21世纪高等职业教育系列规划教材·公共基础类

高职高等数学

GAOZHI GAODENG SHUXUE

郑兆岳◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

GA UXUE

高 学

21世纪高等职业教育系列规划教材·公共基础类

组稿编辑 刘中飞 钟 蕾
责任编辑 刘中飞
装帧设计 张同龙 柳梦曦

ISBN 978-7-5664-0297-4

9 787566 402974 >

定价 37.80元

国家示范性高等职业教育精品规划教材

高等数学

主　审　李金丹

主　编　黄非难

副主编　陈少云　黄磊　骞龙江

参　编　韩小燕　夏冰　王欢　王家成　吴鹏
余家树　赵应　夏滨

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书注重数学思想、方法的培养，强调数学知识的应用. 根据高等职业技术学院数学教学的特点，降低了符号计算方面的要求，增加了数学实验内容，借助计算机这个平台，用 MATLAB 软件解决计算问题，从而满足（解决）实际问题计算的需要.

本书包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分及其应用、常微分方程、级数等 6 章内容，标有“*”号的内容可作为选学内容。附录包括基本初等函数的图像及其性质、常用积分公式、部分习题答案等.

本书可作为高职高专学生各专业的通用教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/黄非难主编. —北京：北京理工大学出版社，2011.6

ISBN 978－7－5640－3985－1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 108807 号

出版发行 /北京理工大学出版社
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京正合鼎业印刷技术有限公司
开　　本 /710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 /14.25
字　　数 /273 千字
版　　次 /2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷　　责任编辑 /陈莉华
印　　数 /1～4000 册　　责任校对 /周瑞红
定　　价 /29.00 元　　责任印制 /王美丽

前　言

本书作为高职高专数学的公共部分教材，是为了适应我国高等职业教育快速发展的要求和培养高技能人才的需要，适应高等职业教育大众化发展趋势的现状，在认真总结各兄弟院校高等数学课程教学改革经验的基础上编写而成.

本书有以下特点：

（1）恰当把握教学内容的深度和广度，适度保持数学自身的系统性与逻辑性，对课程的主要概念尽量从几何、数值方面直观体现，易于理解，在计算方面重视基本方法训练，不追求复杂的符号计算，以适应高职高专学生特点.

（2）把数学建模的思想贯穿各章，注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想上. 训练学生使用数学语言、数学概念的能力.

（3）本书以微分为核心内容，重点培养学生的函数概念、极限概念、微积分思想.

（4）在各章后增加一节数学实验内容，使用 MATLAB 软件解决相关内容的计算问题.

由于编者水平有限，时间也比较仓促，本书中难免有错误和疏漏之处，敬请读者批评指正.

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

微积分是关于运动和变化的数学.微积分研究的主要对象是连续函数,研究的基本方法是极限方法,微积分的许多概念都使用极限来阐述.本章讨论函数的极限与函数的连续性.

§1-1　函　　数

在某个变化过程中,往往出现多个变量,这些变量不是彼此孤立的,而是相互影响、相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化.如果这些影响是确定的,是依照某一规则的,则这些变量之间存在着函数关系.

例 1　自由落体运动中,物体下落距离 s 由下落时间 t 确定,其相互关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

当下落时间 t 变化时,下落距离 s 发生相应的变化(其中 g 为重力加速度,是常数).

例 2　长方形面积 z 由其长 x 与宽 y 确定,其相互关系为

$$z=xy.$$

当长方形长 x 或宽 y 变化时,面积 z 发生相应变化.

例 1 中,涉及两个变量间的依赖关系,只有一个自由变量 t,称为一元函数关系;例 2 中,涉及三个变量间的依赖关系,两个自由变量 x、y,称为二元函数关系.而函数的概念是许多类似问题的一个抽象归纳.本教材重点研究一元函数.

