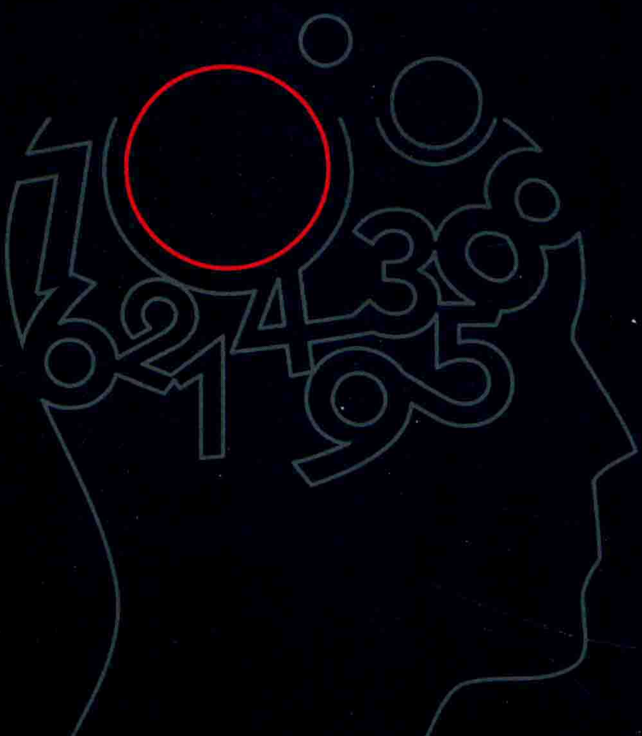
基于范畴的非良基理论及其应用

NON-WELL-FOUNDED THEORY BASED ON CATEGORY AND ITS APPLICATIONS

王湘云 著



南開大學出版社

基于范畴的非良基理论及其应用

王湘云　著

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

基于范畴的非良基理论及其应用 /王湘云著. —天津：南开大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-310-04433-7

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①范畴论—研究 Ⅳ. ①O154.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 048455 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷

230×170 毫米 16 开本 9.25 印张 166 千字

定价:28.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

序　言

非良基集合论是在经典公理集合论系统 *ZFC* 中用非良基公理替换良基公理 *FA* 得到的公理化集合论。非良基集合论突破了 *FA* 将集合论域限制到良基集合的局限，扩大了集合论的全域，使集合论的全域更加丰富，使它既包含良基集合，又包含具有无穷∈降链性质或循环性质的非良基集合。因此，借助于非良基集合，非良基集合论揭示了现代科学中的众多循环现象，展示了更广阔的应用前景。而且，非良基集合论给出了一套完备的能够为现实世界中各种各样的循环问题构建模型的工具。

范畴论是结构和结构系统的一般数学理论，并且系统化和统一了许多的数学结构，在代数学、逻辑学、理论计算机科学等领域有着广泛的应用。在范畴论的意义下，借助代数的和共代数的方法，良基公理 *FA* 和非良基公理 *AFA* 所刻画的集合全域中的对象具有某种"泛性质"，并且在结构上能够彼此互相关联。实际上，范畴论是作为数学基础的集合论的替代物。

现在，呈现在读者前面的这部著作是在范畴论的框架上对非良基集合论的理论和应用两方面进行研究的成果。该成果难度较大。这对于我国逻辑学界了解学术前沿理论、汲取新的研究思想和方法，从而进一步开展该领域新的研究课题具有重要的学术意义和理论价值。

该书在理论方面：首先，从集合的精确图出发，介绍了非良基集合上的外延性，描述同一公理家族 *AFA*、*SAFA*、*FAFA* 确定的非良基集合全域。其次，以理论计算机科学中典型的循环现象，如流、无穷树、标号转换系统为例，阐明了为什么要在 *ZFC* 中用非良基公理替换良基公理，以及使用非良基公理可以解决什么样的问题。借助共代数方法，研究范畴论意义下的非良基公理。最后，探讨了在一个适当的范畴下，集合、图和共代数之间的对应关系，即根据集合的图，能够定义一个非良基集合和一个共代数的一一对应。继而根据共代数的终结性，给出同一公理家族 *AFA*~的范畴论意义下的描述，即 *AFA*~具有终结性。

