可积。尽管在工程实际应用中可以保证系统函数的连续性和  $f(t)$  可积的条件,但是,由于 Riemann-Liouville 定义还需要解决一个理论上可实现、实际上缺乏物理意义的初始值问题,因而它在应用上受到了一定限制。

### 3. Caputo 定义

Caputo 分数阶微分定义为

$${}_{\alpha}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{\alpha}^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}} d\tau \quad (1.30)$$

式中:  $\alpha = m + \gamma, m$  取整数,  $0 < \gamma \leq 1$ 。

Caputo 分数阶积分定义为

$${}_{\alpha}D_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_{\alpha}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\gamma}} d\tau \quad (1.31)$$

Caputo 分数阶微积分统一定义为

$${}_{\alpha}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\alpha}^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (1.32)$$

式中:  $m-1 < \alpha \leq m$ 。

由式(1.32)可知, Caputo 定义要求函数前  $m$  阶导数可积。

进一步发现,在  $t>0$  时,如果考虑一类函数  $f(t)$ ,它具有  $m+1$  阶连续的导数,那么,Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义与 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义是完全相等的。Caputo 定义和 Riemann-Liouville 定义的区别主要在于对常数求导的定义上,前者对常数的求导是有界的,而后者对常数的求导是无界的。Caputo 定义则更适合于对分数阶微积分初值问题的求解。

## 1.3.2 分数阶微积分性质

根据分数阶微积分定义,可以得到分数阶微积分有如下性质:

(1) 分数阶微积分的记忆性质。由分数阶微分的定义式,函数  $f(t)$  在某一点上的分数阶微分与整数阶微分是不相同,分数阶微分并不是在这一点处求极限,而

是跟初始时刻到该点以前的所有时刻的函数值相关,则分数阶微积分具有记忆性。

(2) 分数阶微积分的线性性质,即

$${}_0D_t^\alpha [af(t) + bg(t)] = a_0D_t^\alpha f(t) + b_0D_t^\alpha g(t) \quad (1.33)$$

(3) 分数阶微积分的叠加性质,即

$${}_0D_t^\alpha [{}_0D_t^\beta f(t)] = {}_0D_t^\beta [{}_0D_t^\alpha f(t)] = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (1.34)$$

(4) 解析函数  $f(t)$  的分数阶导数  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  对  $t$  和  $\alpha$  都是解析的。

(5) 当  $\alpha = n, n$  为整数时,分数阶微分  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  与整数阶  $n$  阶微分结果相同。

(6) 当  $\alpha = 0$  时,  ${}_0D_t^\alpha f(t) = f(t)$ 。

## 1.4 分数阶控制系统

### 1.4.1 分数阶控制系统描述

分数阶系统是建立在分数阶微积分以及分数阶微分方程理论上的模型系统。分数阶控制系统是指能够用分数阶微分或分数阶积分描述系统物理机理及特性的控制系统。分数阶微积分在控制系统的应用主要包含两方面内容:一是采用分数阶微积分理论对被控对象进行更为准确的建模;二是采用分数阶控制器对实际的被控对象进行控制。下面给出分数阶系统时域和频域描述形式。

#### 1. 微分方程描述

如同整数阶控制系统,分数阶控制系统可用分数阶微分方程描述为

$$b_m D_t^{\beta_m} y(t) + \dots + b_1 D_t^{\beta_1} y(t) + b_0 D_t^{\beta_0} y(t) = a_n D_t^{\alpha_n} u(t) + \dots + a_1 D_t^{\alpha_1} u(t) + a_0 D_t^{\alpha_0} u(t) \quad (1.35)$$

式中:  $D_t^{\alpha_n} = {}_0D_t^{\alpha_n}$  是 Caputo 定义的具有  $\alpha_n$  阶次的关于变量  $t$  的分数阶微分算子;  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $\beta_j (j = 0, 1, \dots, m)$  是任意实数,且  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0 > 0, \beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0 > 0$ 。

#### 2. 传递函数描述

而同元次分数阶 LTI 系统的传递函数形式为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m\lambda} + b_{m-1} s^{(m-1)\lambda} + \dots + b_0}{a_n s^{n\lambda} + a_{n-1} s^{(n-1)\lambda} + \dots + a_0} \quad (1.36)$$

#### 3. 状态空间描述

状态空间方程只能描述同元次分数阶 LTI 系统,与整数阶系统类同,为后者的扩展形式。其表达形式为



$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

式中:  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  为分数阶状态向量;  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$  分别为输入向量和输出向量;  $\mathbf{A}$  (状态矩阵)  $\in \mathbf{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{B}$  (输入矩阵)  $\in \mathbf{R}^{n \times l}$ ;  $\mathbf{C}$  (输出矩阵)  $\in \mathbf{R}^{p \times n}$ ;  $\mathbf{D}$  (直接传输矩阵)  $\in \mathbf{R}^{p \times l}$ 。

对于同元次分数阶 LTI 系统,其状态方程和传递函数式的关系为

$$G(s) = \mathbf{C}(s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.38)$$

正如整数阶系统一样,我们同样能够给出可控性及可观测性的标准表达式,然后分析分数阶 LTI 系统的能控性与能观性。对于分数阶状态空间描述式(1.37)有如下定理。

定理:如果函数  $u(t)$  在时段  $t \in (0, T)$  内绝对可积,那么分数阶状态方程描述式(1.37)在时段  $t \in (0, T)$  内有唯一解,即

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(t) &= E_{\alpha,1}(\mathbf{A}t^\alpha)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mathbf{A}(t-\tau)^\alpha)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.39)$$

#### 1.4.2 分数阶控制器参数校正方法研究现状

分数阶微积分理论在控制系统中的应用主要分为分数阶系统建模和分数阶控制器设计。分数阶系统建模的方法主要采用系统辨识方法,但辨识过程比较复杂,因此,在分数阶控制系统中,研究最为广泛的还是分数阶控制器的设计以及分数阶控制器数值实现。从分数阶控制理论的角度,控制系统大致分为四种类型:整数阶控制器与整数阶被控对象,整数阶控制器与分数阶被控对象,分数阶控制器与整数阶被控对象,分数阶控制器与分数阶被控对象。目前,分数阶控制器主要有 TID 控制器、CRONE(非整数阶鲁棒控制器)控制器、分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器和超前滞后补偿器等四种类型。从理论上讲,分数阶控制器可以控制任意阶被控对象,而 Podhibny 研究发现,采用分数阶控制器控制分数阶被控对象可以获得更优的动态性能和鲁棒性。此外,文献[14,16,17]详细介绍、分析和比较了四种控制器的概念、原理、设计方法及性能特点。其中,CRONE 控制器是由 A. Oustaloup 于 1993 年提出的,其法语意思是“分数阶鲁棒控制器”,由于它采用了 Bode 图、Nichols 图等设计方法,具有清晰的物理意义,因此在工业控制领域得到了广泛的应用。TID 控制器在结构上是传统 PID 控制器的比例环节用分数阶环节  $s^{-1/n}$  代替,使系统传递函数接近理论最优,它不仅继承了传统 PID 控制器优点,而且更好地给出了动态响应性能和扰动抑制能力。分数阶超前滞后补偿器采用经典超前滞后校正思路,建立分数阶控制器模型,虽然采用分数阶超前滞后补偿器同样可以获得优良的控制特性,但是,它的设计过程、