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 是一给定数集,如果对于集合 D 中的任何一个数 x,按照某一对应法则 f,y 都有唯一确定的值和它对应,则 y 称为定义在数集 D 上的 x 的一个**函数**,记作 $y=f(x)$,$x\in D$.x 称为**自变量**,数集 D 称为函数的**定义域**,数集 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数关系直观表示:$x\in D$,$x\xrightarrow{f}y$,如图 1-1 所示.

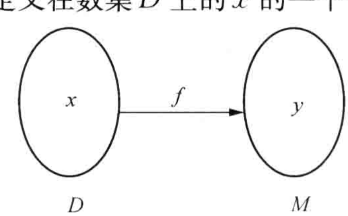

图 1-1

函数也常用记号 $g(x)$,$\varphi(x)$,$u(x)$,$F(x)$,$G(x)$

或 $y(x)$ 等表示.

2. 函数的两要素

函数的定义域 D,对应法则 f 是函数的两个基本要素.

定义域 D 是一个数集. 实际问题中函数的定义域由自变量的实际含义确定,而单纯计算式表示函数的定义域由其运算意义确定. 如函数 $y=\frac{1}{2}gx^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,$y=\sqrt{x}$ 定义域是$[0,+\infty)$,而如果函数 $y=\frac{1}{2}gx^2$ 是表示自由落体运动中的下落时间 x 与下落距离 y 的关系,则定义域为$[0,T]$,其中 T 为落地时间.

对应法则 f 是一种抽象记号,表示如何由一个 x 的值得到其对应的 y 值. 如 $f(x)=\sqrt{x}$,f 的含义就是开方运算.

仅当两个函数的定义域相等,且对应法则相同时,才称这两个函数是相同的函数. 如 $y=2x-3$ 与 $y=2t-3$ 是相同的函数,$y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 是同一函数,$y=x-1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 是不同的函数,$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不同的函数等.

数轴上一点及其附近范围,通常用邻域或去心邻域表示.

实数集合

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,如图 1-2 所示.

实数集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

称为以 x_0 为中心,半径为 δ 的去心邻域,记为 $U(\hat{x}_0,\delta)$. 它是在 x_0 的 δ 邻域内去掉 x_0 以后,其余的点组成的集合,如图 1-3 所示.

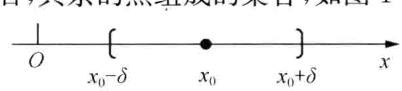

图 1-2

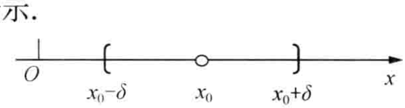

图 1-3

3. 函数的表示法

要反映一个确定函数,就是要表示清楚其定义域 D 和对应法则 f. 常用的有解析法、列表法、图像法.

(1) 解析法

解析法就是把两个变量的对应法则 f 用一个计算公式的形式来表示,这个公式叫做函数的解析表达式,简称解析式. 定义域通常可省略不写,如

$$f(x)=x^2-2x-3,\quad f(x)=2\ln(2x+1).$$

有时在定义域的不同子集上函数的解析表达式不同,如

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ 1-2x, & x<0\end{cases},$$

这样的函数称为分段函数.

解析法是表示函数的常用方法，其优点是便于分析函数的变化性质.

(2) 列表法

列表法就是把两个变量的对应关系用表格的形式一一列出. 如正弦函数用表1-1表示.

表 1-1

x	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
$y=\sin x$	0.017 45	0.034 90	0.052 34	0.069 76	0.087 16	0.104 52	0.121 87

列表法的优点是使用简单、方便，不足之处是有些函数不能全部用表格形式列出.

(3) 图像法

图像法就是用函数图像上点的坐标关系来表示两个变量之间的关系，如图1-4所示.

