Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

# 阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破

# 数学二

**超值赠送**

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

赠送MP3光盘


清华大学 王欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童武



中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

# 2015

# 历届真题15天突破

# 数学

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

# 阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破

## 数学二

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊


◎清华大学　　王　欢
◎北京大学　　王德军　主编
◎首都师范大学　童　武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破. 数学二 / 王欢主编. —北京：中国石化出版社，2014.1

ISBN 978-7-5114-2528-7

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第285698号



**中国石化出版社出版发行**

地址：北京市东城区安定门外大街58号

邮编：100011　电话：(010)84271850

读者服务部电话：(010)84289974

http://www.sinopec-press.com

E-mail：press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 11.25印张 282千字

2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷

定价：30.00元　(赠送MP3光盘)

# 前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

**本套丛书包括：**

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》
《考研数学标准模拟试卷精解数学二》
《考研数学标准模拟试卷精解数学三》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》
《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》
《考研数学主观题23天突破500题　数学一》
《考研数学主观题13天突破500题　数学二》
《考研数学主观题22天突破500题　数学三》
《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》
《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

**本套书的编写特点如下：**

**1．配合最新考试大纲，反映最新变化**

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

**2．注重考试技巧，高效突破难关**

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

**3．教授亲自主笔，编写阵容强大**

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

# 目　　录

# 第1天

## 2014 年全国硕士研究生入学统一考试
## 数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小,则 $\alpha$ 的取值范围是(　　).

(A)$(2,+\infty)$　　(B)$(1,2)$

(C)$(\frac{1}{2},1)$　　(D)$(0,\frac{1}{2})$

(2)下列曲线有渐近线的是(　　).

(A)$y=x+\sin x$　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D)$y=x^2+\sin^2 x$

(3)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上(　　).

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(D)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(4)曲线 $\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是(　　).

(A)$\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B)$\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C)$10\sqrt{10}$　　(D)$5\sqrt{10}$

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=f'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$(　　).

(A)1　　(B)$\frac{2}{3}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{1}{3}$

(6)设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续,在 $D$ 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则(　　).

(A)$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得

(B) $u(x,y)$的最大值和最小值都在$D$的内部上取得

(C) $u(x,y)$的最大值在$D$的内部取得,最小值在$D$的边界上取得

(D) $u(x,y)$的最小值在$D$的内部取得,最大值在$D$的边界上取得

(7)行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　).

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维向量,则对任意常数$k,l$,向量组$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的(　　).

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

**二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.**

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$ ________.

(10)设$f(x)$是周期为4的可导奇函数,且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,则$f(7)=$ ________.

(11)设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x^2+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数,则$dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ ________.

(12)曲线$L$的极坐标方程是$r=\theta$,则$L$在点$(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程是 ________.

(13)一根长为1的细棒位于$x$轴的区间$[0,1]$上,若其线密度$\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标$\bar{x}=$ ________.

(14)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是1,则$a$的取值范围 ________.

**三、解答题:15~23小题,共94分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)(本题满分10分)

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分10分)

已知函数$y=y(x)$满足微分方程$x^2+y^2y'=1-y'$,且$y(2)=0$,求$y(x)$的极大值与极小值.

(17)(本题满分10分)

设平面区域$D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4,x\geq 0,y\geq 0\}$,计算$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

(18)(本题满分10分)设函数$f(u)$具有2阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若$f(0)=0,f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式.

(19)(本题满分10分)设函数$f(x),g(x)$的区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，证明：

(Ⅰ)$0\leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$，

(Ⅱ)$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分11分)设函数$f(x)=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记$S_n$是曲线$y=f_n(x)$，直线$x=1$及$x$轴所围成平面图形的面积，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分11分)已知函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线$f(x,y)=0$所围成的图形绕直线$y=-1$旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分11分)设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为3阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组$Ax=0$的一个基础解系；

(Ⅱ)求满足$AB=E$的所有矩阵$B$.

(23)(本题满分11分)证明$n$阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

# 参考答案与解析

## 一、选择题

1.【答案】 B

【考点提示】 等价无穷小

【解析】 当 $x\to0^+$ 时, $\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha}$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}$

因为 $\ln^{\alpha}(1+2x)$ 和 $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小,

所以有 $\alpha>1$ 且 $\frac{2}{\alpha}>1$,解得 $1<\alpha<2$,即 $\alpha\in(1,2)$。正确答案为 B.

2.【答案】 C

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$,其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 四个选项中,

(A) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在;

(B) 和 (D) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在;

(C) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$.

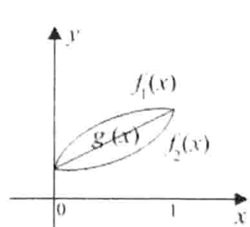
综上,只有选项 C 有斜渐近且为 $y=x$.

3.【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用

【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凹凸性;

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$,表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线。据此考虑作如下图:




根据曲线形状可知, $f_1'(x)\geqslant0$, $f_2'(x)\geqslant0$, $f_1''(x)\leqslant0$, $f_2''(x)\geqslant0$, $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$ 由此可判断,当 $f''(x)\geqslant0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$,正确答案为 D.