该书在应用方面：首先，梳理了非良基理论应用于计算机科学领域的研究

成果。其次，研究了非良基公理的应用，讨论了在范畴下的定点理论。奥采尔（Peter Aczel）首先研究了集连续算子的定点理论，在引入了类范畴上的集连续算子之后，将此推广到标准函子的定点理论。描述了标准函子的最小定点（初始代数）和最大定点（终结共代数），并详细论证了符合一定条件的函子的终结共代数存在的终结共代数定理。最后，本书以 *AFA* 为理论基础，探讨了程序语言语义的一种数学方法，即计算程序进程的终结共代数语义。引入了米勒（Robin Milner）构造的通信系统 *CCS* 和 *SCCS* 的语法和语义，然后根据其语法和语义来描述奥采尔构造并给出的进程代数的终结代数语义，并且详细阐述了 *CCS* 进程的语义的终结域方法。

李　娜

2013 年 11 月 12 日

引　言

20 世纪以来，集合论的研究主流一直是包含良基公理 *FA* 的标准集合论 *ZFC*。*FA* 把集合的论域限制到良基集合，排除非良基集合（也称超集），也就是排除了具有循环性质的集合和具有无穷$\in$降链性质的集合。实际上，非良基集合通常或多或少地出现在集合理论的边沿，例如蒯因的 *NF* 系统中，只不过一般被看作奇特的或病态的对象。这样的集合在 20 世纪上半叶和中叶一直被认为是无价值的和反直觉的。顺应自身理论的发展和许多领域对循环现象加深认识的需要，集合论的研究从良基集合延伸到了非良基集合。作为良基公理的替换物，非良基公理具有扩张集论全域的作用，它保证非良基集合的存在，从而能够对各种循环现象做出解释。在 *ZFC* 中，用非良基公理替代 *FA* 得到的公理化集合论系统称作非良基集合论，它是 $ZFC^{-}(ZFC\text{–}FA)$的扩张。而且，用非良基公理替代 *FA* 之后，*ZFC* 中的其他所有结果在非良基集合论中均不改变，唯一的不同是循环定义的各种对象的模型问题。此外，非良基集合论给出了一套完备的工具能够模拟现实世界中各种各样的循环现象。就此而言，非良基集合论的作用和影响已经远远超出了经典的 *ZFC*。因此，对该理论的研究极具吸引力。

作为现代数学的基础，集合论是数理逻辑的一个重要分支。从逻辑应用的角度来看，非良基集合论与其他学科之间的交叉领域研究，更加具有实践意义。目前，计算机科学对社会的发展有着十分重要的影响，非良基理论在其中的应用也很广泛。使用非良基集合论，我们能够方便地为理论计算机科学中重要的流、闭包、演算系统等构建模型，从而解决实际的循环问题。此外，非良基集合论可作为表示程序语言结构操作语义的一种数学理论基础。

随着数学研究成果的日益丰富，现代逻辑向更加抽象化的方向发展成为必然。代数方法对现代逻辑的发展有着深远的影响，而作为其对偶概念的共代数，直至 20 世纪 90 年代中后期才被越来越多的学者所关注。共代数方法是代数方法的有力的互补工具，是一种十分数学化的研究方法。数学、逻辑学和理论计

算机科学中的许多结构都能够很自然地看作共代数。例如，流、克里普克模型、（标号）转换系统等，正是由于可作为研究基于状态的系统的可观察行为的数学理论，共代数具有极其广阔的应用前景。而且，在范畴论的意义下，共代数也是非良基理论中的一个相当重要的概念。因此，共代数方法可作为现代逻辑研究的一个重要工具。

范畴论为日趋多样的数学分支以及各个分支之间多样化的联系提供了一种统一的、简洁的符号语言，在代数学、拓扑学、代数几何学、逻辑学、理论计算机科学等领域都有着广泛的应用。由于范畴论是结构和结构系统的一般数学理论，它能以一种统一的方式来处理结构的概念，因此，我们可以使用范畴论的原理和方法研究给定结构类的泛性质，以及各类结构之间的相互关系。譬如，在代数范畴和共代数范畴下，集合论的良基公理 *FA* 和非良基公理 *AFA* 分别有特定的含义。也就是说，我们能够从范畴的角度，借助于代数的和共代数的理论来考虑集合论的良基公理和非良基公理，从而以一种新的、统一的方式来探究集论全域的泛性质。

