

其实做数学题就像谈恋爱
——越得不到越对她难以忘怀。
一道写给爱情的数学公式，
一封名叫数学公式的情书。



数学女孩

数学ガール

[日] 结城浩◎著
朱一飞◎译

ARCTIME
时代出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

数学女孩

[日] 结城浩◎著
朱一飞◎译

数学ガール



时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

数学女孩 / (日) 结城浩著; 朱一飞译. —合肥: 安徽教育出版社. 2009. 9

ISBN 978-7-5336-5357-6

I. 数… II. ①结… ②朱… III. 数学—青少年读物
IV. 01 49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2009) 第158084号

责任编辑: 王 骏

特约编辑: 陈瑞侠 牛晓婧

封面设计: 引文馆·李道娥

出版发行: 安徽教育出版社

电 话: (0551) 3683011

地 址: 合肥市繁华大道西路398号

邮 编: 230601

网 址: <http://www.ahep.com.cn>

经 销: 新华书店

印 刷: 北京兆成印刷有限责任公司

开 本: 32

印 张: 8.875

字 数: 140千字

版 次: 2009年9月第1版 2009年9月第1次印刷

定 价: 22.00元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印制单位联系调换

电话: (010) 82605959

SUGAKU GIRL © 2007 Hiroshi Yuki

Original Japanese edition published by SOFTBANK Creative Corp.

Simplified Chinese Character rights arranged with SOFTBANK Creative Corp.,
through Owls Agency Inc. and Beijing SMSQ Culture Communications Co.,Ltd.

著作权合同登记号：皖图字1209711

序 言

光让事情留在记忆里总不行啊，
需要回忆出来大家共享的。

——小林秀雄

我忘不了。

我怎么也忘不了高中时期因数学而结缘的她们。

她们是用一流的解法打动我的才女——美露嘉；认真向我发问的活力少女——铁户罗。

回想起那时的岁月，我脑海中顿时浮现出一个个计算公式，一个个新鲜的想法。这些数学公式不会随着时间的推移而显得落伍或陈旧，而是向我展现了欧几里德、高斯、欧拉等数学家们熠熠生辉的才思。

——数学穿越时空。

我一边想着那些计算公式，一边体会着古时候数学家们体验到的那份感动。即便是几百年前就已经被证明的也没关系，现在我一边追溯理论一边埋头苦思的东西一定是自己的东西。

——通过数学穿越时空。

拨开层层密林，找出藏宝。数学就是这样一种令人兴奋的寻宝游戏，比拼智力，寻找最牛的解法；数学就是这样一场激烈的战斗。

那时，我开始使用名叫数学的武器。但是，那种武器往往过于巨大，

很多时候不能灵活操控。这种感觉正如我很难操控自己年轻时的青涩、很难控制对她们的思念一样。

光让事情留在记忆里总不行啊，需要回忆出来大家共享的。

那我就从高一的春天开始讲起吧。

目 录

序 言	001
第1章 数列和数学模型	
1.1 樱花树下	001
1.2 自己家	004
1.3 数列智力题没有正确答案	006
第2章 一封名叫数学公式的情书	
2.1 在校门口	011
2.2 心算智力题	012
2.3 信	013
2.4 放学后	014
2.5 阶梯教室	014
2.5.1 质数的定义	016
2.5.2 绝对值的定义	019
2.6 回家路上	021
2.7 自己家	023
2.8 美露嘉的解答	026
2.9 图书馆	027
2.9.1 方程式和恒等式	028
2.9.2 积的形式与和的形式	031
2.10 在数学公式另一头的人到底是谁?	034

第 3 章 ω 的华尔兹

3.1 图书馆	037
3.2 振动和旋转	039
3.3 ω	045

第 4 章 斐波那契数列和母函数

4.1 图书馆	051
4.1.1 找规律	052
4.1.2 等比数列的和	053
4.1.3 向无限级数进军	054
4.1.4 向母函数进军	054
4.2 抓住斐波那契数列的要害	056
4.2.1 斐波那契数列	056
4.2.2 斐波那契数列的母函数	058
4.2.3 封闭表达式	059
4.2.4 用无限级数来表示	060
4.2.5 解决	062
4.3 回顾	065

第 5 章 相加相乘的平均关系

5.1 在“神乐”	067
5.2 满是疑问	069
5.3 不等式	071
5.4 再进一步看看	078
5.5 关于学习	081

第 6 章 在美露嘉身旁

6.1	微分	087
6.2	差分	091
6.3	微分和差分	093
6.3.1	一次函数 x	093
6.3.2	二次函数 x^2	094
6.3.3	三次函数 x^3	096
6.3.4	指数函数 e^x	097
6.4	两个世界中的来回旅行	099

