

飞行器动力学环境 设计理论及其应用

蔡成钟 编著



中国宇航出版社

· 北 京 ·

ISBN 978-7-80144-681-7



9 787801 446817 >

内 容 简 介

本书是在系统总结了作者多年研究和实践取得的创新成果和吸收国内外相关专业成果的基础上,撰写的一部学术著作。重点介绍飞行器研制中应当如何进行动力学环境分析和设计、如何解决与动力学环境有关的设计中不断提出的各种技术问题以及应用实例,其主要内容包括振动频谱分析、概率和统计、随机振动、正弦与随机振动的等效、飞行器振动环境分析预示方法、随机振动环境测量、振动环境设计和试验、冲击环境设计和试验、噪声环境、高速撞击和强脉冲载荷下结构响应、火箭弹的振动和发射随机动力学等。

本书是一本较系统的入门教材,可供从事飞行器研制、设计、试验、可靠性评定或相关专业的科技人员阅读,也可作为高等院校有关专业大学生及研究生的参考书。

版权所有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

飞行器动力学环境设计理论及其应用/蔡成钟编著. —北京:中国宇航出版社,2007.9
ISBN 978-7-80144-681-7

I. 飞... II. 蔡... III. 飞行器—动力学—环境设计 IV. V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088650 号

责任编辑 易 新 封面设计 03 工舍 责任校对 王 妍

出 版 中国宇航出版社

社 址 北京市阜成路 8 号 邮 编 100830
(010)68768548

网 址 www.caphbook.com/www.caphbook.com.cn

经 销 内部发行

发行部 (010)68371900 (010)88530478(传真)
(010)68768541 (010)68767294(传真)

零售店 读者服务部 北京宇航文苑
(010)68371105 (010)62529336

承 印 北京智力达印刷有限公司

版 次 2007 年 9 月第 1 版
2007 年 9 月第 1 次印刷

规 格 787 × 1092

开 本 1/16

印 张 18.25

字 数 470 千字

书 号 ISBN 978-7-80144-681-7

定 价 80.00 元

本书如有印装质量问题,可与发行部联系调换

序

晚辈为师长的专著写序，可能是为数不多的。应先生之邀，我必须尽力。翻阅了书稿，使我又想起了几年前共同攻关的情景。蔡成钟研究员长期从事飞行器动力学环境分析的工程实践和理论研究，几十年来，其成果直接指导或应用于国家重点工程，起到了重要作用。这也是这部专著的根基所在。

环境预示与分析对于飞行器设计、研制至关重要。中国航天在自主创新的发展道路上，对此感触深刻。动力学环境预示是环境预示与分析中较为困难的部分之一，它是飞行器设计的重要依据之一，是试验检验的重点之一，是飞行器可靠性设计与分析的重要内容，是飞行成败的关键之一。

本书内容包括理论、工程应用和几个环境分析应用问题。其中工程应用部分主要围绕振动、冲击和噪声的环境设计展开，反映了工程设计中的一些研究进展；高速冲击等环境分析应用问题也反映了作者的一些研究成果。本书对于从事飞行器总体设计、结构设计、载荷分析、环境分析与试验等专业的工程技术人员和攻读航天飞行器工程专业的研究生有很好的参考价值。

飞行器动力学环境设计随着新世纪科学技术的迅猛发展，将不断发展。工程应用不断提出新的问题，不同的材料与结构、不同的总体设计方案、不同的飞行环境剖面、不同的任务要求，对动力学环境预示提出了越来越高的要求。同时，现代分析手段、试验能力和水平的提高也为解决这些问题提供了可能。

总之，飞行器动力学环境设计对航天工程和各种飞行器设计与研制是关键的一环，有广阔的应用前景，有许多未知等待人们去探索。



2006年9月9日

前 言

飞行器动力学环境是指飞行器在运输、发射、飞行、落地等不同阶段遇到的随机振动、瞬间冲击和噪声环境。本书还包括高速撞击和发射随机动力学。飞行器研制时,要求设计并给出研制工作所需要的完整的动力学环境条件,作为飞行器结构和内部仪器设备进行设计、试验和可靠性评定的原始依据和合格与否的判别标准,以及要求解决飞行器研制过程中不断提出的与动力学环境有关的新的技术问题。这就是飞行器动力学环境设计的任务。为此,必须对上述各阶段动力学环境进行全面研究、分析、设计和解决有关技术问题。可见,动力学环境设计是综合性强、复杂性高的一项系统工程,是总体设计工作的重要组成部分。

