

2015 考研专家指导丛书

考研数学客观题

15天突破1500题

数学二

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

- 清华大学
- 北京大学
- 首都师范大学

王欢
王德军 主编
童武

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

2015
2015

2015

2015

考研数学各真题

15 天突破 1500 题

数学

2015

2015

2015

2015

2015

2015

2015

2015 考研专家指导丛书

考研数学客观题 15天突破1500题 数学二

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

● 清华大学
● 北京大学
● 首都师范大学

王 欢
王德军 主编
童 武

中国石化出版社
[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学客观题 15 天突破 1500 题. 数学二 / 王欢主编. —北京:中国石化出版社,2014. 1

ISBN 978-7-5114-2493-8

I. ①考… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 285694 号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编:100011 电话:(010)84271850

读者服务部电话:(010)84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail:press@sinopec.com

北京柏力行彩印有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787 × 1092 毫米 16 开本 6.25 印张 155 千字

2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷

定价:25.00 元(赠送 MP3 光盘)

前 言

中国加入 WTO 之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 98 考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 70 考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 102 考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学三》

《考研数学主观题 23 天突破 500 题 数学一》

《考研数学主观题 13 天突破 500 题 数学二》

《考研数学主观题 22 天突破 500 题 数学三》

《考研数学客观题 26 天突破 1500 题 数学一》

《考研数学客观题 15 天突破 1500 题 数学二》

《考研数学客观题 27 天突破 1500 题 数学三》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学一》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学二》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编 者

目 录

第一部分	高等数学	(1)
第 1 天	函数、极限与连续	(3)
第 2 天	导数与微分	(11)
第 3 天	不定积分	(25)
第 4 天	定积分的计算及其应用	(28)
第 5 天	多元函数的微分与应用	(36)
第 6 天	多元函数积分学	(43)
第 7 天	常微分方程	(51)
第 8 天	总复习题一	(56)
第二部分	线性代数	(61)
第 9 天	行列式	(63)
第 10 天	矩阵	(66)
第 11 天	向量	(75)
第 12 天	线性方程组	(80)
第 13 天	矩阵的特征值和特征向量	(85)
第 14 天	二次型	(89)
第 15 天	总复习题二	(91)

第一部分 高等数学

第 1 天 函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界().

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 的表达式知, 它在实数轴上除点 $x=0$, $x=1$ 及 $x=2$ 外处处有定义, 在它的定义域上有

$$|f(x)| = \left| \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \right| = \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} \cdot \left| \frac{\sin(x-2)}{x-2} \right| \leq \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

由此可见 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有界, 而在任何以 $x=1$ 或 $x=2$ 为端点的开区间内无界. 故应选(A).

2. 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

- (A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【答案】B

【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x e^{\sin x} = \infty$, 故 $f(x)$ 无界. 或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n=1, 2, \dots$) 的

函数值, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$, 可见 $f(x)$ 是无界函数. 故应选(B).

3. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 则下列结论中正确的是().

- (A) 若 $\{y_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n - y_n\}$ 一定无界数列
(B) 若 $\{y_n\}$ 是无界数列, 则 $\{x_n y_n\}$ 一定无界数列
(C) 若 $\{y_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n y_n\}$ 一定无界数列
(D) 若 $\{y_n\}$ 是无界数列, 则 $\{x_n + y_n\}$ 必是无界数列

【答案】A

【解析】① $x_n = \begin{cases} n & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ n & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$

则 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 都无界. 但 $x_n \cdot y_n = 0$, $\{x_n y_n\}$ 有界. 故(B)不正确. ②若设 $y_n = 0$, x_n 如①, 则 $\{y_n\}$ 有界, $x_n \cdot y_n = 0$, $\{x_n y_n\}$ 有界. 故(C)不正确. ③ $x_n = n$, $y_n = -n$, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无界, 但 $x_n + y_n = 0$, $\{x_n + y_n\}$ 有界, 故(D)不正确.

4. 下列各式中正确的是().

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

【答案】A

【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{1+t}} = e^0 = 1$, 应选(A). 这里应

注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} \neq -e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} \neq e.$$

5. 命题“① $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 点的某邻域内都无界, 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 点的该邻域内一定无界; ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \infty$; ③ $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x_0 点的某邻域内均有界, 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 的该邻域内一定有界; ④ $f(x)$, $g(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小量, 则 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是无穷小量.”中正确的是().

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

【答案】B

【解析】设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ 1/x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1/x, & x \text{ 为有理数, 且 } x \neq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则 $f(x)g(x) = 0$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)g(x) \rightarrow 0$. 但 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 及 $g(x)$ 都不是无穷小, 命题④不正确; 且本例中 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都无界, 但 $f(x)g(x) = 0$, 在与前相同的邻域内有界, 即命题①不正确.

6. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限().

(A) 等于2 (B) 等于0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, 当 $x \rightarrow 1$ 时函数没有极限, 也不是 ∞ , 故应选(D).

7. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时().

(A) $f(x)$ 是 x 等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小
(C) $f(x)$ 比 x 更高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小

【答案】B

【解析】因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{1} = \ln 2 + \ln 3,$$

且 $\ln 2 + \ln 3 \neq 1$, 所以应选(B).

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, ()是比其他三个更高阶的无穷小量.

(A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$ (D) $x - \tan x$

【答案】D

【解析】是于 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$,

故 x^2 , $1 - \cos x$, $\sqrt{1-x^2} - 1$ 是同阶无穷小, 可见应选(D).

9. 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^2$ 是比 $x^n f(x)$ 高阶的无穷小量, 而 $x^n f(x)$ 是比 $e^{\sin^2 x} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于().
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】A

【解析】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1$ 知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim -x^2$, 于是 $x^n f(x) \sim -x^{n+2}$.