然而，尽管 20 世纪初人们就提出研究非良基集合，但是关于非良基集合的工作一直被排除在主流之外。直到 1988 年奥采尔出版了专著《非良基集合》①，人们对非良基集合及其理论的研究才逐渐产生了浓厚的兴趣并深入地发展起来。奥采尔在非良基集合上研究的最初动机是为计算机演算通信系统提供集合理论上的模型。他将转换系统和非良基集模型作为共代数，给出了理论计算机科学中第一个关于共代数的典范样本，建立了循环和非良基集合相互作用过程的一个极佳的例子。他发展的共归纳的理论，即确立共代数方法到程序语言语义（终结语义）的基础，说明非良基集合论和理论计算机科学之间的联系相当地紧密。

本书的研究主题是基于范畴的非良基理论及其应用，在奥采尔等人所做工作的基础之上，我们结合非良基集合论和范畴论的基本理论，从具体理论到实际应用的角度深入探究范畴意义下的非良基公理的泛性质，以及非良基理论在理论计算机通信系统中的一些应用，研究程序语言语义的一种数学方法，即计算程序进程的终结共代数语义，以促进非良基理论应用方面的深入发展。

下面介绍本书的章节结构和主要内容：

第一章介绍非良基集合论的基础理论。首先，简要概述经典集合论的背景

① Aczel P. Non-well-founded sets. Stanford: CSLI Publications, 1988.

知识和非良基集合论的基本概念。其次，借助于用图来刻画集合的方法，研究非良基集合上的外延性。再次，以理论计算机科学中典型的循环现象为例，讨论非良基公理 *AFA* 的使用，说明为什么要在 *ZFC* 中使用非良基公理替换良基公理，以及非良基公理可以解决什么样的问题。最后，梳理非良基理论在计算机科学中应用的一些研究状况。

第二章介绍范畴论的一般理论。第一，介绍范畴的一般定义，并且给出范畴的一些具体例子。第二，概述需要使用的范畴论的一些基本概念，诸如，函子、自然变换、拉回和对偶性等。第三，阐述共代数范畴中的有关概念和共代数上的一些基本构造。第四，讨论范畴论的哲学意义。

第三章研究基于范畴的非良基公理。第一，对集合和类两个概念进行明确地诠释和界定。第二，阐明 *ZFC* 的良基公理 *FA* 具有初始性，即 *FA* 等价于假定集合全域对类上的幂集自函子是一个初始代数。第三，讨论在范畴论意义下的非良基公理 *AFA*，证明 *AFA* 是 *FA* 范畴论上的对偶，*AFA* 具有终结性，即 *AFA* 等价于假定集合全域对类上的幂集自函子是一个终结共代数。第四，在只考虑集合的幂集函子的情况下，描述代数形式的 *FA* 和共代数形式的 *AFA*，并且说明二者在范畴理论的形式上是对偶的。第五，根据集合、图和共代数之间的对应关系，探讨非良基公理 *FAFA* 和 *BAFA* 的终结性，并且给出同一公理家族 $AFA^{\sim}$ 的共代数形式的表述。

第四章研究非良基公理的应用。主要探讨在适当的范畴下的定点理论。第一，讨论集连续算子的定点。给出集连续算子概念的几种不同描述、性质和一些例子，并且证明每个集连续算子有一个最小定点和一个最大定点。第二，讨论推广集连续函子概念的标准函子的概念，给出标准函子的末端定点的一般描述，也就是，标准函子在一个适当的范畴中的初始代数（即最小定点）和终结共代数（即最大定点）。并且证明满足条件“保持弱拉回”的标准函子的终结共代数存在的特殊终结共代数定理。第三，讨论终结共代数定理的完全一般性。对特殊终结共代数定理进一步改进，证明类的范畴上满足条件“基集的”函子的终结共代数存在的终结共代数定理，并且给出用超大范畴替换类的范畴而得到的终结共代数定理的一般化。

