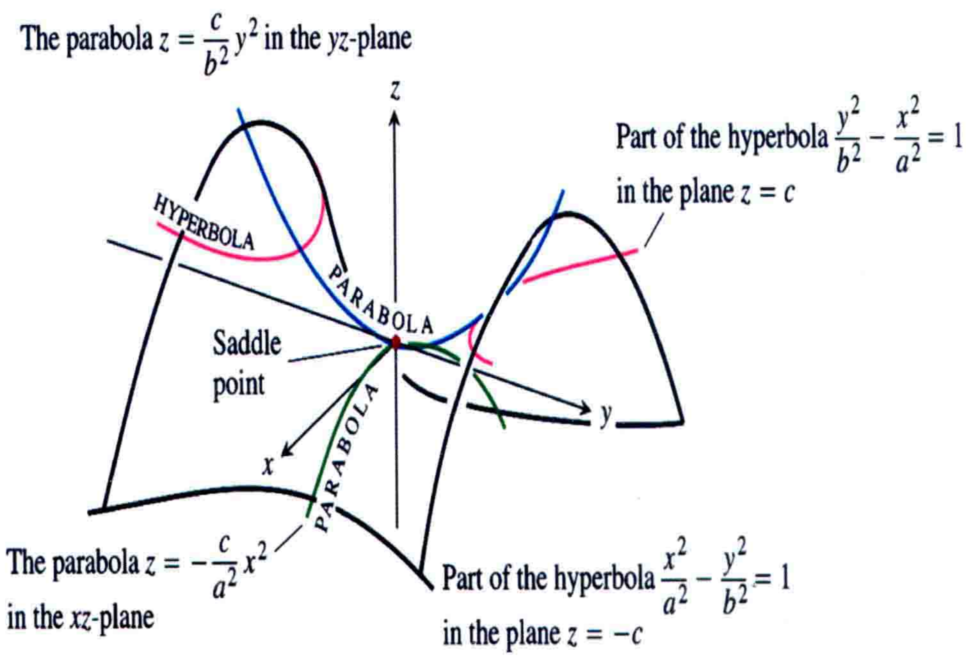
教育部《数学与应用数学》专业综合改革试点项目资助

解析几何

Analytic Geometry

石勇国　彭家寅　主 编



科 学 出 版 社

解　析　几　何

石勇国　彭家寅　主编
赵思林　钟纯真　刘程熙　编

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

全书共分 4 章，第 1 章作为解析几何的主要基础，引入向量，建立坐标系，介绍了向量运算的定义、性质、计算以及应用. 第 2 章建立了空间直线和平面的方程；讨论了点、线、面位置关系的判定；定义并计算了点、线、面的相关距离以及线、面之间的相关夹角；展示了平面束在求直线、平面方程上的应用. 第 3 章利用轨迹建立了柱面、锥面、旋转曲面的方程；给出了二次曲面和直纹面的方程，描述了它们的性质、作图、手工制作的方法. 第 4 章利用坐标变换和实对称矩阵的性质，对二次曲面进行了完整的分类.

本书可作为高等院校数学、物理和教育等专业解析几何课程的教材，也可作为科技工作者和数学爱好者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

解析几何/石勇国，彭家寅主编. —北京：科学出版社，2014.5
ISBN 978-7-03-040012-3

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①石… ②彭… Ⅲ. ①解析几何 Ⅳ. ①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 041698 号

责任编辑：昌 盛 周金权／责任校对：朱光兰
责任印制：阎 磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 5 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2014 年 5 月第一次印刷 印张：9
字数：178 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

解析几何不仅是数学专业三门基础课程之一, 也是物理、计算机、信息工程、教育科学等专业的基础. 内江师范学院数学与信息科学学院解析几何教学小组按照高等教育“厚基础、宽口径”的人才培养思路, 依据“以发展为中心, 教、学、做统一”的育人模式, 积极探索适合解析几何的教学模式, 在教学观念更新、教学内容整合、教学方法改革、实践教学改革、人才培养成效等方面均取得了显著成效. 2009 年, 我校解析几何课程被四川省教育厅批准立项为省级精品课程. 因此, 在教学改革实践的基础上, 我们编写了这本教材.

本教材的主线是: 以构建坐标系, 定义点和向量的坐标为基点, 通过向量代数, 建立了直线、平面、常见曲面等图形的方程; 然后反过来, 研究方程所代表的几何图形的特征, 包括对称性、有界性、渐近性质、直纹性等.

