GAILULUN YU SHULITONGJI JIAOCHENG

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计教程

韩 明 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程

韩 明 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

全书共分十章，前五章是概率论部分，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征及特征函数与极限定理；后五章是数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析.

本书既有继承国内相关教材传统的部分，又有汲取国外相关教材中流行的直观、灵活的风格. 本书图文并茂，注重可读性，着重讲解基本概念、统计思想，强调理论与方法的应用，并把数学实验与数学建模的思想方法融入教材中.

本书可供高等院校数学类、统计类等有关专业作为本科生教材使用，也可供相关专业的高年级本科生及研究生作为教材使用，还可供相关专业研究者和广大自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 韩明编著. -- 上海：同济大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5608-5462-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第057305号

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计教程

韩 明 编著

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 22.5

印 数 1—2 100

字 数 561 000

版 次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5462-5

定 价 46.00 元

前　言

为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》,结合"高等学校本科教学质量与教学改革工程",在2013年9月,中国高等教育学会发出了《关于组织申报"普通高等学校应用型本科教育教材规划"选题立项的通知》.本书作者经过多年来的教学实践,也深感一部适合应用型本科院校数学类、统计类专业《概率论与数理统计》教材的重要性.

1989年,著名科学家钱学森教授在"中国数学会教育与科研座谈会"上提出:"电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深刻的影响,大学理工科的数学课程是不是需要改革一番?"本书作者也一直在关注"概率论与数理统计"课程的教学改革.

本书较为系统地介绍了概率论与数理统计的基本概念、理论和方法,并将作者多年来的教学实践经验、教学研究的心得和体会融入教材中.本书把数学软件(如MATLAB)、统计软件(如R软件)与教材内容紧密结合,将第1章—第8章中的一些计算、画图的相关程序,写在了附录B中;将第9章(方差分析)、第10章(回归分析)中的一些计算、画图的程序,直接写在了正文中.

把数学实验与数学建模的思想方法融入教学中,这是当前数学类课程教学改革的一个重要方向.本书借助数学实验,把一些比较抽象的内容(如泊松定理、伯努利大数定律、独立同分布中心极限定理等)通过可视化形式展现出来,便于读者理解.把数学建模的思想方法融入教材中,有利于培养学生的应用能力、创新意识等.书后附录有"数学建模及大学生数学建模竞赛简介"、"概率论与数理统计实验简介"等.

本书在叙述中,注重可读性,力争图文并茂.全书共有图108幅,相信会对读者理解相关内容有所帮助.全书共精选例题261个,其中很多例题贴近日常生活、反映科技进步和社会发展,具有现代气息.习题按节设立,这样可以使习题具有针对性,全书共有习题403道,并在书后附有"习题参考答案".

本书的初稿完成后,李春华副教授审阅了前5章,许家清高级统计师审阅了后5章;受同济大学出版社的委托,作为主审荆广珠教授审阅了本书初稿.以上各位专家对本书的初稿提出了许多宝贵的意见和建议,这对提高本书的质量起到了重要的作用,作者在此一并致谢.

虽然作者努力使本书写成为一本既有新意又便于教学的教材,但由于水平所限,书中难免还有一些疏漏甚至是错误,恳请专家和读者批评指正.

韩　明

2014年3月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在考虑一个(未来)事件是否会发生的时候,人们常关心该事件发生的可能性的大小.就像用尺子来测量物体的长度一样,我们用概率来测量一个未来事件发生的可能性的大小.将概率作用于被测事件就得到该事件发生的可能性大小的测量值——该事件的概率.

1990 年诺贝尔经济学奖的三位得主之一是马科维茨(Markowitz),他获奖的主要原因是提出了投资组合选择(portfolio selection)理论,他把投资组合的价格视为**随机变量**,用它的**均值**来衡量收益,用它的**方差**来度量风险(被称为"均值-方差分析理论"),该理论后来被誉为"华尔街的第一次革命"(注:随机变量,均值,方差是本课程后面将要介绍的内容).

《统计与真理——怎样运用偶然性》(C. R. Rao,美国宾西法尼亚州立大学教授,2002 年美国总统科学奖获得者)的扉页上写有这样一段话:

在终极的分析中,一切知识都是历史;
在抽象的意义下,一切科学都是数学;
在理性的基础上,所有的判断都是统计学.

1.1　随机试验、随机事件

1.1.1　随机现象与统计规律性

在自然界与人类社会活动中,人们观察到的现象是多种多样的,但归结起来它们大体上可以分为两类,一类是确定性现象,另一类是随机现象.例如,向上抛一个石子必然下落;同性电荷必然相互排斥.这类在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**(或**必然现象**).