4.【答案】 C

【考点提示】 曲线的曲率与曲率半径

【解析】 由曲线参数方程可得 $x_t' = 2t, y_t' = 2t+4$,

则 $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{t+2}{t}, (y_x')_t' = -\dfrac{2}{t^2}, y_x'' = \dfrac{(y_x')_t'}{x_t'} = -\dfrac{1}{t^3}$

根据曲率公式 $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 得 $K_{t=1}\dfrac{\left|-\dfrac{1}{1^3}\right|}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{10\sqrt{10}}$.

所以曲率半径为 $10\sqrt{10}$,选 C.

5.【答案】 D

【考点提示】 函数的极限

【解析】 由 $f(x)=\arctan x, f(x)=xf'(\xi)$ 得,

$\arctan x = x\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}$,即 $\xi^2 = \dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3(1+x^2)} = \dfrac{1}{3}$,正确答案为 D.

6.【答案】 A

【考点提示】 二元函数的极值与最值

【解析】 令 $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, C = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

则依题意可知,$B\neq0, A+C=0$,

故而 $AC-B^2 = -A^2-B^2<0$,即区域 $D$ 内无极值,正确答案为 A.

7.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

$$原行列式 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1} - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-)^{2\cdot2}\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = (ad-bc)(bc-ad) = -(ad-bc)^2$,即正确答案为 B.

8.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由 $(\alpha_1+k\alpha_3, \alpha_2+l\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 可知,因为 $(\alpha_1+k\alpha_3, \alpha_2+l\alpha_3)$ 是二维向量组,而 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是三维向量组,所以 $\alpha_1+k\alpha_3, \alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关,无法推出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,条件不充分;

而当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关时,因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq0$,所以 $r(\alpha_1+k\alpha_3, \alpha_2+l\alpha_3)=2$,即 $\alpha_1+k\alpha_3, \alpha_2$

$+l\alpha_3$ 线性无关，条件充分.

综上，正确答案为 A.

**二、填空题**

9.【答案】 $\frac{3\pi}{8}$

【考点提示】 广义积分

【解析】 $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{4}\int_{b}^{1}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}dx$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{b}^{1}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}d\frac{x+1}{2}=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{b}^{1}$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{b+1}{2})$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{b+1}{2})=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{8}.$$

10.【答案】 1

【考点提示】 函数的周期性、奇偶性

【解析】 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，

所以 $f(7)=f(2\cdot4-1)=f(-1)=-f(1)$，且 $f(0)=0$.

由 $f'(x)=2(x-1)$ 可得 $f'(x)=x^2-2x+c$，

又 $f(0)=0$，则 $c=0$，即 $f(x)=x^2-2x$ 且 $f(1)=-1$，

则 $f(7)=-f(1)=1$.

11.【答案】 $-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$

【考点提示】 隐函数求导

【解析】 方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边对 $x$ 求导可得，

$2ye^{2yz}\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2ye^{2yz}+1}$，

两边再对 $y$ 求导可得，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+2ze^{2yz}}{2ye^{2yz}+1}$

当 $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$z=0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

$dz=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$.

12.【答案】 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

【考点提示】 函数的坐标转换、曲线的切线方程

【解析】 极坐标方程 $r=\theta$ 用直角坐标系表示为 $\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，

两边对 $x$ 求导可得，$\dfrac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x\cdot y'-y}{x^2+y^2}$

又点 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，即为 $(x,y)=(0,\dfrac{\pi}{2})$，代入上式可得 $y'\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\dfrac{2}{\pi}$

从而切线方程为 $y-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$.

13.【答案】 $\dfrac{11}{20}$

【考点提示】 定积分的应用

【解析】 因为 $\int_0^1(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x=(-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x)\Big|_0^1=\dfrac{5}{3}$，

$\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x=(-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\dfrac{11}{12}$

所以质心的坐标为 $\bar{x}=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{11}{20}$.

14.【答案】 $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为 1，所以有且只有一个特征值为负值，不妨设 $\lambda_1<0$，则 $\lambda_2\geqslant 0,\lambda_3\geqslant 0$，从而有 $|A|=a^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

当 $|A|=a^2-4=0$，即 $a=\pm 2$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，满足题意。故综上有，$-2\leqslant a\leqslant 2$.

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}) = \lim_{t\to0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t\to0^+} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 函数的极值

【解析】 由 $x^2 + y^2y' = 1 - y'$得$(1 + y^2)dy = (1 - x^2)dx$,

两边积分得,$y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + C$

由 $y(2) = 0$ 得 $C = \frac{2}{3}$,从而 $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$

令 $y' = \frac{1 - x^2}{1 + y^2} = 0$,得 $x = \pm 1$,

当 $x = 1$ 时,$y = 1$;当 $x = -1$ 时,$y = 0$

又 $y'' = \frac{-2x(1 + y^2) - (1 - x^2) \cdot 2y \cdot y'}{(1 + y^2)^2}$,

当 $x = 1$ 时,$y'' = -1 < 0$,故 $x = 1$ 为极大值点,极大值为 $y = 1$;

当 $x = -1$ 时,$y'' = 2 > 0$,故 $x = 1$ 为极小值点,极大值为 $y = 0$.

