GONGCHENGSHUXUE

21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

工程数学

——线性代数与概率统计

(第二版)

主　编　杨　宏

副主编　吕　陇　任秋艳　郭中凯　李亚红

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

工 程 数 学

——线性代数与概率统计

（第二版）

主　编　杨　宏
副主编　吕　陇　任秋艳
　　　　郭中凯　李亚红

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在高等教育大众化和办学层次多样化的新形势下，结合工科学生工程数学的教学基本要求，在独立学院多年教学经验的基础上编写而成.

全书系统地介绍了工程数学的基本理论，内容包括线性代数、概率论、数理统计等. 本书保持了对数学基础课程的较高要求，同时力争适应工科学生的应用性特点，在内容和结构的处理上尽量削枝强干、分散难点，力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂，并附有大量的例题和习题.

本书适合高等院校工科各专业本科学生使用，也可供教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 线性代数与概率统计/杨宏主编.
--2 版. --上海：同济大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5608-5258-4
Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨 Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材②线性代数—高等学校—教材③概率统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 184191 号

21 世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

工程数学——线性代数与概率统计(第二版)

主　编　杨　宏

副主编　吕　陇　任秋艳　郭中凯　李亚红

责任编辑　姚烨铭　　责任校对　徐春莲　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021－65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　启东市人民印刷有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　17.75

字　　数　443000

版　　次　2013 年 8 月第 2 版　2013 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5258-4

定　　价　36.00 元

前　言

工程数学是继高等数学之后大学数学课程中的又一门重要课程，一般包括线性代数和概率统计两大部分.线性代数中的矩阵、线性方程组在工程技术领域中有着广泛的应用，概率论与数理统计则是解决和处理工程领域中大量随机现象问题的有力工具. 经验表明，学生在学习这两部分内容并把它们应用于实际时，都往往感到困惑，无所适从.线性代数中，基本概念和重要结论多而抽象；概率统计不仅思维缜密，而且有异于确定性数学中所习惯的形式逻辑的思维方式.因此，把握教学改革的发展趋势，探索教学体系和教学内容的变迁轨迹，编写一本能适应办学层次多样化的形势下需求的工程数学教材是非常必要的.

工程数学作为高等院校理工科一门重要的基础理论课，对提高学生的素质，优化知识结构，培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决工程问题的能力，提高创新意识，并为后续课程的学习打下坚实的数学基础起着重要的作用。

我们结合在独立学院多年的教学实践，编写了这本《工程数学》教材.全书共15章，主要介绍线性代数、概率论和数理统计等基础知识.本书内容的选取紧扣大纲，力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂，适合高等院校工科各专业学生和教师使用.

本书由杨宏担任主编，设计编写框架并汇总统稿，第1、3、5、11、15章由杨宏编写，第9、12、14章由吕陇编写，第7、13章由任秋艳编写，第8、10章由郭中凯编写，第2、6章由李亚红编写.

本书在编写过程中得到了兰州理工大学技术工程学院的大力支持与帮助，兰州理工大学张民悦教授对本书提出了许多改进意见，谨在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中尚有不妥及错误之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2013年8月

目　录

第 1 章　行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法；用行列式的定义和有关定理计算较简单的 n 阶行列式的方法，以及用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　全排列与逆序数

由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级(元)**排列**. 所有的 n 级排列的总数为 $n!$.

在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 例如：

$$\tau(31254)=2+0+0+1+0=3;$$

$$\tau(263451)=1+4+1+1+1=8;$$

$$\tau(12345)=0+0+0+0+0=0.$$

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为奇数，则称该排列为奇排列；如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称该排列为偶排列；一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

例 1.1.3　求下列排列的逆序数：

(1) $23\cdots(n-1)n1$；　　(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots 2n$.

解　(1) $23\cdots(n-1)n1$ 的逆序为：$21,31,\cdots,(n-1)1,n1$，逆序数为 $n-1$；

(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 所含逆序为：

和 2 构成逆序的有 $3,5,7,\cdots,2n-1$，共 $n-1$ 个，

和 4 构成逆序的有 $5,7,9,\cdots,2n-1$，共 $n-2$ 个，

和 $2n-2$ 构成逆序的有 $2n-1$，共 1 个，

逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.1.2　二阶行列式、三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得式(1.1.1)的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

观察式(1.1.2)中的分子、分母都是由四个数相乘再相减而得.其中分母都是由方程组式(1.1.1)的四个系数确定,把这四个数按照它们在方程组式(1.1.1)中的位置排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表式(1.1.3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.1.4}$$

此时,方程组式(1.1.1)的唯一解可表示为 $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$, $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

由此可知,二阶行列式是由 2^2 个元素按一定的规律运算所得到的一个数,这个规律性在行列式的记号中称为“对角线法则”,如图 1.1.1 所示.

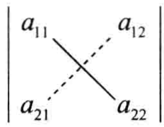

图 1.1.1

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

其对应的三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

称为三阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.1.5}$$

比较上述定义,发现二阶行列式含有两项,三阶行列式含有六项,每行均为不同行不同

列的三个元素的乘积再冠以相应的正、负号，**请读者结合全排列与逆序数的概念总结冠以相应的正、负号的规律**.

例 1.1.1　行列式$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$的充分条件是(　　).

(A) $k=0$　　(B) $k=1$　　(C) $k=2$　　(D) $k=3$

解

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k\cdot k\cdot 1+2\times 0\times 1+2\times(-1)\times 1-1\cdot k\cdot 1-$$

$$2\times 2\times 1-0\times(-1)\times k=k^2-k-6=(k+2)(k-3),$$

所以，使该行列式为零的充分条件是 $k=3$. 答案为 D.