第 7 章 卷积

7.1	图书馆	101
7.1.1	美露嘉	101
7.1.2	铁户罗	104
7.1.3	推导公式	105
7.2	在回家路上进行的一般化计算	107
7.3	在名为“豆”的咖啡店谈二项式定理	109
7.4	在自己家里解母函数	116
7.5	图书馆	121
7.5.1	美露嘉的解	121
7.5.2	研究母函数	126
7.5.3	围巾	128
7.5.4	最后的要塞	129
7.5.5	攻陷	131
7.5.6	半径是 0 的圆	134
	我的笔记	136

第 8 章 调和数

8.1 寻宝	137
8.1.1 铁户罗	137
8.1.2 美露嘉	139
8.2 图书馆里的对话	140
8.2.1 部分和与无限级数	140
8.2.2 从理所当然的地方开始	143
8.2.3 命题	144
8.2.4 所有的	147
8.2.5 存在	149
8.3 螺旋式楼梯的音乐教室	153
8.4 令人扫兴的 zeta 函数	154
8.5 过高评价	155
8.6 在教室中研究调和函数	161
8.7 两个世界、四种演算	164
8.8 已知的钥匙、未知的门	169
8.9 如果世界上只有两个质数	172
8.9.1 卷积	172
8.9.2 收敛的等比数列	173
8.9.3 质因数分解的唯一性	174
8.9.4 质数无限性的证明	175
8.10 天象仪	179
我的笔记	182

第 9 章 泰勒展开和巴塞尔问题

9.1 图书馆	183
9.1.1 两张卡片	183

9.1.2	无限次的多项式	185
9.2	自学	188
9.3	宾斯	189
9.3.1	微分的规则	189
9.3.2	更进一步微分	192
9.3.3	$\sin x$ 的泰勒展开	194
9.3.4	极限函数的图像	197
9.4	自己家	200
9.5	代数学的基本定理	202
9.6	图书馆	207
9.6.1	铁户罗的尝试	207
9.6.2	要到达哪里?	209
9.6.3	向无限挑战	216

第 10 章 分割数

10.1	图书馆	221
10.1.1	分割数	221
10.1.2	举例	223
10.2	回家路上	228
10.2.1	斐波那契签名	228
10.2.2	分组	230
10.3	“豆”咖啡店	231
10.4	自己家	233
10.5	音乐教室	237
10.5.1	我的发言 (分割数的母函数)	238
10.5.2	美露嘉提出的数列的上限	243
10.5.3	铁户罗的发言	248
10.6	教室	252

10.7 寻找更好的上限之旅	254
10.7.1 以分析母函数为出发点	254
10.7.2 “开始的转角”积变形为和	255
10.7.3 “东之森林”泰勒展开	256
10.7.4 “西之丘陵”调和数	260
10.7.5 旅行结束	261
10.7.6 铁户罗的回顾	264
10.8 明天见	265
尾 声	267
后 记	271

第1章 数列和数学模型

1, 2, 3。3是1。

1, 2, 3。3是2。

——大岛弓子《棉之国星》

1.1 樱花树下

那是高一的春天。

开学典礼那天春光明媚。

“美丽的樱花开了……大家在新学期新起点之际……在这有着传统的校舍里……努力学习、努力锻炼……少年易老学难成……”

校长那冗长的致谢词简直引人入睡，我借着扶正眼镜的机会强忍住了呵欠。

开学典礼结束后，我在回教室的途中悄悄地溜出了校舍，独自一人漫步在校内的樱树林间。周围连个人影都没有。

我现在15岁。15岁、16岁、17岁……毕业的时候我将18岁了。有一个4次方的数字和一个质数。

$$15=3\times 5$$

$$16=2\times 2\times 2\times 2=2^4$$

17 是一个质数

$$18=2\times 3\times 3=2\times 3^2$$

现在教室里同学们一定正进行着自我介绍。我不擅长自我介绍，究竟该说说自己的什么呢？

“我喜欢数学，兴趣是讨论计算公式。请多多关照。”

我想象了下又停住了。

算了，管他呢。静静地上课，在谁都不会去的图书室学习展开数学公式，就这样就像中学时一样度过高中3年的时光吧。

映入眼帘的是一棵硕大的樱花树。

那里站着—个少女，她抬头仰望着那棵樱花树。

我想：她是位新生吧，大概和我—样也是溜出来的。

我也抬起头望着那棵樱花树。模模糊糊的花色覆盖了天空。

刮起一阵风，飘舞着的樱花花瓣将少女裹住。

少女也看到了我。

她身材高挑，长发乌黑亮丽，嘴巴紧闭着，一副认真的表情。脸上架着副金丝眼镜。

她清楚地念着：“1，1，2，3。”

念完这4个数字之后，少女便不出声了，用手指着我，好像在说：“喂，你，请回答接下去的数字。”

我指着自已：“要我回答？”

她没有说话，而是点了点头。食指仍然指向我。

到底是什么呢？在樱花树丛中好好地散着步，为什么非要做什么猜数字的游戏呢？对了，刚才她说的是什么呢？

我回想她刚才的题目：“1，1，2，3。”