动力学环境设计随着不断提出的新问题的解决而不断发展,同时也随着国内外相关学科的发展而发展。因此,动力学环境设计既是设计实践的迫切需要,又具有推动应用理论向前发展的重要作用,并具有强大的生命力。

作者多年来从事飞行器研制实践和理论研究,现把在这方面的实践经验和理论创新取得的一些成果加以系统总结,同时消化并吸收了国内外相关成果,写成本书奉献给读者。

本书体现了基础理论和工程应用并重,两者紧密结合的特点。

本书分为三部分。一是基础理论部分,包括第1章~第3章,介绍振动频谱分析、概率和统计及随机振动。二是工程应用部分,介绍如何进行飞行器振动、冲击、噪声环境的分析和设计,最后制订成环境试验条件,实现环境试验,以第7章、第13章、第14章为中心;第4章~第6章和第8章~第11章都各自独立,但都围绕着振动、冲击、噪声环境设计展开;此外,第12章还介绍必要时对结构或仪器设备进行减振和缓冲设计的内容,即环境控制。三是另类环境及应用部分,包括第15章、第16章,分别介绍高速撞击和强脉冲载荷下的结构响应、火箭弹的振动和发射随机动力学。为便于读者查阅,各章末列出了主要参考文献,书后还附有常用概率分布数据表等。

在此感谢中国航天科技集团公司、中国运载火箭技术研究院、北京航天长征飞行器研究所、北京强度与环境研究所等单位的有关领导和同行们,多年来他们

给予作者指导、支持和帮助，并给予作者从事研究和工程实践的平台。承中国运载火箭技术研究院副院长、科技委主任鲁宇研究员为本书作序；还得到卓越研究员、童轶男研究员、朴忠杰研究员、高雁南高级工程师、余和玲高级工程师等各位的指导、支持和帮助，致使本书得以顺利出版，在此谨向他们表示衷心感谢！

因作者水平所限，书中难免存在不当之处，敬请指正。

作 者

2006 年 5 月 15 日

目 录

第 1 章 振动频谱分析	(1)
1.1 傅里叶级数	(1)
1.2 傅里叶积分(傅里叶定理)	(2)
1.2.1 在区间 $(-l, l)$ 内展开	(2)
1.2.2 在区间 $(0, \infty)$ 内展开	(3)
1.2.3 物理意义	(3)
1.2.4 积分方程	(3)
1.3 傅里叶积分的复数形式	(4)
1.4 傅氏变换的特性	(6)
1.4.1 叠加特性	(6)
1.4.2 函数曲线下的面积	(6)
1.4.3 时延和频移特性	(6)
1.4.4 微商特性	(7)
1.4.5 时间比例特性	(7)
1.4.6 相乘特性和褶积特性	(7)
1.4.7 能量特性	(7)
1.4.8 尺度展缩特性	(8)
参考文献	(9)
第 2 章 概率与统计	(10)
2.1 随机事件与概率	(10)
2.2 概率的古典定义	(10)
2.3 概率加法定理	(11)
2.4 概率乘法定理	(12)
2.5 一维概率分布函数和一维概率密度函数	(12)
2.5.1 一维概率分布函数	(13)
2.5.2 一维概率密度函数	(13)
2.6 子样值和参数估计	(14)
2.7 常用的概率分布	(15)
2.7.1 正态分布(Gauss)	(15)
2.7.2 χ^2 分布	(16)
2.7.3 学生氏 t 分布	(17)
2.7.4 非中心 t 分布	(18)