例 1.1.2　解方程：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

解　$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3+3x-x^2-x=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)=0$，解得 $x_1=-1, x_2=3$.

为解决实际问题的需要，只研究三阶以下行列式远远不够，为研究更高阶的行列式，需要全排列和逆序数的概念.

1.1.3　*n* 阶行列式的定义

观察式(1.1.5)展开的三阶行列式的六项，行号固定为 1，2，3，列号为任意排列为 $j_1j_2j_3$，$j_1j_2j_3$ 所有可能排列相应的逆序数具体如下：

$$j_1\to j_2\to j_3\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)},$$

$$1\to 2\to 3\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(123)}=(-1)^0=1,$$

$$1\to 3\to 2\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(132)}=(-1)^1=-1,$$

$$2\to 1\to 3\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(213)}=(-1)^1=-1,$$

$$2\to 3\to 1\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(231)}=(-1)^2=1,$$

$$3\to 1\to 2\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(312)}=(-1)^2=1,$$

$$3\to 2\to 1\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}=(-1)^{\tau(321)}=(-1)^3=-1,$$

共计 $3!=6$ 种.

故

$$\text{式(1.1.5)}=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+$$

$$(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=\sum_{j_1j_2j_3}^{3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

仿此可以把行列式推广到更一般的情形.

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列组成的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.6}$$

称为 n **阶行列式**,记作 $\det(a_{ij})$. 其中,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$为行列式的**一般项**.

数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为行列式(1.1.6)的元素或元. 元 a_{ij} 的第一个下标称为行标,表示元素位于第 i 行,第二个下标称为列标,表示元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.1.6)的(i,j)元.

思考 n 阶行列式是否可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

例 1.1.5 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}=$________.

分析 行列式的完全展开式中,每一项都包含最后三行中位于不同列的元素,而后三行中只有第 4 列和第 5 列的元素不为 0,因此每一项都包含 0,从而这个行列式的值为 0.

例 1.1.7 计算对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0.

证明　对第一式若记 $\lambda_i=a_{ii}$，则依行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对第二式，若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

注　请读者自己计算下三角行列式（主对角线以上元素全为 0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

和上三角行列式（主对角线以下元素全为 0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2　行列式的性质

用行列式的定义计算行列式是非常复杂的.为了能够计算行列式，下面来研究行列式的性质.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1　行列式与其转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么，由行列式的定义知

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D. \end{aligned}$$

性质 1.2.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 1.2.3 若一个行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 1.2.4 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

第 i 行(或列)乘以数 k，记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

性质 1.2.5 若行列式有一行(列)的元素全为零，则行列式等于零.

性质 1.2.6 若行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 1.2.7 若行列式的某一行(列)各元素都是两数之和，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.8 将行列式某一行(列)所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

第 i 行(或列)乘以数 k 加到第 j 行(或列)上,记作 kr_i+r_j(或 kc_i+c_j).

以上性质请读者自己证明.

例 1.2.1 设 D 为 n 阶行列式,则 $D=0$ 的充分必要条件是(　　).

(A) D 中有两行(列)的对应元素成比例

(B) D 中有一行(列)的所有元素全为零

(C) D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零

分析 三个选项都是 $D=0$ 的充分条件,而 $D=0$ 只能推出 D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零,即(C).

答案 C.

例 1.2.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3+r_2]{r_4+3r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4.$

计算行列式时,常用行列式的性质,将其化为三角形行列式来计算. 例如,化一般行列式为上三角形行列式的步骤如下.

如果第一列第一个元素为 0,先将第一行(列)与其他行(列)交换,使第一列第一个元素 $a_{11}\neq 0$;然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使第一列除第一个元素 a_{11} 外其余元素全为 0;再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的 $n-1$ 阶行列式;依次作下去,直至使其成为上三角形行列式,这时,主对角线上元素的乘积就是行列式的值.

例 1.2.3 证明 $\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证 将左端行列式按照性质 1.2.7 分为 8 个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & a_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.2.4 设 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D = D_1 D_2$.

证 对 D_1 作运算 $kr_i + r_j$ 化为下三角行列式，设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $kc_i + c_j$ 化为下三角行列式，设为

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{k1} & \cdots & q_{kk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{kk};$$

相当于,对 D 的前 k 作运算 kr_i+r_j,对 D 的后 n 列作运算 kc_i+c_j,把 D 化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

所以　$D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

1.3　行列式按行(列)展开

一般情况下,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算简便,于是,本节考虑研究用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 先给出行列式元素的余子式和代数余子式的概念.

1.3.1　行列式元素的余子式和代数余子式

记 n 阶行列式为 $D=\det(a_{ij})$,把 $D=\det(a_{ij})$中(i,j)元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的$n-1$ 阶行列式称为(i,j)元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij} 为(i,j)元 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如,三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中 1 和 6 的余子式分别是

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix},$$

它们的代数余子式分别是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},\ A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

1.3.2　行列式按某一行(列)展开定理

引理 1.3.1　一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除(i,j)元 a_{ij} 外都为零,那么,这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积.

证 (1) 设$(i,j)=(1,1)$，此时设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

由例 1.2.4 得 $D=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$.

(2) 一般情形，此时设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用(1)的结果把 D 的第 i 行依次与前一行对调，再把第 j 列依次与前一列对调，这样，经过$(i-1)+(j-1)=i+j-2$ 次调换，数 a_{ij} 就调成$(1,1)$，由性质 1.2.2 知所得行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D$，而 D_1 中$(1,1)$元的余子式就是 D 中(i,j)元的余子式 M_{ij}.

利用(1)的结果，有 $D_1=a_{ij}M_{ij}$，于是，$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$.

定理得证.

定理 1.3.2 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即可以按第 i 行展开：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由引理 1.3.1 得，$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$.