与其他解析几何教材相比, 本教材主要有下面特色:

1. **衔接性**. 为了知识体系的完整性, 第 1 章对中学数学中已经学习的向量的定义、线性运算和内积等相关知识作了简要介绍后, 重点突出了在中学未给出的证明, 如向量运算规律的证明. 在中学数学仅作为选修系列的极坐标与参数方程, 在数学分析、微分方程等课程中有重要的地位, 因此, 在阅读材料中专门介绍了极坐标与方程. 由于后续课程有高等几何、射影几何, 因此本教材没有重复相关内容, 而是在阅读材料之中介绍有关内容的联系和区别. 此外, 在附录中简单介绍了必备的线性代数的知识.

2. **简洁性**. 第 3 章常见曲面中, 柱面、锥面和旋转曲面这三类曲面建立方程的方法类似, 因此, 以案例的形式简单介绍了柱面和锥面方程求法, 而对旋转曲面则给出了建立方程的一般方法. 在证明曲面是直纹面时, 采用两种不同的方法证明, 避免相同方法的简单重复. 第 4 章详细介绍了二次曲面的分类, 对与之平行的“二次曲线的分类”, 仅将结果作为附录列出. 对于平行定理的证明, 也作了简化处理, 类似的证明均作为课堂练习内容, 以鼓励学生大胆尝试, 为他们提供“再创造”的机会.

3. **探究性**. 多维度地选取有代表性综合性的案例, 如竞赛题、考研题, 以多种

方法剖析求解, 不但可以满足不同层次学生的学习需求, 而且可以开阔学生视野, 在比较、鉴赏的过程中, 启发孕育他们个性化的思维. 每章所提出思考题, 如代数方程 (组) 的参数化、曲面的自交线和交线、直纹面的判定等, 供学有余力的学生思考和探究, 可以培养他们的问题意识、研究意识与创新意识.

4. **实践性**. 详细介绍了几个曲面围成立体图形简图的一般画法, 以及几何模型的制作流程, 这是本教材的一个创新点. 以马鞍面和螺旋面的制作为范例, 指导学生模仿学习和创新, 培养他们的兴趣和动手实践的能力, 在教学中, 可组织学生进行几何模型制作展览活动.

本书由内江师范学院石勇国博士、彭家寅教授担任主编, 赵思林教授、钟纯真副教授、刘程熙副教授参与编写, 是在集体讨论的基础上编写而成. 编写分工如下: 第 1 章由钟纯真编写, 第 2 章由刘程熙编写, 第 3、4 章由石勇国编写, 阅读材料由赵思林编写, 全书由石勇国统稿与修改, 由彭家寅定稿.

在编写过程中, 感谢内江师范学院数学与信息科学学院曾意副院长的大力支持和帮助; 感谢王新民、邓树钞、龚小兵、王彬、黄蓝蓝给予热情帮助和提出宝贵修改意见; 感谢王青、张培、刘馨宇、王检利等的仔细阅读和提出的建议.

本书获得了教育部数学与应用数学专业综合改革 (ZG0464)、四川省数学与应用数学专业综合改革 (01249)、四川省解析几何精品开放课程和内江师范学院 2012 年校级精品资源共享课的部分资助, 特此说明.

编　者

2013 年 11 月

符号说明

0	数字 0
$\boldsymbol{0}$	零向量
$\sim$	三角形相似
$\Leftrightarrow$	当且仅当
$\exists!$	存在唯一
$\exists$	存在
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}^+$	正实数集
$\mathbf{N}$	自然数集
$//$	平行
$\not\parallel$	不平行
$\in$	属于
$\forall$	任意的
$:=$	规定为

目　　录

第1章

向量与坐标

解析几何 (analytic geometry) 是用坐标系、代数、分析方法来研究的几何, 又称为坐标几何 (coordinate geometry), 因为几何对象在某坐标系下用点的 n 元组来描述. 通常, 使用二维 ($n=2$) 或三维 ($n=3$) 的直角坐标系来研究平面、直线、曲面和曲线. 1637 年, 笛卡儿在《方法论》的附录“几何”中提出了解析几何的基本方法. 解析几何的方法不同于欧几里得几何把特定的几何概念作为基点, 在公理和定理的基础上用演绎推理得出事实的综合方法. 解析几何使得原先两个独立的数学分支——几何和代数联系到一起, 使得代数的很多对象有了直观的几何解释. 同时, 利用代数和分析的知识也很方便地解决几何上的问题. 解析几何广泛应用于物理和工程中, 是当今包括代数几何, 微分几何, 离散与计算几何学等众多领域的基础.