第五章研究通信系统的应用。首先，讨论程序语言的语义问题，描述一种程序语言的操作语义和共代数语义，并且给出共代数表示的程序语言操作模型的一些实例。其次，描述通信系统的一个应用。简要介绍 *CCS*（演算通信系统）、*SCCS*（同步式演算通信系统）的语法和操作语义。由于根据原子动作集 *Act* 的

元素加标号的转换系统可看作类范畴上的标准函子$\wp(Act\times\cdots)$的共代数，根据终结共代数定理可以构造一个完全转换系统$\mathcal{P}$，其是对$\wp(Act\times\cdots)$而言的最大定点。因此，我们能够使用终结共代数定理描述 *SCCS* 的操作语义，并且重新定义 *SCCS* 表达式的组合算子在完全转换系统$\mathcal{P}$上的运算。最后，讨论 *CCS* 进程的语义的终结域方法。简单介绍进程代数的语义域特性的终结域方法，并且将类范畴上的终结共代数的一般理论沿袭到标号转换系统 *LTS* 中，进而描述 *LTS* 上的互模拟的有关概念。然后定义τ-*LTS* 的概念，其中，$\tau\in Act$ 是一个无声动作，给出 *CCS* 进程的基本组合算子在任意的终结τ-*LTS* 上的定义。最终给出一个终结 *LTS* 的 *CCS* 的构造。

目　录

第一章　非良基集合论基础理论

在标准集合论 *ZFC* 中，用非良基公理替换良基公理得到的公理化集合论系统称作非良基集合论。借助于非良基公理，非良基集合论可以得到更为丰富的集合全域。而且，非良基集合论给出了一套完备的工具能够模拟现实世界中各种各样的循环现象。就此而言，非良基集合论的作用和影响已远远超出了经典的集合论 *ZFC*。

本章首先简要概述经典集合论的背景知识和一些基本事实，介绍非良基集合论的一些基本概念。其次借助于用图来刻画集合的方法，讨论非良基集合上的外延性。根据描述集合的可达点图和集合的外延性，我们从精确图出发阐明根据奥采尔非良基公理 *AFA*、斯科特（Dana Scott）非良基公理 *SAFA* 和芬斯勒（Paul Finsler）非良基公理 *FAFA* 确定的三个不同的非良基集合全域：奥采尔全域 V_A、斯科特全域 V_S 和芬斯勒全域 V_F，其满足包含关系 $V_A \subseteq V_S \subseteq V_F$。并且将可达点图的概念扩充到系统的概念，根据可达点图上的正则互模拟关系~定义非良基公理模式，即同一公理家族 *AFA*~确定什么样的可达点图是一个精确图。再次以理论计算机科学中典型的循环现象，诸如流、标号转换系统和无穷树为例，讨论非良基公理 *AFA* 的使用，从而说明为什么要在标准集合论 *ZFC* 中使用非良基公理替换良基公理。最后梳理非良基集合的理论在计算机科学中应用的一些研究状况。

第一节　概述

1.1.1　集合论的背景

集合论是数理逻辑的一个重要分支，也是整个现代数学的基础。集合论自创立以来，不断促进着数学各分支的发展，它的基本概念已经渗透到数学的所

有领域。按照现代数学的观点，数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合或者是可以通过集合来定义的。从这个意义上来说，集合论是数学中最具创造性的伟大成果之一。19 世纪 70 年代，主要由德国数学家乔治·康托尔（Georg Cantor）创立了集合论，通常称作康托尔集合论，也称为朴素集合论或者素朴集合论。康托尔集合论的精髓是它的无穷序数理论和无穷基数理论，也就是关于无穷的数学理论。然而，在康托尔的这一理论中存在着矛盾，人们把它叫做悖论。诸如，罗素悖论、大基数悖论和大序数悖论。集合论悖论的出现，虽然成为逻辑界和数学界的一大难题，但也大大推动了逻辑学、数学的发展以及康托尔集合论自身的完善。特别是布拉利一福蒂悖论和罗素悖论出现之后，许多数学家开始寻找解决悖论的方法和途径，他们借助公理的方法对康托尔的理论和方法进行了系统整理，建立起了多种严谨的集合论体系，其中应用最为广泛的就是在 20 世纪初，主要由恩斯特·策梅罗（Ernst Zermelo）和亚伯拉罕·弗兰克尔（Abraham A. Fraenkel）建立的公理化集合论，也称为集合论的策梅罗—弗兰克尔公理系统，简记作 *ZF*。