啊，原来如此。我知道了。

“1，1，2，3的后面接着的数字是5，接下来是8，再接下来是13，然后是21，然后再是……”我开始滔滔不绝地回答。

她向我伸出手掌，示意我不要说了。

接着，她给我出了另外一道题，又是4个数字。

1 4 27 256

她又指向我。

这是在考我吗？

“1, 4, 27, 256。”

我突然一下子找到了规律。

我回答说：“1, 4, 27, 256, 接下来是3125吧，再接下来是……心算是不行了。”

她听到我说“心算是不行了”之后神色显得有些不满，她摇了摇头，便告诉了我答案。

“1, 4, 27, 256, 3125, 46656, …”她的声音很响亮。

接着，她闭上眼，头微微朝上抬起，好似正在仰望樱花树。食指朝着天空飞快地写着些什么。

唯一从这个女孩口中说出的只是些数字，她漫不经心地将那些数字排列起来，略做些手势。但是我的目光却一直盯着这个与众不同的女孩。她到底想干什么？

她朝我这里看了看。

6 15 35 77

又是4个数字。

“6, 15, 35, 77。”

我心想，这题好难啊。我开动脑筋拼命想，6和15是3的倍数，但是35却不同了，35和77是7的倍数。如果可以在纸上写的话应该马上能解出来。

我瞟了她一眼，樱花树下的女孩还笔挺地站在那里，很认真地看着我，甚至都不掸一下飘落到头发上的樱花花瓣。那副认真的模样仿佛是在考试一样。

“啊，我知道了。”

我刚一说，她顿时变得神采奕奕，微微一笑。我第一次看到她笑，便情不自禁地大声回答：

“6, 15, 35, 77 的后面是 133。”

她摇了摇头，长发飘动，花瓣也随之飘落。她的表情仿佛在说：“哎呀呀，真可惜。”

“计算错误！”她的手指碰了下眼镜。

计算错误？啊，真的算错了。11 乘以 13 应该是 143，而不是 133。

她又继续出了下一题。

6 2 8 2 10 18

这次是 6 个数字。我考虑了一下，最后一个 18 最令人头疼，如果是 2 就好了，现在的数字看上去乱七八糟，没有规则。啊，不对，这些都是偶数。……我知道了！

“接下来是 4, 12, 10, 6, …这道题真伤脑子。”我说道。

“是吗？但你不是解出来了嘛。”

她装模作样地说着，走向我伸出手。她的手指又细又长。

我心想：难道她要和我握手吗？

于是，我莫名其妙地握住了她的手。她的手又柔软又温暖。

“我叫美露嘉，请多多关照。”

这就是我和美露嘉的邂逅。

1.2 自己家

夜晚啊。

我喜欢夜晚。家人平静地睡着后，我就可以有大量自由的时间，拥有一个谁都无法进入的世界。于是，我便自己一个人过那段时间，打开书，探索世界。我思考数学问题，闯入那深邃的密密层林。在那里，我发现了

珍稀动物、清澈得令人吃惊的湖，还有需要抬头仰望的大树。令我意想不到的，还遇到了美丽的花朵。

她就是美露嘉小姐。

第一次见面就和我进行那样的对话，她真是奇怪的女孩。她一定非常喜欢数学吧。她连开场白都没说，竟然就直接给我出数列的脑筋急转弯题，简直像考试一样。我是不是合格了呢？我握了她的手，那柔软的手，飘着淡淡的清香，真的是很淡的清香——女孩独特的香味。

女孩啊。

我摘下眼镜，把它搁到书桌上，闭上眼睛，开始回想我和美露嘉之间的对话。

一开始的题目：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …是斐波那契数列。1, 1后面的数字是将前两个数字相加，所得的和成为接下来的数字。

1, 1, $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $5+8=13$

第二道题：1, 4, 27, 256, 3125, 46656, …规律是这样的：

1的1次方，2的2次方，3的3次方，4的4次方，5的5次方，6的6次方，以此类推。

也就是说，这个数列中的各项是 n 的 n 次方，4的4次方、5的5次方之类心算还没问题，6的6次方的话，心算就不太可能了。

第三道题：6, 15, 35, 77, 143, …规律是这样的：

2×3 , 3×5 , 5×7 , 7×11 , 11×13 , …

也就是说，“质数 \times 后一个质数”的形式。可是我把 11×13 算错了，真是丢脸啊。美露嘉一针见血地指出了我的“计算错误”。

最后一道题是6, 2, 8, 2, 10, 18, 4, 12, 10, 6, …。这道题很难。因为这个数列其实是圆周率 π 中每位数的数字乘以2而成的。

圆周率 $\pi=3.141592653\dots$

每位数的数字：3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, …

每位数乘以2后：6, 2, 8, 2, 10, 18, 4, 12, 10, 6, …

解这道题必须要背出圆周率 π 的各个位数的数字。如果脑海里没有这样一个数列模式，就无法解出这道题。