2.7.5 F 分布	(20)
2.7.6 二项分布	(21)
2.7.7 泊松分布	(21)
2.7.8 瑞利分布(Rayleigh)	(21)
2.8 抽样分布、置信区间和假设检验	(22)
2.8.1 抽样分布	(22)
2.8.2 置信区间	(24)
2.8.3 假设检验	(26)
参考文献	(30)
第3章 随机振动	(31)
3.1 振动分类和描述	(31)
3.2 随机振动的平稳性和各态历经	(31)
3.3 随机振动的幅域特性	(33)
3.4 随机振动的时差域特性	(36)
3.5 随机振动的频域特性	(39)
3.5.1 自相关函数傅氏变换表示的自功率谱密度	(39)
3.5.2 滤波法表示的自功率谱密度	(40)
3.5.3 直接傅氏变换表示的自功率谱密度	(40)
参考文献	(42)
第4章 正弦振动与随机振动的等效	(43)
4.1 研究背景和必要性	(43)
4.2 振动造成的破坏	(43)
4.2.1 造成振动破坏的因素	(43)
4.2.2 电子元器件失效机理	(44)
4.2.3 累积损伤原理	(44)
4.2.4 等效疲劳加速振动试验	(45)
4.3 峰值等效	(45)
4.3.1 峰值等效公式	(45)
4.3.2 对峰值等效的认识	(46)
4.4 累积损伤等效	(46)
4.4.1 正弦扫描激励产生的损伤	(46)
4.4.2 随机白噪声激励产生的损伤	(47)
4.4.3 正弦扫描激励与随机激励累积损伤等效	(47)
4.5 正弦振动与随机振动的能量等效	(48)
4.5.1 试件输入能计算	(48)
4.5.2 试件响应能计算	(50)
4.6 试件主要性能参数的等效	(52)

4.7 小结	(53)
参考文献	(53)
第5章 飞行器振动环境分析预示方法	(54)
5.1 概述	(54)
5.2 飞行器的动载荷	(55)
5.2.1 对附体紊流附面层脉动压力	(55)
5.2.2 转捩点处脉动压力	(56)
5.2.3 底部脉动压力	(56)
5.3 低频振动环境分析预示方法(FEA)	(57)
5.4 模态参数的测定	(59)
5.4.1 振动方程的频域表达式	(59)
5.4.2 振型分解法	(60)
5.4.3 模态参数与机械阻抗的关系	(61)
5.5 复合材料模量和黏性系数的识别	(64)
5.5.1 概述	(64)
5.5.2 复合材料的模量识别	(65)
5.5.3 复合材料黏性系数识别	(66)
5.6 舱段间连接刚度的识别	(70)
5.6.1 连接刚度的概念	(70)
5.6.2 连接刚度的识别	(71)
5.7 高频振动环境分析预示方法(SEA)	(72)
5.7.1 概述	(72)
5.7.2 统计能量分析原理	(73)
5.7.3 典型子系统 SEA 参数计算公式	(75)
5.7.4 响应谱的置信限分析	(84)
参考文献	(87)
第6章 随机振动数据的测量和处理	(88)
6.1 振动数据的测量	(88)
6.1.1 振动数据的取得	(88)
6.1.2 缓变信号的辨别	(88)
6.1.3 测量系统的设计依据	(88)
6.2 随机振动数据处理	(89)
6.2.1 随机振动数据的处理	(89)
6.2.2 采样定理	(90)
6.2.3 谱窗和泄漏	(92)
6.3 直接傅氏变换运算的 PSD 估计的方差	(95)
6.3.1 误差的分类	(95)

6.3.2 谱密度估计的标准误差(随机误差)	(97)
6.3.3 谱密度估计的偏度误差(系统误差)	(98)
参考文献	(99)
第7章 振动环境的特点、设计及试验	(100)
7.1 概述	(100)
7.2 飞行器振动环境特点	(100)
7.2.1 飞行测量数据的作用	(100)
7.2.2 振动数据测量结果具有较大离散性	(100)
7.2.3 “理想的振动条件”	(101)
7.2.4 根据不同研制阶段特点开展振动环境设计工作并逐步完善	(101)
7.2.5 最高预示环境 and 设计环境	(102)
7.3 振动环境和试验条件设计的一般步骤	(102)
7.3.1 概述	(102)
7.3.2 振源分析	(103)
7.3.3 确定最高预示环境 and 设计环境	(104)
7.3.4 确定地面振动试验类型	(107)
7.3.5 制订振动试验条件	(109)
7.3.6 信息反馈和重点研究	(112)
7.3.7 获得飞行遥测数据后对环境条件进行验证和修订	(112)
参考文献	(113)
第8章 系统级振动试验和响应控制	(114)
8.1 概述	(114)
8.2 系统级试验的必要性	(114)
8.3 系统级振动试验条件	(114)
8.4 加速度振动条件存在的问题	(115)
8.5 响应控制值的确定	(117)
8.5.1 确定响应控制值的方法	(117)
8.5.2 响应控制正弦扫描试验的实现	(117)
8.6 实例——舱体振动试验中奇特的峰谷现象及解决办法	(118)
8.7 系统级大型地面试验的目的和要求	(118)
8.7.1 试验目的	(118)
8.7.2 系统级大型地面试验举例	(119)
8.7.3 对系统级地面试验的要求	(120)
8.8 磁带随机振动试验技术	(121)
8.9 分解试验原理	(122)
参考文献	(123)