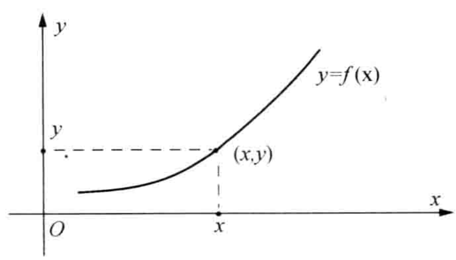

图 1-4

图像法的优点是直观，便于对函数性质进行直观的观察，不足之处是精确度不高.

例 3　已知 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & 0\leqslant x<2\\ x^2-2, & x\geqslant 2\end{cases}$，求 $f(1)$，$f(2)$，$f(\pi)$，$f(a-1)$.

解　因为 $1\in[0,2)$，所以 $f(1)=2\times 1+1=3$；

因为 $2\in[2,+\infty)$，所以 $f(2)=2^2-2=2$；

因为 $\pi\in[2,+\infty)$，所以 $f(\pi)=\pi^2-2$；

当 $a-1\in[0,2)$，即 $a\in[1,3)$ 时，$f(a-1)=2(a-1)+1=2a-1$.

当 $a-1\in[2,+\infty)$，即 $a\in[3,+\infty)$ 时，$f(a-1)=(a-1)^2-2$.

因此，$f(a-1)=\begin{cases}2a-1, & 1\leqslant a<3\\ (a-1)^2-2, & a\geqslant 3\end{cases}$.

4. 函数的四种特性

单调性、奇偶性、周期性、有界性是函数的四种基本特性.

图 1-5 反映了函数 $y = \sin x$ 的四种基本特性.

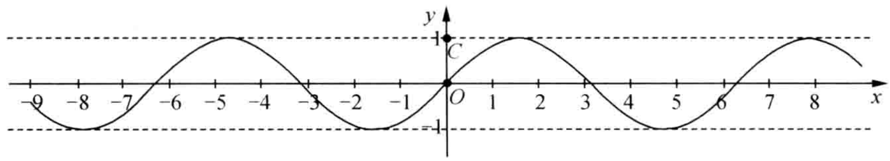

图 1-5

单调性：在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$内单调减少.

奇偶性：因为 $\sin(-x) = -\sin x$，所以函数 $y = \sin x$ 为奇函数.

周期性：因为对任意 $x \in R$，有 $\sin(2\pi + x) = \sin x$，所以 $y = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

有界性：因为对任意 $x \in R$，有 $|\sin x| \leqslant 1$，所以 $y = \sin x$ 为实数集R 上的有界函数.

二、基本初等函数

把已学过的下面五类函数统称为基本初等函数.

幂函数 $y = x^{\mu}$（μ 为任意实数).

指数函数 $y = a^{x}$（$a > 0$，且 $a \neq 1$).

对数函数 $y = \log_a x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

基本初等函数是构成其他函数的基本元素，应熟练掌握他们的图像和性质（见附录一).

例 4　指出函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域，奇偶性，单调性区间.

解　$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$.

因为 $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$，所以 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 是偶函数.

因为 $\mu = \dfrac{2}{3} > 0$，所以 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在$(0, +\infty)$ 内单调增加；并根据偶函数的性质，$y = x^{\frac{2}{3}}$ 可得在$(-\infty, 0)$ 内单调减少.

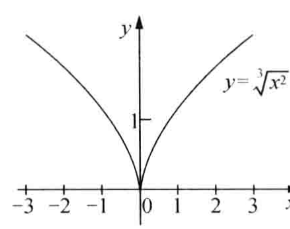

图 1-6

$y = x^{\frac{2}{3}}$ 的函数图像如图 1-6 所示.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

有时两个变量之间的联系是通过另一个变量而连接起来的.

定义 1.2　设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的函数值全部或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内，则变量 y 也是变量 x 的函数，这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

函数关系直观表示：$y\xleftarrow{f}u\xleftarrow{\varphi}x$.

可以由两个以上的多个函数复合成一个函数.

例 5　求下列函数的复合函数.

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；　　(2) $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=2x-1$.

解　(1) $y=u^2=\sin^2 x$.