17.【考点提示】 二重积分

【解析】 平面区域 $D$ 关于对称,则根据对称性可得,

$$I = \iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}dxdy = \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}dxdy$$

从而 $2I = \iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}dxdy + \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}dxdy = \iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})dxdy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_1^2 \pi\rho\sin(\pi\rho)d(\pi\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t\sin t dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t\sin t dt = -\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t d\cos t = -\frac{1}{2\pi}t\cos t\Big|_\pi^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos t dt = -\frac{3}{2},$$

故 $2I = -\frac{3}{2}$,即$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}dxdy = I = -\frac{3}{4}$.

18.【考点提示】 解微分方程

【解析】 由 $z = f(e^x\cos y)$可得$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot e^x\cos y$,$\frac{\partial z}{\partial y} = -f' \cdot e^x\sin y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \cdot (e^x\cos y)^2 + f' \cdot e^x\cos y$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot (e^x\sin y)^2 - f' \cdot e^x\cos y$

则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x}f'' = (4z + e^x\cos y)e^{2x}$,$f'' = 4z + e^x\cos y$

令 $u = e^x\cos y$,则$f''(u) = 4f(u) + u$,$f(u) = C_1e^{2u} + C_2e^{-2u} - \frac{1}{4}u$

又$f(0) = 0$,$f'(0) = 0$,则有$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$,解得 $C_1 = \frac{1}{16}$,$C_2 = -\frac{1}{16}$,

故综上有,$f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$。

19.【考点提示】 函数的单调性与不等式的证明

【证明】

(Ⅰ)因为$0 \leqslant g(x) \leqslant 1, x \in [a,b]$

所以有$\int_a^x 0\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x 1\mathrm{d}t$,即$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$

(Ⅱ)根据题设不等式的构造,可令$\varphi(x) = \int_a^x f(u)g(u)\mathrm{d}u - \int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u$

则$\varphi(a) = 0$,且$\varphi'(x) = f(x)g(x) - f[a + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t]g(x)$

由(Ⅰ)知,$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a$且$f(x)$单调增加,

故而有$f[a + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t] \leqslant f(a+x-a) = f(x)$

则$\varphi'(x) \geqslant f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0, x \in [a,b]$

又$\varphi(a) = 0$,从而可知$\varphi(b) \geqslant \varphi(a) = 0$,即$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得证.

20.【考点提示】 定积分的几何意义、函数的极限

【解析】 由题设知,

$f_1(x) = f(x) = \frac{x}{1+x}$,

$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{x}{1+2x}$,

$f_3(x) = f(f(f(x))) = \frac{x}{1+3x}$,

由归纳法可假设$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$,则根据$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\frac{x}{1+nx}}{1+\frac{x}{1+nx}} = \frac{x}{1+(n+1)x}$可知

假设成立,即$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.

$$\text{面积 } S_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\mathrm{d}(nx) = \frac{1}{n^2}\int_0^n \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_0^n \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}[t - \ln(1+t)]\Big|_0^n = \frac{1}{n^2}[n - \ln(1+n)]$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right] = 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n} = 1$.

21.【考点提示】 旋转体的体积

【解析】 由$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$可得,$f(x,y) = y^2 + 2y + \varphi(x)$

由$f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$得$\varphi(x) = (x-2)\ln x$,

故$f(x,y) = (y+1)^2 + (x-2)\ln x$.

$f(x,y) = 0$与$y$轴所围成的图形绕直线$y = -1$旋转所成的旋转体的体积与

$y^2=-(x-2)\ln x$ 所围成的图形绕 $y=0$ 旋转所得的体积相等，

$$V=\pi\int_1^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\left(2\ln2-\frac{5}{4}\right)\pi.$$

22.【考点提示】 矩阵方程组的解

【解析】

（Ⅰ）先对矩阵作初等变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

则可得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$.

（Ⅱ）令矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$,

$$\text{则 }AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}&x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}&x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}\\x_{21}-x_{31}+x_{41}&x_{22}-x_{32}+x_{42}&x_{23}-x_{33}+x_{43}\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}&x_{12}+2x_{22}-3x_{42}&x_{13}+2x_{23}-3x_{43}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

则可得三个方程组，

$$\begin{cases}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}=1\\x_{21}-x_{31}+x_{41}=0\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}=0\end{cases},\begin{cases}x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}=0\\x_{22}-x_{32}+x_{42}=1\\x_{12}+2x_{22}-3x_{42}=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}=0\\x_{23}-x_{33}+x_{43}=0\\x_{13}+2x_{23}-3x_{43}=1\end{cases}$$

对各方程组的增广矩阵实行初等变换分别可得，

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}$$