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^2 = \ln[1 + (\cos x^2 - 1)] \sim \cos x^2 - 1 \sim -\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有: $2 < n+2 < 4$. 可见 $n=1$, 故应选(A).

10. 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().
- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零
- (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

【答案】D

【解析】用排除法.

令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

显然 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$

此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

故(A)和(C)都不正确.

为排除(B), 再令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$, 显然 $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 满足题设全部条件, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 故应选(D).

11. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^{\sin x} - 1) + b(x - \sin x)}{c \tan x + d(1 - \cos x)} = 0$, 则().

- (A) $a = b$, $b \neq 0$, c 、 d 不同时为 0 (B) $a \neq b$, $b = 0$, c 、 d 为任意常数
- (C) $c = 0$, $d \neq 0$, a 、 b 为任意常数 (D) $c \neq 0$, $d = 0$, a 、 b 为任意常数

【答案】A

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^{\sin x} - 1) + b(x - \sin x)}{c \tan x + d(1 - \cos x)} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{\sin x} \cos x + b(1 - \cos x)}{c \sec^2 x + d \sin x}$

当 $a \neq 0$ 时, 原式 $\neq 0$, 故选 A.

12. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有().
- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【答案】D

【解析】(A)、(B) 显然不对, 因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况, 不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

(C)也明显不对,因为“无穷小·无穷大”是未定型,极限可能存在也可能不存在.故应选(D).

13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

【答案】B

【解析】排除法. 由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$ 可能是无穷振荡的, $f'(x)$ 可能没有极限, 如 $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在. 故(A)不对; 例如 $f(x) = \sin x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0^+)$, 但 $f'(x) = \cos x \rightarrow 1 \neq 0$, 故(C)、(D)不对. 应选(B).

14. 下列函数在其定义域内连续的是().

- (A) $f(x) = \ln x + \sin x$ (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$
 (C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

【答案】A

【解析】由基本初等函数的连续性及其连续函数的四则运算法则知 $f(x) = \ln x + \sin x$ 在其定义域 $0 < x < +\infty$ 内连续, 故应选(A).

15. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ().

- (A) 在 $x=0$ 处左极限不存在 (B) 有跳跃间断点 $x=0$
 (C) 在 $x=0$ 处右极限不存在 (D) 有可去间断点 $x=0$

【答案】D

【解析】由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0) = 0$. 又因为 $f'(0)$ 存在, 所以

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

又因为 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0)$, 所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点. 故应选(D).

16. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为().

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x=1$
 (C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$

【答案】B

【解析】易计算得 $f(x) = \begin{cases} 1+x & |x| < 1 \\ \frac{1+x}{2} & |x| = 1, \text{ 讨论即知} \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

由题设得极限为

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1 \\ \frac{1+x}{2}, & |x| = 1 \text{ 可知 } x = -1, x = 1 \text{ 为函数的分段点, 作函数图形可知 } x = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

为 $f(x)$ 的间断点, $x = -1$ 为 $f(x)$ 的连续点, 因此应选 (B).

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 ().

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点
 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
 (C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点
 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【答案】D

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = a$,

从而, 当 $a=0=g(0)$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当 $a \neq 0$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, 即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选 (D).

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{6}{5}$

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x^2+3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{6}{5}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】e

【解析】

[解法一] 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)^x$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1, \end{aligned}$$

故原式 = e.

[解法二] 设 $u = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0$, 于是

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} (\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}}$$

而由洛必达法则, 得

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1,$$

故原式 = e.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$, 其中 n 为给定的自然数.

【答案】 $e^{\frac{n+1}{2}}$

【解析】此极限是 1^∞ 型未定式.

[解法一] 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right\}$
 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x} \right\}$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 因此由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

于是原式 = $e^{\frac{n+1}{2}}$.

[解法二] 由于 $\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$

又因

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx} \\ &= \frac{1}{n} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2} (n+1) \end{aligned}$$

故原式 = $e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1, -4

【解析】不难得出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \begin{cases} 0, & a \neq 1, \text{任何 } b \\ 1 - b, & a = 1, \text{任何 } b \end{cases}$$

从而, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则必须且只需 $a = 1$, $1 - b = 5$, 即 $a = 1$, $b = -4$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

$$\begin{aligned} [\text{解法一}] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin 4x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{解法二}] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{x^4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} + 1 \\ &= 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = \ln e^2 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = 2, \quad \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(2x)} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{f(u)} = 2$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}.$$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{ax^2 - x + 2} + x + 1}{\sqrt{x^2 - \cos x}} = 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】16

$$[\text{解析}] \text{原式令 } x = -t \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{at^2 + t + 2} - t + 1}{\sqrt{t^2 - \cos t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a + 1/t + 2/t^2} - 1 + 1/t}{\sqrt{1 - (\cos t)/t}} = \frac{\sqrt{a} - 1}{1} = 3$$

故 $a = 16$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left[\left(1 + \frac{x}{3}\right)^x - 1 \right]}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1 + x/3)} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + \frac{x}{3})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}.$$

9. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】2

【解析】原式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}\sqrt{n}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2.$

10. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】由 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}ax^2$, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 以及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a = 1,$$

可得 $a = -\frac{3}{2}.$

11. 设 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{1-2a}$

【解析】由于 $\ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^n = n \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]$, 利用等价无穷小代换, 有

$$\ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] \sim \frac{1}{n(1-2a)} (n \rightarrow \infty)$$

于是 原式 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}.$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $4e^{-1}$

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdots \frac{(n+n)}{n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \right] = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \right] \right\} = e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} = 4e^{-1}.$$