第9章 研制、鉴定、验收、高效应力筛选、可靠性试验及其相互关系	(124)
9.1 概述	(124)
9.2 研制试验(Development Test)	(124)
9.3 鉴定试验(Qualification Test)	(124)
9.4 验收试验(Acceptance Test)	(125)
9.5 高效应力筛选试验(Environmental Stress Screening, ESS)	(125)
9.5.1 历史情况	(125)
9.5.2 背景	(125)
9.5.3 ESS的基本思想、目的、性质	(125)
9.5.4 ESS的方法	(126)
9.5.5 ESS试验的特点	(127)
9.6 验收试验与ESS试验的关系	(128)
9.6.1 问题的由来	(128)
9.6.2 统一的条件和做法	(128)
9.7 新的验收试验与鉴定试验的关系	(128)
9.8 可靠性试验(Reliability Test)	(129)
9.9 环境试验与可靠性试验的比较	(129)
9.10 环境试验与可靠性试验的关系	(130)
参考文献	(131)
第10章 系统级综合环境可靠性试验	(132)
10.1 原因及现状	(132)
10.2 原理	(133)
10.3 试验剖面的确定	(133)
10.3.1 综合环境剖面的设计	(133)
10.3.2 可靠性评定方案	(133)
10.3.3 试验剖面的得出	(135)
参考文献	(136)
第11章 运输振动	(137)
11.1 汽车运输试验方法	(137)
11.2 汽车运输实验室内模拟等价条件	(137)
11.2.1 幅值域等价条件	(138)
11.2.2 时域等价条件	(138)
11.2.3 频域等价条件	(138)
11.3 整车数控运输试验装置	(140)
11.4 苏联 СИТ 运输模拟台简介	(140)
参考文献	(141)

第 12 章 振动控制和缓冲设计	(142)
12.1 概述	(142)
12.2 振动控制特点和设计要求	(142)
12.3 减振原理和设计	(143)
12.3.1 减振系统频率计算	(143)
12.3.2 单自由度减振系统减振	(147)
12.4 大阻尼减振原理及设计	(153)
12.4.1 橡胶减振器与软质聚氨酯泡沫塑料组成的大阻尼减振系统	(153)
12.4.2 橡胶减振器与阻尼器构成的大阻尼系统	(153)
12.4.3 阻尼垫	(153)
12.5 结构阻尼减振设计	(154)
12.5.1 自由阻尼层	(154)
12.5.2 约束阻尼层	(154)
12.6 黏弹阻尼减振设计	(155)
12.7 典型仪器减振设计分析	(156)
12.8 大质量支架的减振设计	(158)
12.8.1 原始依据和要求	(158)
12.8.2 初步设计方案	(158)
12.8.3 轴向减振效率的计算	(158)
12.8.4 横向自振频率的计算	(159)
12.9 缓冲设计	(160)
12.9.1 原理	(160)
12.9.2 运动方程	(160)
12.9.3 矩形脉冲作用下的响应	(161)
12.9.4 正弦脉冲作用下的响应	(164)
12.10 随机振动的隔离	(165)
12.11 缓冲设计的改进	(166)
参考文献	(168)
第 13 章 冲击环境设计及试验	(169)
13.1 冲击响应谱	(169)
13.2 冲击响应谱的递归数字滤波计算	(170)
13.2.1 冲击响应谱的求法	(170)
13.2.2 递归数字滤波原理	(171)
13.2.3 递归数字滤波器的频响函数	(172)
13.2.4 递归滤波系数 a_i 和 b_i 的求法	(173)
13.2.5 递归数字滤波的应用	(173)
13.2.6 混淆和误差	(176)
13.3 几种规则脉冲的冲击谱	(178)