在中学数学中, 已经涉及了向量的概念及向量的加减法的运算法则, 本章给出了数与向量的乘法运算法则的详细证明; 利用线性无关的向量组建立了仿射坐标系、定义了向量的坐标; 利用向量的坐标计算力做的功 (向量的内积)、力矩 (向量的外积) 和平行六面体的体积 (向量的混合积); 给出了这些向量运算的定义、运算规律和坐标计算公式, 同时展示了向量运算在共点、共线、共面、平行、垂直、恒等式以及一些关于三角形经典定理证明上的应用.

1.1 向量的定义、加法及数乘

1.1.1 向量的定义

为了表示力学中的力、速度等这些既有大小, 又有方向的量, 我们引入了向量, 并且将代数运算引到向量中去, 来研究图形性质. 这种方法具有几何直观性, 并且

它在物理等学科中有重要的应用. 此外, 向量的概念及其运算也为线性代数中深入理解向量空间提供了直观的几何背景.

下面回顾向量的相关定义.

定义 1.1.1　既有大小, 又有方向的量称为**向量**或**矢量**(vector). 用加粗的符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量的**长度**(或**模**), 记为 $|\boldsymbol{a}|$.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示, 从始点 A 到终点 B 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向 (图 1.1), 有向线段的长度 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小.

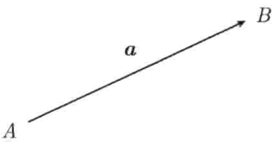


图 1.1

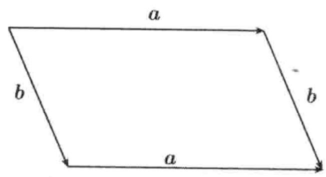


图 1.2

长度为零的向量称为**零向量**, 记为 $\boldsymbol{0}$. 长度为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$.

如果一个向量 $\boldsymbol{a}$ 能够由另一个向量 $\boldsymbol{b}$ 经平行移动得到, 则称这两个向量**相等**(图 1.2), 显然它们方向相同大小相等, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 大小相等, 方向相反的两个向量互为反向量 (或负向量), 向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记为 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 通过平行移动可移到同一条直线上, 则称这两个向量**共线**或者**平行**, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 平行于同一平面的一组向量称为**共面**的向量组. 特别地, 零向量与任意向量共线; 共线的向量组一定共面.

讨论　不同起点的任意两向量是否共面? (提示: 所指向量为自由向量)

1.1.2　向量的加减法

依据物理学中力、速度、位移的合成方法定义向量加法 (addition).

定义 1.1.2　对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.3), 即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

由此公式表示的向量加法规则称为**三角形法则**.

从同一始点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 再以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 (图 1.4), 这种表示和向量的方法称为向量的**平行四边形法则** (parallelogram rule). 在向量相等的意义下, “平行四边形法则”和 “三角形法则” 等价.

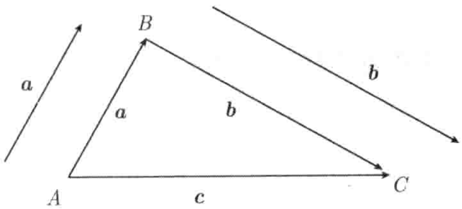


图 1.3

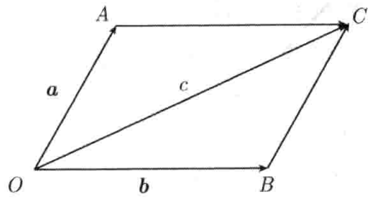


图 1.4

向量加法运算有以下性质.

定理 1.1.1 对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 有

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(2) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律);

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ (三角不等式, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向);

(5′) $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|$.

证 (1) 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{0}=\overrightarrow{BB}$ 可得;

(2) 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$ 可得;

(3) 利用平行四边形法则可得;

(4) 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$ 可得;

(5) 直接由三角形法则可得;

(5′) 可以重复运用 (5) 可得.

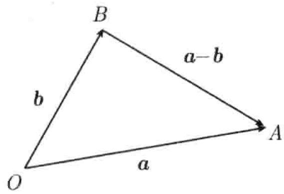


图 1.5

作为加法的逆运算, 减法 (subtraction) 定义如下.

定义 1.1.3 向量的减法: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

减法的几何意义如图 1.5 所示, 即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

练习 证明 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$. (提示: 利用字母规律, 多边形法则)

1.1.3 数乘

定义 1.1.4 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量. 它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$, 它的方向为当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向; 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向; 当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时, 则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 我们把这种运算叫做实数和向量的乘法, 简称**数乘**(scalar multiplication).