在相同条件下抛一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,在抛掷之前无法预知抛掷的结果,结果呈现出不确定性;但多次重复抛同一枚硬币,得到正面朝上与反面朝上两个结果大致各占一半,结果呈现出规律性.在大量重复试验中,其结果所呈现出的规律性,称为**统计规律性**.

人们还逐渐发现另一类现象,它是事前不可预言的,即在相同的条件下重复进行试验,每次结果未必相同;或是知道它过去的状况,在相同的条件下未来的发展却不能完全肯定.这类在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象,称为**随机现象**(或**偶然现象**).值得注意的是,确定性现象,在一定条件下其结果只有一个,而随机现象其结果不只一个.

开始时,人们把这种现象称为"偶然现象"是指它是"不正常的"、"出乎意料的"或者是"原因不明的".是不是随机现象都没有什么规律可寻呢?事实上并非如此.人们通过长期反复观察和实践,逐渐发现所谓不可预言,只是对一次或少数几次观察或实践而言,当在相同条件下大量重复观察时,随机现象都呈现出某种规律.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 其理论与方法的应用非常广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济以及我们的日常生活.

1.1.2 随机试验与样本空间

我们遇到过各种试验,包括各种科学试验. 在这里我们把试验作广义理解,对某一事物的某一特征的观察,也认为是一种试验. 为了研究随机现象的统计规律性,需要进行各种试验.

如果一个试验同时满足下列条件:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称"可重复性");

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果(简称"不唯一性");

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称"不确定性").

称这样的试验为**随机试验**,有时把随机试验简称为**试验**(experiment),用 E 来表示. 我们是通过随机试验来研究随机现象的.

值得注意的是,随机试验要求试验在相同的条件下可以重复. 当然也有很多随机现象是不能重复的,例如某场足球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如经济增长率等)也是不能重复的. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象,但也十分注意研究不能重复的随机现象.

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的元素,即试验 E 的每个结果,称为**样本点**,用 ω 来表示.

例 1.1.1 以下是七个随机试验,请写出它们的样本空间.

E_1: 抛一枚硬币,用 H(head)表示正面朝上,用 T(tail)表示反面朝上,观察正面和反面出现的情况.

E_2: 将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3: 将一枚硬币抛掷三次,观察正面出现的次数.

E_4: 抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_5: 记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数.

E_6: 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_7: 向平面区域 $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 内随机投掷一点,观察落点的坐标(假设该落点一定落在 D 内).

解 以上七个随机试验 $E_1, E_2, \cdots, E_7$ 的样本空间分别是:

$\Omega_1=\{H, T\}$;

$\Omega_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$;

$\Omega_3=\{0, 1, 2, 3\}$;

$\Omega_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$\Omega_5=\{0, 1, 2, \cdots\}$;

$\Omega_6=\{t: t \geqslant 0\}$;

$\Omega_7=\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

只包含有限个样本点的样本空间,称为**有限样本空间**. 例如,在例 1.1.1 中,Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 为有限样本空间. 包含可列个样本点的样本空间,称为**可列样本空间**. 例如,在例 1.1.1中,Ω_5 为可列样本空间. 有限样本空间和可列样本空间统称为**离散样本空间**. 全部样本点可以充满某个区间(或区域)的样本空间,称为**连续样本空间**. 例如,在例 1.1.1 中,Ω_6, Ω_7 为连续样本空间.

应该注意的是,样本空间中的元素是由试验的目的所确定的. 例如,在例 1.1.1 中,E_2 和 E_3 同是将一枚硬币抛掷三次,由于试验的目的不同,样本空间中的元素也不同.

1.1.3 随机事件、事件间的关系与运算

在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合,即"随机试验的某些样本点组成的集合"(亦即样本空间的子集). 例如,若规定某种灯泡的寿命小于 1 000 h为次品,则我们在例 1.1.1 的 E_6 中关心是否有 $t \geqslant 1\ 000$ h, 满足这个条件的样本点组成样本空间 Ω_6 的一个子集 $\{t: t \geqslant 1\ 000\}$.

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**(或"随机试验的某些样本点组成的集合"),简称**事件**(event). 在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**. 随机事件一般用大写字母 A, B, C 等来表示.

例 1.1.2 在例 1.1.1 中,看几个事件的例子. 对于 E_2, 事件"第一次出现 H",即 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$; 事件"三次出现同一面",即 $A_2 = \{HHH, TTT\}$. 对于 E_4, 事件"出现偶数点",即 $A_3 = \{2, 4, 6\}$.