(2) $y=\ln u=\ln\cos v=\ln\cos(2x-1)$.

例 6　分析下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin x^3$；(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；(3) $y=3^{-x}$；(4) $y=\ln^3(2x+1)$.

解　(1) $y=\sin u$，$u=x^3$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；

(3) $y=3^u$，$u=-x$；

(4) $y=u^3$，$u=\ln v$，$v=2x+1$.

分析一个函数的复合过程时，关键是弄清各种运算的次序. 应由外往内，逐层分解，每个层次都应该是简单函数.

2. 初等函数

定义 1.3　由基本初等函数和常函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所得到的函数称为初等函数.

如 $y=2\ln(x^2-1)+3\sin\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1+e^{-x}}{\sqrt{\cos 2x}}$ 都是初等函数.

对于一个初等函数，我们要清楚其表达式所反映的运算结构，如

$$y=2\ln(x^2-1)+3\sin\frac{1}{x}$$

的运算结构为两部分的和，可记为 $y=2u+3v$. 而 $u=\ln(x^2-1)$，$v=\sin\dfrac{1}{x}$ 都是复合运算.

思考：$y=x^x$ 是不是初等函数？

四、建立函数关系与数学建模

要想运用数学知识解决实际问题，通常要先把变量之间的函数关系式表示出

来，然后进行分析和计算. 建立函数关系的过程，也就是建立数学模型的过程.

例 7　把直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材(图 1-7)，列出矩形截面两条边之间的函数关系.

解　设矩形截面的一条边长为 x，另一条边长为 y. 由于矩形的对角线即为圆的直径 d，由勾股定理，得

$$x^2 + y^2 = d^2.$$

解出 y，得 $y = \pm\sqrt{d^2 - x^2}$.

因为只能取正数，所以 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$，其定义域为 $(0, d)$.

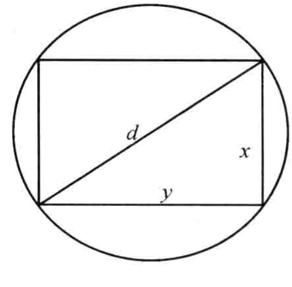

图 1-7

建立函数关系时，首先要弄清题意，分析问题中哪些是常量，哪些是变量. 然后根据问题所给的几何特性、物理规律或其他知识列出变量间的等量关系式，并进行化简，就能得到所要的函数关系式. 找出函数关系式后，一般还要根据题意写出函数的定义域.

所谓数学建模，简单地说就是运用数学知识去解决实际问题，即用数学语言、方法近似刻画实际问题. 这种刻画的数学表述就是一个数学模型，它可以是数学公式、图形或算法等. 然后在此数学模型的基础上求解、分析，以达到解决实际问题的目的.

数学建模面对的实际问题不是单纯的数学应用题，它们往往比较复杂，我们需要做出一些必要的简化假设，根据简化假设建立数学模型，然后对模型进行求解、分析，并检验是否与实际问题相吻合，否则重新假设，建立模型. 数学建模流程如图 1-8 所示.

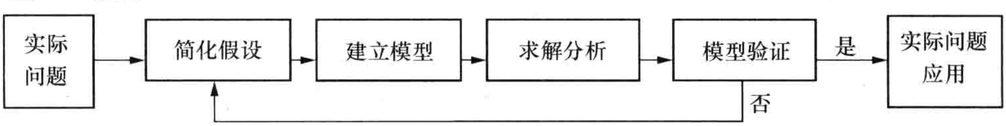

图 1-8

通过下面实例了解数学建模过程.

例 8　(旅馆定价问题) 一旅馆有 200 间房间，一个房间出租后的服务成本费为 10 元，没出租的服务成本费为 3 元，通过调查同档次旅馆的房间价格与出租率关系，数据如表 1-2 所示. 如何定价才能使利润最大?