已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 和与它同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}^0$, 所以 $\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|^{-1}\,\boldsymbol{a}$, 这称为把向量 $\boldsymbol{a}$ **单位化**.

根据定义若向量 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或向量 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

讨论 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 则一定存在实数 μ 使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$ 成立吗? (提示: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)

数乘有下面性质.

定理 1.1.2　对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意的实数 λ, μ, 有

(1) $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(2) $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(3) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(4) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(5) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证　(1)、(2) 和 (3) 直接由定义 1.1.4 可得.

(4) 参见 [1, pp.3-4] 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 λ, μ 中有一个为零时, 则 (4) 显然成立. 下面设 $\lambda\mu\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

情形 1 若 $\lambda\mu>0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 因此有

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)\,|\boldsymbol{a}|,$$

又

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu|\,|\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)\,|\boldsymbol{a}|,$$

因此 $|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$, 故 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

情形 2 若 $\lambda\mu<0$, 不妨设 $\lambda>0$, $\mu<0$.

1° 若 $\lambda+\mu=0$, 则 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}&=\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}\\&=(\lambda\boldsymbol{a})+(-1)(\lambda\boldsymbol{a})\\&=(\lambda\boldsymbol{a})-(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

故由 (2), 得 (4) 成立.

2° 若 $\lambda+\mu>0$, 则由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\,\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a},$$

即得

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a})\\&=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

从而有 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

3° 若 $\lambda+\mu<0$, 类似于 2° 可得式 (4), 留作练习.

(5) 若 $\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$, 则 (5) 显然成立. 下面设 $\lambda\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

情形 1 若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 平行, 则存在实数 μ 使 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$, 于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}) = \lambda\left[(1+\mu)\boldsymbol{a}\right] \\ &= [\lambda(1+\mu)]\,\boldsymbol{a} = [\lambda+\lambda\mu]\,\boldsymbol{a} \\ &= \lambda\boldsymbol{a} + (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

情形 2 若 $\boldsymbol{a} \not\parallel \boldsymbol{b}$, 那么当 $\lambda > 0$ 时, 如图 1.6 所示, 分别作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, 于是 $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 作 $\overrightarrow{OC} = \lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CD} = \lambda\boldsymbol{b}$, 则 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, 从而 D 在直线 OB 上. 于是

$$\overrightarrow{OD} = \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda < 0$ 时, 类似讨论.

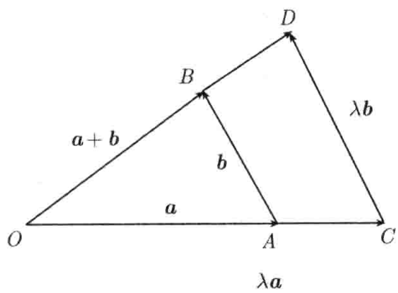


图 1.6

例 1.1.1 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, 证明:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \boldsymbol{0}.$$

证 如图 1.7 所示, 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} &= \lambda\overrightarrow{OA_2}, \\ \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} &= \lambda\overrightarrow{OA_3}, \\ &\cdots\cdots \\ \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_1} &= \lambda\overrightarrow{OA_n}, \\ \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_2} &= \lambda\overrightarrow{OA_1},\end{aligned}$$

所以 $2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}) = \lambda(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n})$, 因此

$$(2-\lambda)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}) = \boldsymbol{0}.$$

显然 $\lambda \neq 2$, 所以结论成立.

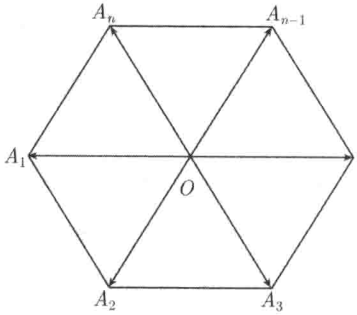


图 1.7

习　　题

1. 在例 1.1.1 的条件下, 设 P 是任意点, 证明: $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}$.

2. 利用数乘运算规律解下列各题.

(1) 化简 $(u-v)\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(u+v)\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(2) 从向量方程组 $\begin{cases}3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\ 2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 解出向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

3. 要使下列各式成立, 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

4. 请补充完善定理 1.1.2 中 (4) 的证明.

1.2　向量组的线性相关性

向量的加法和数乘的运算统称为向量的**线性运算**.