13.3.1 矩形脉冲主谱	(178)
13.3.2 后峰锯齿波主谱	(179)
13.3.3 半正弦脉冲主谱	(180)
13.4 冲击质量效应	(181)
13.4.1 问题的提出及解决	(181)
13.4.2 理论分析	(182)
13.4.3 试验结果	(183)
13.5 冲击环境和试验条件设计	(183)
13.5.1 冲击环境设计	(184)
13.5.2 冲击试验的基本类型	(185)
13.5.3 半正弦脉冲法的冲击试验条件	(185)
13.5.4 冲击谱的一致性检验	(186)
13.6 快速正弦扫描法在冲击试验中的应用	(189)
13.6.1 必要性	(189)
13.6.2 快速正弦扫描法的基本原理	(189)
13.6.3 扫描参数的选择	(190)
13.6.4 应用实例	(192)
13.7 子波组合法在冲击试验中的应用	(192)
13.7.1 子波组合法的冲击谱	(192)
13.7.2 参数调试和确定	(193)
13.7.3 试验步骤	(194)
13.8 过载开关在冲击作用下的接通试验及理论分析	(194)
13.8.1 问题的提出	(194)
13.8.2 试验方案和试验结果	(194)
13.8.3 开关接通时间的计算	(195)
13.9 利用遥测冲击信号分析飞行器飞行中产生故障的原因	(198)
13.9.1 问题及分析	(198)
13.9.2 对冲击信号的分析	(199)
13.9.3 结论	(200)
参考文献	(200)

第 14 章 噪声环境

(201)

14.1 概述	(201)
14.2 发动机噪声	(201)
14.3 气动噪声	(203)
14.4 外压脉冲	(203)
14.5 舱体内腔噪声的近似估算	(203)
参考文献	(203)

第 15 章 高速撞击和强脉冲载荷下的结构响应	(204)
15.1 概念	(204)
15.1.1 高速撞击的应用及其特点	(204)
15.1.2 强脉冲载荷下的结构响应	(206)
15.2 一维应变率无关理论的纵向应力波	(206)
15.2.1 两种坐标	(206)
15.2.2 应变率无关条件下的物质坐标描述的控制方程	(206)
15.2.3 特征线上相容关系	(207)
15.3 高速撞击的研究内容	(210)
15.3.1 撞击过程的数值分析	(210)
15.3.2 弹道试验	(210)
15.3.3 材料动态力学性能测试	(211)
15.4 数值分析示例	(211)
15.4.1 基本方程	(211)
15.4.2 材料本构关系	(212)
15.4.3 材料参数的确定	(213)
15.4.4 计算模型及结果	(213)
15.5 弹道试验	(222)
15.6 材料动态力学性能测定方法(SHPB 技术)	(222)
15.6.1 试验装置和测试系统	(222)
15.6.2 试验方法	(223)
15.7 舱体的高速撞水载荷	(224)
15.7.1 概述	(224)
15.7.2 锥形舱体高速撞水时的载荷	(224)
15.7.3 回收舱的入水参数	(226)
15.8 强脉冲载荷作用下载锥壳的结构响应	(229)
15.8.1 目的和方法	(229)
15.8.2 模型的建立及计算	(229)
15.8.3 化爆加载试验	(230)
15.8.4 结果比较	(231)
参考文献	(231)
第 16 章 火箭弹的振动和发射随机动力学	(233)
16.1 概述	(233)
16.2 火箭弹的振动	(233)
16.2.1 火箭弹横向振动频率和振型计算	(233)
16.2.2 火箭弹的模态试验	(237)
16.2.3 火箭弹和尾翼的颤振和发散	(237)
16.3 火箭弹的发射随机动力学	(237)