表 1-2

价格 / (元 · 间$^{-1}$)	40	45	50	60
出租率 /%	100	85	70	50

分析　出租价格 x 影响出租率 r，r 影响利润 y. 建立 x，y 的函数关系，用函数

最值的方法对此问题求解. 其中关键是 x, r 的函数关系比较复杂,涉及许多因素,如环境因素、季节因素、个人心理因素等. 为了便于处理,针对 r 是 x 的减函数特点,用一个简单的一次线性递减函数近似代替.

假设　(1) 利润只考虑租房收入和服务成本.

(2) 当价格 $x \leqslant 40$ 时,房间可全部租出;价格 $x > 40$ 时,出租率 r 是 x 的一次函数,设为 $r = 1 - k(x-40)$.

(3) 为了方便分析,价格 x、出租的房间数 n 都可在实数上取值.

建立模型　由假设(2)、(3),当出租价格为 x 时,出租的房间数为

$$n = \begin{cases} 200, & 0 < x \leqslant 40 \\ 200[1-k(x-40)], & x > 40 \end{cases}.$$

由假设(1),利润函数为

$$y = f(x) = \begin{cases} 200(x-10), & 0 < x \leqslant 40 \\ -600k(x-40) + 200[1-k(x-40)](x-10), & x > 40 \end{cases}.$$

问题归结为求解 $\max f(x)$.

模型求解　根据表 1-2 数据运用曲线拟合可估计参数 $k = 0.025$.

根据二次函数的性质可得 $x = \dfrac{47k+1}{2k} = 43.5$ 时,$y_{\max} = 6\,061$. 即出租价格在 43 元左右,利润最大.

模型验证　重新收集数据检验.

模型应用　此模型结论对价格制定具有指导意义,但因为分析还比较粗糙,对实际问题还需进一步深入分析.

思考:r 与 x 的函数关系,除了一次函数,还可用什么函数近似代替?

习题 1-1

1. 指出下列函数的定义域,奇偶性,并画出它们的大致图像.

(1) $y = \sqrt{x}$;　(2) $y = x^3$;　(3) $y = x\sqrt{x}$;

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;　(5) $y = \sqrt[3]{x^2}$;　(6) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

2. 求函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x+1}$;　(2) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;　(3) $y = \sqrt{1-|x|}$;

(4) $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$;　(5) $y = \arcsin 2x$;　(6) $y = \sqrt{2^x - 1}$.

3. 已知 $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$,求 $f(0), f(2), f(-x), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f[f(x)]$.

4. 作函数 $y = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ \pi, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$ 的图像,并计算 $f(-2), f(0), f(4)$,

$f[f(-0.5)]$.

5. 把 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$； (2) $y=\sin u, u=2x$；

(3) $y=\mathrm{e}^u, u=3x-1$； (4) $y=\arccos u, u=\dfrac{x+a}{x+b}$；

(5) $y=\ln u, u=\cos v, v=2x+1$； (6) $y=u^2, u=1+\sin v, v=\dfrac{x}{2}$.

6. 指出下列各函数的复合过程.

(1) $y=(1+3x)^5$； (2) $y=\sqrt{3x-2}$； (3) $y=3^{\cos x}$；

(4) $y=\sin x^3$； (5) $y=\ln(1+\sqrt{x})$； (6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

(7) $y=\sin^2(2-x)$.

7. 有一边长为 a 的正方形，从它的四个角截去相等的小方块，然后折起各边做成一个无盖的小盒子. 求它的容积与截去的小方块边长之间的函数关系，并指明定义域.

8. 火车站行李收费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时，每千克收费 0.15 元；当行李超过 50 kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求运费 y 与重量 x 之间的函数关系式.

9. 某厂生产的玩具每台可卖 90 元，固定成本为 12 000 元，可变成本为每台 30 元，求：

(1) 至少销售多少台玩具，厂家才可以保本？

(2) 如果销售 150 台玩具，厂家赢利或亏损了多少？

(3) 希望获得 3 000 元利润，厂家需要销售多少台玩具？

§1-2 极限的概念

著名数学家希尔伯特(Hilbert)曾说：没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明.