特别,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 例如,在例 1.1.1 的 E_1 中,有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$; 在 E_3 中,有 4 个基本事件 $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

样本空间 Ω 包含所有样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

事件是一个集合,所以事件间的关系与运算自然按照集合论中集合间的关系与运算来处理. 下面这些关系与运算的提法,是根据集合间的关系与运算以及"事件发生"的含义给出的.

设试验 E 的样本空间为 Ω, 而 A, B, $A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B **包含**事件 A, 这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A = B$.

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(或事件 A 与事件 B 的**并**). 当且仅当 A, B 中至少有一个事件发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$ 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(或事件 A 与事件 B 的**交**). 当且仅当 A, B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 简记为 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1,

A_2，… 的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生，B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B=\Omega$ 且 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 记事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$，$\overline{A}=\Omega-A$.

(6) 若 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 显然，同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.

我们可以用维恩(Venn)图来表示上述事件间的关系与运算，如图 1-1—图 1-6 所示.

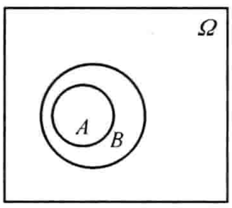

图 1-1　$A \subset B$

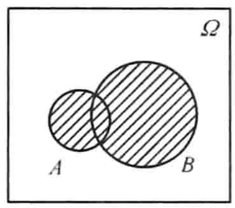

图 1-2　$A \cup B$

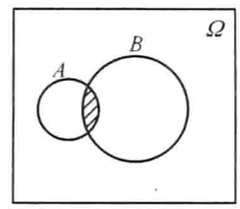

图 1-3　$A \cap B$

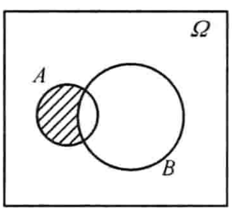

图 1-4　$A-B$

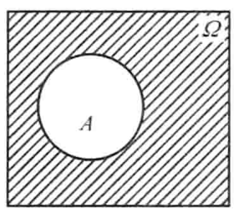

图 1-5　$\overline{A}$

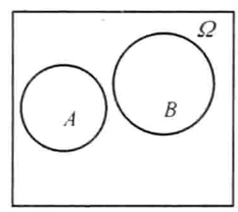

图 1-6　A 与 B 互不相容

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律.

设 $A, B, C, A_i (i=1, 2, \cdots)$ 为事件，则有

交换律　$A \cup B=B \cup A$，　$A \cap B=B \cap A$.

结合律　$A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$，$A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$.

分配律　$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$，

$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$.

德摩根(De Morgan)律

$$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}.$$

可以把以上两个事件的情形推广到有限个事件、可列个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i ;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i .$$

在集合论、概率论中符号与意义的对照，见表 1-1.

表 1-1　　在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与 B 交集	事件 A 与 B 的积事件
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与 B 的差集	事件 A 与 B 的差事件
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

例 1.1.3　考察学生在一次数学考试中的成绩(括号中的区间表示成绩所处的范围)，记 $A =$“优秀($[90, 100]$)”，$B =$“良好($[80, 90)$)”，$C =$“中等($[70, 80)$)”，$D =$“及格($[60, 70)$)”，$E =$“未通过($[0, 60)$)”，$F =$“通过($[60, 100]$)”，则 A, B, C, D, E 两两互不相容事件；E 与 F 互为对立事件，即 $\overline{E} = F$；$F = A \cup B \cup C \cup D$.

例 1.1.4　对于例 1.1.2 中的 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$，$A_2 = \{HHH, TTT\}$，求 $A_1 \cup A_2$，$A_1 \cap A_2$，$A_1 - A_2$，$\overline{A_1 \cup A_2}$.

解　根据例 1.1.1 知样本空间为 $\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$，则 $A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$，$A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$，$A_1 - A_2 = \{HHT, HTH, HTT\}$，$\overline{A_1 \cup A_2} = \Omega_2 - A_1 \cup A_2 = \{THT, TTH, THH\}$.

习　题　1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币，用 H 表示正面朝上，用 T 表示反面朝上，观察正面和反面出现的情况；

(2) 将一枚硬币抛掷两次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

(3) 将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数；

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的(直角)坐标；

(5) 掷两颗骰子，观察其点数.

2. 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个相同的球. 若从中任取三个球，请写出这个随机试验的样本空间，并计算基本事件总数.

3. 设 A, B, C 表示三个随机事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A, B, C 都发生；

(2) A, B, C 都不发生；