定义 1.2.1　由向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和实数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所组成的向量 $\boldsymbol{a}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{a}_i$ 称为向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个**线性组合** (linear combination). 此时也称向量 $\boldsymbol{a}$ 可由向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$**线性表示**.

定义 1.2.2　如果对于向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$, 存在不全为 0 的实数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$**线性相关**; 否则, 称向量组**线性无关** (linear independence).

1.2.1 线性相关与共线、共面

下面用向量组线性相关性给出向量共线、共面的充要条件.

定理 1.2.1 (1) 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow \exists!\lambda\in\mathbf{R}$ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$;

(2) 两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关;

(3) 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线, 则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面 $\Leftrightarrow \exists!\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$;

(4) 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 (不共面)$\Leftrightarrow \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关 (线性无关).

证 (1) **必要性** 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 若 $\boldsymbol{b}$ 为零向量, 则 $\lambda=0$; 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 且与 $\boldsymbol{a}$ 同向, 则 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 反向取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 假设另有 λ' 使 $\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{a}$, 则

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda'\boldsymbol{a}=(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

而 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 得 $\lambda=\lambda'$, 唯一性得证.

充分性 直接由数乘的定义得到.

(2) **必要性** 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量, 不妨设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则对 $k_1=1$, $k_2=0$, 有

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=1\cdot\boldsymbol{0}+0\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

因而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不为 $\boldsymbol{0}$, 由 (1) 知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

充分性 设存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 使 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $k_1\neq 0$, 则有 $\boldsymbol{a}=(-k_1^{-1}k_2)\boldsymbol{b}$, 故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

(3) **必要性** 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线, 取一点 O, 如图 1.8 所示, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 过 C 作一直线与 OB 平行, 与 OA 所在直线交于 M, 因为

$$\overrightarrow{OM}//\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{MC}//\boldsymbol{b},$$

所以分别存在实数 λ,μ 使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{MC}=\mu\boldsymbol{b}$, 于是

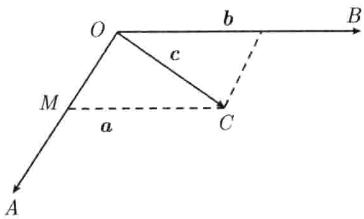


图 1.8

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

假如另有 λ',μ' 使 $\boldsymbol{c}=\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b}$, 则 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})-(\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b})=(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}+(\mu-\mu')\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线, 所以必有

$$\lambda-\lambda'=0,\quad \mu-\mu'=0,$$

于是 $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$, 唯一性得证.

充分性 由平行四边形法则, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(4) **必要性** 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 由 (1) 知, 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 使 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 取 $k_3=0$, 则存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关.

若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 由 (3) 知 $\boldsymbol{c}$ 可由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关.

充分性 若存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $k_3\neq 0$, 则 $\boldsymbol{c}$ 可由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性表示, 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线, 则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共线, 因此共面; 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 由平行四边形法则, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

定理 1.2.2　设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 则对空间中任一向量 $\boldsymbol{d}$ 均 $\exists!$ 数组 (λ, μ, γ), 使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.$$

证　如图 1.9 所示, 取一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$. 过 D 作一直线与 OC 平行, 且与 OA 和 OB 所确定的平面交于 M, 过 M 作一直线与 OB 平行, 且与 OA 交于 N. 因为

$$\overrightarrow{ON}//\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{NM}//\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{MD}//\boldsymbol{c},$$

所以分别存在实数 λ, μ, γ 使得

$$\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{NM}=\mu\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{MD}=\gamma\boldsymbol{c}.$$

从而 $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MD}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$.

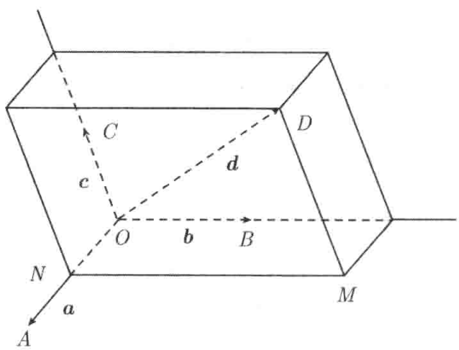


图 1.9

唯一性　留给读者.

推论 1.2.1　空间中的任意四个向量线性相关.

1.2.2　应用和例子

例 1.2.1　设 A, B 是不同的两点, 则点 P 在直线 AB 上 $\Leftrightarrow$ $\exists!$ 一对实数 λ, μ,