16.3.1	理论分析方法	(237)
16.3.2	火箭弹射击时冲击力特性	(241)
16.3.3	发射装置随机振动对火箭弹的起始扰动	(244)
16.3.4	工程分析方法	(245)
16.3.5	最小二乘法拟合分析	(246)
参考文献		(247)
附 录		(248)
附表 A	标准正态密度函数坐标	(248)
附表 B	标准正态密度函数曲线下的面积	(249)
附表 C	卡埃平方分布表	(250)
附表 D	学生氏 t 分布表	(251)
附表 E	非中心 t 分布表	(252)
附表 F	F 分布表(a)	(266)
附表 G	F 分布表(b)	(269)
附表 H	F 分布表(c)	(272)
附表 I	轮次分布表	(275)

第1章 振动频谱分析

1.1 傅里叶级数

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上,函数 $f(x)$ 可展开为傅里叶级数^[1],即

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1-1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1-2)$$

式(1-1)和式(1-2)说明,如果振动波形是任何形式的周期为 T 的函数时,可以用傅里叶级数展成许多简谐函数之和,也就是将其分解为多个简谐振动,这些简谐振动的频率之间成整数倍关系。这种将一个周期函数分解为一系列简谐函数的过程称为谐波分析(即振动的分解)。若在幅值-频率图上,则表示为离散的线谱。

【例1-1】若振动的时间历程为一周期函数(见图1-1),即

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-5 < x < 0) \\ 3 & (0 < x < 5) \end{cases}$$

周期 $T = 10$ s,求此函数的各谐波分量。

【解】 $\because$ 周期 $T = 2\pi = 10$ s, $\therefore \pi = \frac{T}{2} = 5$ s,

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5}$,积分区间是 -5 到 5 ,故有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^0 0 \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 3 \cos \frac{n\pi x}{5} dx \right] \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \right]_0^5 = 0 \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^5 3 dx = \frac{3}{5} x \Big|_0^5 = 3 \quad (n = 0)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin n\omega t dt = \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^0 0 \sin \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 3 \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right] \\ &= \frac{3}{5} \left(-\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \end{aligned}$$

代入式(1-1)得

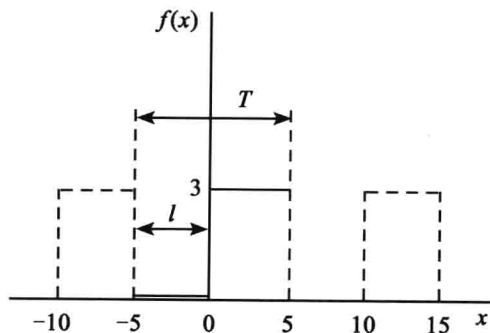


图1-1

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5}x = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{5}x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5}x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{5}x + \cdots \right)$$

各阶谐波的频率 ω_i 分别为 $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{5}, \dots$

1.2 傅里叶积分(傅里叶定理)

1.2.1 在区间 $(-l, l)$ 内展开

令 $x' = \frac{\pi}{l}x$, 函数 $f(x)$ 可展开为^[2]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l}x + b_n \sin n \frac{\pi}{l}x \right) \quad (1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

由式(1-3)和式(1-4)得到

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi(t-x)}{l} dt \quad (1-5a)$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时, 式(1-5a)变为^[2]

$$\text{第一项为 } \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{\theta}{2l} \rightarrow 0,$$

$$\text{第二项为 } \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \text{ (推导从略)}。$$

故, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 式(1-5a)的全部和趋向极限为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \quad (1-5b)$$

若有间断点, 只须用 $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ 来代替 $f(x)$ 。式(1-5b)是当 $l \rightarrow \infty$ 时由傅里叶级数得到的。这样就得到傅里叶积分(傅里叶定理)如下:^[2]

若函数 $f(x)$ 在任何的有限区间上满足狄利赫利条件, 并在区间 $(-\infty, \infty)$ 上可以求绝对值的积分, 则对所有的 x , 式(1-6)成立, 即

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (1-6)$$

这即是傅里叶定理, 式(1-6)左边的积分叫函数 $f(x)$ 的傅里叶积分。

把式(1-6)中的 $\cos \alpha(t-x)$ 展开, 就得到

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \cos \alpha x dt + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t \sin \alpha x dt \end{aligned} \quad (1-7)$$

因 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上可以求绝对值的积分, 故若 $f(t)$ 是偶函数, 则 $f(t) \cos \alpha t$ 是偶函数, 而 $f(t) \sin \alpha t$ 是奇函数, 即