1908 年策梅罗提出，公理化的集合论系统有 7 条非逻辑公理，即外延公理、存在公理、对集公理、并集公理、幂集公理、分离公理、无穷公理。但是没有基础公理(也称良基公理)，因此，循环的集合是很可能存在的。然而，伯特兰·罗素（Bertrand Russell）强烈地驳斥包含循环形式的所有定义，他提出了集合论的分层方法，否认循环对象的存在性。罗素的分层方法为 20 世纪上半叶一些主导的逻辑学家所采用。1925 年，冯·诺伊曼（John Von Neumann）引入了良基公理。策梅罗、弗兰克尔、斯科伦（Thoralf Skolem）、哥德尔（Kurt Gödel）和伯奈斯（Paul Bernays）等人也探究了良基公理的陈述及其一致性和独立性的证明。良基公理把集合的论域限制到良基集合，即良基公理保证我们所讨论的集合全域是良基的，也就是排除非良基集合（也称超集），排除了循环的问题。同年，弗兰克尔提出了替换公理，使得策梅罗公理系统进一步完善。如果加上选择公理，这 10 条公理组成了一个完整的集合论公理系统，即 *ZFC*。*ZFC* 公理系统，能够消除康托尔集合论中所出现的各种悖论，足以成为经典数学分析所需要的逻辑基础。

下面是集合论中的一些基本事实。

（1）幂集。对于任意的集合 x，x 的幂集是 x 的子集的集合，记作 $\wp(x)$或 $\wp x$。

（2）有序对。两个集合 x 和 y 的库拉托斯基（Kuratowski）有序对 $\langle x,y\rangle$ 是

$\{\{x\},\{x,y\}\}$。

（3）自然数。自然数可以定义为：$0=\varnothing$，$1=\{0\}=\{\varnothing\}$，$2=\{0,1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，等等，即把一个自然数 n 定义为所有比它小的自然数的集合 $\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$。用这种方法定义出来的自然数 n 是一个有 n 个元素的特殊的集合。

（4）并集和传递闭包。对于任意的集合 x，$\cup x$ 是 x 的元素的元素的集合。如果一个集合的每一个元素也是它的一个子集，则这个集合是传递的。x 的传递闭包是：

$$x\cup \quad \cup x\cup \quad \cup\cup x \ \cdots$$

这个集合表示为 $Tc(x)$。它是最小的包括 x 作为一个子集的传递集。

（5）康托尔定理。对于任意的集合 x，$|x|<|\wp x|$。即，x 的幂集 $\wp x$ 的势严格大于 x 的势。

证明：令 $f:x\rightarrow \wp x$ 是任意的集合 x 到 $\wp x$ 的函数。只需证明 f 不是满射即可。要证 f 不是满射，找到一个 x 的子集不在 f 的值域中即可。定义这个子集是 $y=\{a\in x|a\notin f(a)\}$。用反证法，假设 y 在 f 的值域中，且对于某个 $s\in x$，我们有 $y=f(s)$。根据 y 的定义，$s\in y$ 当且仅当 $s\notin f(s)$。因此，$s\in y$ 当且仅当 $s\notin y$，推出矛盾。得证。

1.1.2　ZFC 公理系统

集合论的逻辑公理从形式上讲就是一阶逻辑的公理。一个理论除了逻辑公理以外，更重要的是它的非逻辑公理。如果集合论仅仅有一些逻辑的公理，那么，我们所建立的理论也仅仅是一个特殊的一阶逻辑。*ZFC* 公理系统是建立在带有等词“=”和属于关系“∊”的一阶谓词演算的基础上，加上关于集合基本性质的非逻辑公理组成的形式演绎体系。*ZFC* 公理系统的非逻辑公理都是可以用集合论的一阶语言的符号形式表示的，它的所有推理也都可以用这种形式语言的符号表示。所以，*ZFC* 公理系统也被称为形式公理化集合论。