微积分引入了无穷的概念. 在微积分产生初期，人们对无穷的认识还比较肤浅，产生了一些矛盾(悖论). 极限理论的建立，奠定了微积分的基础，解决了矛盾，才使微积分正式成为数学的一部分.

一、变量的变化方式

例 1 (芝诺悖论) 阿基里斯是《荷马史诗》中的善跑英雄，但奔跑中的阿基里斯永远也无法超过在他前面慢慢爬行的乌龟. 因为他必须首先到达乌龟的出发点，

而当他到达那一点时，乌龟又向前爬了．因而乌龟必定总是跑在前头．

分析产生悖论的原因是偷换概念，上述"乌龟总是跑在前头"与"阿基里斯永远也无法超过乌龟"是两个不同时间变化过程．

事实上，设阿基里斯速度为 10 m/s，乌龟速度为 1 m/s，乌龟在阿基里斯前 100 m，不难计算，追击时间

$$T = 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \cdots = 11.111\cdots = \frac{100}{9}(\mathrm{s}).$$

就时间 t 的变化而言，"乌龟总是跑在前头"时间的变化过程是时间 t 无限接近于 T 的过程，简单记为 $t \to T$，而"阿基里斯永远也无法超过乌龟"是指 t 无限制增大的过程，可记为 $t \to +\infty$. 如图 1-9 所示．

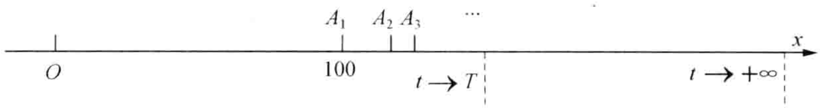

图 1-9

从数量上观察这两个变化过程：

$$t = \quad 10 \quad 11 \quad 11.1 \quad 11.11 \quad 11.111 \quad 11.1111\cdots \quad \to \quad T = \frac{100}{9}$$

$$t = \quad 10 \quad 100 \quad 1\,000 \quad 10\,000 \quad 100\,000 \quad 1\,000\,000\cdots \quad \to \quad +\infty$$

$t \to T$ 表示变量 t 变化时，t 与实数 T 的差距越来越小，且差距无限趋于 0.

$t \to +\infty$ 表示变量 t 变化时，t 的值无限增加，且能取到任意大的数值.

$t \to T$，$t \to +\infty$ 都是时间的一个无限变化过程．t 能无限接近于 $T(t \neq T)$，是因为实数的稠密性，即任意两个不同实数间仍有其他实数．

一般地，变量 x 可以有 7 种方式无限变化，如表 1-3 所示．

表 1-3

记号	无限变化方式	举　例
$x \to \infty$	x 的绝对值无限增大	$\pm 10\pi, \pm 100\pi, \pm 1\,000\pi, \pm 10\,000\pi, \cdots, \to \infty$
$x \to +\infty$	x 取正值无限增大	$1.1, 10.1, 100.1, 1\,000.1, \cdots, \to +\infty$
$x \to -\infty$	x 取负值而绝对值无限增大	$-1.1, -10.1, -100.1, -1\,000.1, \cdots, \to -\infty$
$n \to \infty$	x 取自然数，且无限增大	$1, 222, 33\,333, 4\,444\,444, \cdots, \to \infty$
$x \to x_0$	x 无限接近 x_0	$3.1, 2.97, 3.01, 2.997, 3.001, 2.999\,7, \cdots, \to 3$
$x \to x_0^+$	x 大于 x_0 且无限接近 x_0	$3.1, 3.001, 3.000\,01, 3.000\,000\,1, \cdots, \to 3^+$
$x \to x_0^-$	x 小于 x_0 且无限接近 x_0	$2.9, 2.999, 2.999\,99, 2.999\,999\,9, \cdots, \to 3^-$