我们可以将 *ZFC* 的公理表述如下：

（1）存在公理（*The Axiom of Existence*）：存在一个没有元素的集合。

形式化表示：$\exists y\forall x(x\notin y)$。

（2）外延公理（*The Axiom of Extensionality*）：如果 x 的每一个元素都是 y 的元素且 y 的每一个元素也是 x 的元素，那么 $x=y$。

形式化表示：$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$。

（3）分离公理（*The Axiom Schema of Comprehension*）：令 $P(x)$是 x 的一个

性质，对于任意的集合 A，存在一个集合 B 使得 $x \in B$ 当且仅当 $x \in A$，并且 $P(x)$。

形式化表示：对于 ZFC 形式语言中的任一公式 $P(x)$，都有 $\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$。

（4）对集公理（*The Axiom of Pair*）：对于任意的集合 A 和 B，存在一个集合 C 使得 $x \in C$ 当且仅当 $x=A$ 或 $x=B$。

形式化表示：$\forall A \forall B \exists C(\forall x(x \in C \leftrightarrow x=A \vee x=B))$。

（5）并集公理（*The Axiom of Union*）：对于任一集合 S，存在一个集合 U 使得 $x \in U$ 当且仅当对某个 $A \in S$，$x \in A$。

形式化表示：$\forall S \exists U(\forall x(x \in U \leftrightarrow \exists A(A \in S \wedge x \in A))$。

（6）幂集公理（*The Axiom of Power Set*）：对于任意的集合 S，存在一个集合 P，使得 $x \in P$ 当且仅当 $x \subseteq S$。

形式化表示：$\forall S \exists P \forall x(x \in P \leftrightarrow x \subseteq S)$。

（7）无穷公理（*The Axiom of Infinity*）：存在一个归纳集。

形式化表示：$\exists S(\varnothing \in S \wedge \forall y \in S(y \cup \{y\} \in S))$。

（8）选择公理（*Axiom of Choice*）：每一个集合系统有一个选择函数。如果 F 是一个两两不相交的非空集合组成的集合簇，则可以从 F 的每一个集合中各选出一个元素组成一个集合 S。

形式化表示：$\forall x \forall y((y \in x \wedge y \neq \varnothing \rightarrow \exists f(Fun(f) \wedge \forall y \in x(f(y) \in y))$，其中 $Fun(f)$ 表示“f 是函数”，即 $\forall x(x \in f \leftrightarrow \exists y \exists z(x=(y,z) \wedge \forall u((y,u) \in f \rightarrow u=z)))$。

（9）替换公理（*The Axiom Schema of Replacement*）：如果一个类 F 是一个函数，那么对于任意的 X，存在一个集合 $Y=F(X)=\{F(x): x \in X\}$。

形式化表示：对每一个公式 $\varphi(x,y,p)$，$\forall x \forall y \forall z(\varphi(x,y,p) \wedge \varphi(x,z,p) \rightarrow y=z) \rightarrow \forall X \exists Y \forall y(y \in Y) \leftrightarrow (\exists x \in X) \varphi(x,z,p))$。

（10）良基公理（*The Axiom of Foundation*）：所有的集合是良基的，即任意非空集合都有 $\in$-极小元。

形式化表示：$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in x(y \cap x=\varnothing))$。

其中，良基公理也称基础公理或正则公理。除上面陈述的一阶形式，良基公理的表述也有其他不同的形式[①]：

① Moss L. S. Non-wellfounded Set Theory. Stanford Encyclopedia of Philosophy, CSLI. 2008. http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/

（1）不存在集合的无穷序列 $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots\ x_n \ni x_{n+1} \cdots$，序列中的每一项是前面一项的一个元素。

（2）令 a 是任意集合，并且令 $g: \wp a \rightarrow a$。令 b 是任意传递集合。那么存在唯一一个函数 $g: b \rightarrow a$，使得对于所有的 $x \in b$，$g(x)=f(g[x])$。

（3）对于所有的集合 x，存在一个序数 α 使得 $x \in V_\alpha$。

（4）$V = WF$（WF 是所有良基集合的收集）。

特别地，这些形式是等价的。

1.1.3　非良基集合

在 ZFC 公理系统中，由于良基公理的限制，我们讨论的只有良基集合而没有非良基集合。其实早在 1917 年，米尔马诺夫（Dimitry Mirimanoff）就区分了良基集合和非良基集合，不过他在当时称之为“普通集和非常集”（ensembles ordinaires and extraordinairy）①。非良基集合也称超集或奇异集合。简单地讲，如果一个集合不是良基的，则它就是一个非良基集合。

1.1 定义　称一个集合 x 是非良基的，是指由一个集合组成的无穷序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$（不一定都不相同），使得

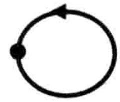
$$\cdots \in x_n \in \cdots \in x_1 \in x_0 = x$$

成立。也就是说，非良基集合有一个无穷 $\in$ 降链。

类似于无穷小数有无穷循环小数的情形，无穷降链中也有循环出现。根据上述定义，如果这样的集合序列中有相同的集合，则非良基集合 x 具有循环的性质。我们给出循环集的概念如下②：

1.2 定义　零次循环集是指具有自隶属性的集合；对于非零的自然数 n，一个集合 x 是 n 次循环的，仅当有 n 个集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n$（不一定都不相同），使得 $x \in x_n \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x$ 成立。如果一个集合 x 对于某个自然数 n 而言是 n 次循环的，则称 x 为循环的。

直观上，非良基集合是允许包含自身的集合，也就是集合可以成为它自身的元素。例如，考虑一个简单的集合 $x=\{x\}$，它可以用图表示为：



① Sangiorgi D. On the Origins of Bisimulation and Coinduction. ACM Transactions on Programming Languages and Systems, 2009, 31(4): 135.

② 张清宇. 循环并不可恶——《非良基现象的数学》评介. 哲学动态, 2005(4): 59.

其中，图的结点表示集合，边表示逆向的隶属关系。将上图展开得到一个无穷树图，即 x 的展开图如下所示：

x 的展开图也可以用无穷降链 $\cdots\in x\in\cdots\in x=x$ 表示。显然，该集合是循环的，也是非良基的。

实际上，循环的集合可以用无穷 $\in$ 降链表示，而不循环的非良基集合也可以看作循环节无穷的循环集。为了更明确地说明非良基集合，我们规定无穷 $\in$ 降链中的集合是两两不相同的，可以将非良基集合看作两类集合：一类是具有循环性质的集合；另一类是具有无穷 $\in$ 降链性质的集合。

例如，考虑满足下面条件的集合 $x, y, z, x_0, x_1, \cdots, x_3\cdots$：

（1）$x\in x$；

（2）$x\in y\wedge y\in x$；

（3）$x\in y\wedge y\in z\wedge z\in x$；

（4）$x_0\in x_1\wedge x_1\in x_2\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\in x_n\wedge x_n\in x_0$；

（5）$\cdots\wedge x_{n+1}\in x_n\wedge x_n\in x_{n-1}\wedge\cdots\wedge x_1\in x_0$（注：集合是两两不相同的）。

满足上述条件之一的集合称为奇异集合[①]，也就是非良基集合。其中，满足条件（1）～（4）的集合是具有循环性质的集合；满足条件（5）的集合是具有无穷 $\in$ 降链性质的集合。当然，良基公理预设了具有这两类性质的集合不是 *ZFC* 公理系统的研究对象。

为了对各种循环现象做出解释，我们需要放弃良基公理的限制，使用一种新的公理化集合论系统。我们想要得到一个更丰富的集合全域，它不但包含良基集合也要包含非良基集合。因此，我们可以在标准的集合论 *ZFC* 中用另外的公理替换良基公理来得到这样一种全新的集合全域。这种同良基公理相矛盾的替换物就是非良基公理，也称反基础公理。

① 张锦文．公理集合论导引．北京：科学出版社，1991：21.