Higher Mathematics

·大·学·数·学·辅·导·丛·书·

高等数学同步知识解读与习题解答

马菊侠 吴云天 程小红 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学数学辅导丛书

高等数学同步知识解读与习题解答

马菊侠　吴云天　程小红　编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是以教育部编发的《高等数学教学大纲》为依据，以同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版教材为蓝本，编写的同步知识解读与习题解答。

本书共分为12章，内容为：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。

本书是针对大一学生同步学习高等数学的辅导书，将教材中的每一节内容进行同步知识解读，指出易犯的错误，提出相关的注意事项，给出常规的解题思路，并归纳出相关题型的解题方法及技巧，将教材中的重点题做了详细的解答。编排新颖，将高等数学的知识体系能鲜明地反映出来，使学生能伴随课程的进度同步提高，强化训练，进而提高高等数学的学习水平，并提高应试成绩。

本书体现同步知识、同步释疑、同步训练、同步解答，总结全面，细则详尽，使读者有一目了然的新意。书末附有高等数学两个学期期末考试真题八套，并附有参考解答，从而提高读者分析问题、解决问题的能力，以致达到融会贯通的目的。

本书可作为本科、专科、职业教育与继续教育、专升本及自学考试类“高等数学”的辅导教材；也可供报考硕士研究生的读者作复习提高之用；尤其是对理工科大学一年级新生，学习“高等数学”课程会起到一定的推动作用；对于从事“高等数学”教学的教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步知识解读与习题解答/马菊侠，吴云天，程小红编著．—北京：国防工业出版社，2014.8

(大学数学辅导丛书)

ISBN 978-7-118-09089-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①马…　②吴…　③程…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第143573号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　印张 20¼　字数 387 千字

2014年8月第1版第1次印刷　印数 1—4000 册　定价 39.80 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前 言

高等数学是理工科院校必修的基础课,由于该课程推理缜密、方法灵活、题型多变等特点,使得刚踏入大学的学子们感到疑惑茫然,也使得“力克高数”成了大一与考研的重中之重。为此我们编写了《高等数学同步知识解读与习题解答》,以供大一学子同步学习与大四考研之用。本书包含同步知识解读、同步疑难释疑、同步方法与思路、同步训练与解答、同步习题解答、期末考试真题(八套)等。本书按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版的节次进行同步知识理解、诠释、比较;总结常规思路与技巧,归纳出常见错误与注意事项;对一些概念题、本科考试题、考研题等进行比较与解答。本书是以同步辅导与知识解读为主线,贯穿着方法与技巧、习题解答与测试为一体的辅导用书。本书有如下特点:

(1) 同步知识解读。将每一节的知识进行了比较与区分,给出更加详细的解读与思路。

(2) 同步疑难释疑。将每一节的概念、理论、易犯错误、疑难问题等进行诠释,使读者加深理解,理清思路。

(3) 同步方法与思路。将每一节所涉及的知识、相关题型,归纳出详细的解题方法与技巧,加强知识、题型、方法的有机联系与统一。

(4) 同步训练与解答。每一章给出了章节同步测试题及答案, 其中包含基础

题、重点题、难点题、本科考试题及研究生入学考试题,体现题目的广度与深度,使得读者了解自我,检测自我,提升自我。

(5) 同步习题与解答。对同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版中课后练习题、总习题中的重点题作了详细解答,便于同步学习参考。

(6) 同步辅导与测试。为了提高应试能力,每一章配套自我检测题,每个学期配套考试真题,便于检测与巩固,以提高读者的应试能力。

本书由陕西科技大学马菊侠、吴云天,咸阳职业技术学院程小红,陕西服装工程学院刘晔、徐国丽、贺艳琴、张攀编著。其中第一章、第三章、第五章由马菊侠编写,第四章、第九章、第十一章由吴云天编写,第二章、第七章、第八章由程小红编写,第十章由刘晔、徐国丽编写,第六章由贺艳琴、张攀编写。最后由马菊侠统稿。在编写中,参阅了近几年国内外相关书籍,在此特向有关作者及出版社致谢。

由于水平有限,书中难免有不妥或疏漏之处,敬请读者及同仁斧正。

编　者

目 录

第一章 函数与极限

第一节 函数的特性及相关知识解读

一、函数几种特性的理解与解题思路

(一) 函数的有界性

1. 函数的有界性等价说法

设函数$f(x)$的定义域为D,数集$X\subset D$。

(1) $\forall x\in X$, $\exists M>0$,使$|f(x)|\leqslant M$(或$|f(x)|<M$,或$|f(x)|=M$);

(2) $\forall x\in X$, $\exists M_1,M_2$,使$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$(或$M_1<f(x)<M_2$,或$M_1\leqslant f(x)<M_2$,或$M_1<f(x)\leqslant M_2$)。

则均称$f(x)$在数集X上有界,其中M为界;M_1为下界,M_2为上界,且界(上界或下界)是不唯一的。

2. 常见的有界函数

$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $x\in[-1,1]$;

$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, $x\in[-1,1]$;

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$；

$0<\operatorname{arccot}x<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$。

3. 函数的有界性或无界性证明(判断)

函数的有界性证明，只预找到界 M，使 $|f(x)|\leqslant M(M>0)$，或者找到上(下)界，使 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$。

函数的无界性定义为：$\forall M>0$，都能找到点 $x_0\in D$(定义域)，使 $|f(x_0)|>M$，则 $f(x)$ 在 D 上无界。

【例 1】 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的。

证明 由 $1+x^2\geqslant 2\sqrt{x^2}=2|x|$ 得

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的。

【例 2】 **证明** $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的。

证明 $\forall M>0$，由 $\dfrac{1}{x^3}>M$ 得 $x<\dfrac{1}{\sqrt[3]{M}}$，于是取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt[3]{M+1}}$，则 $x_0\in(0,1)$，

$f(x_0)=\dfrac{1}{x_0^3}=M+1>M$。

故 $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的。

(二) 函数的单调性

判断函数单调性的方法如下：

(1) $\forall x_1,x_2\in I$，若 $x_1<x_2$，恒有 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}<1\left(\text{或}\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}<1\right)$，则 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增(递减)的。

(2) $\forall x_1,x_2\in I$，若 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)>0$(或 $f(x_2)-f(x_1)<0$)，则 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增(或递减)的。

(3) 利用导数的正负判断(详见第三章)。

（三）函数的奇偶性

1. 定义

设$f(x)$的定义域D关于原点对称。$\forall x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),\ f(x)\text{为偶函数；}$$

$$f(-x)=-f(x),\ f(x)\text{为奇函数。}$$

注　若定义域不关于原点对称,则函数一定不具有奇偶性。

2. 两个非零的奇偶函数的运算

（1）偶函数乘偶函数是偶函数；

（2）偶函数乘奇函数是奇函数；

（3）奇函数乘奇函数是偶函数；

（4）偶函数加偶函数是偶函数；

（5）偶函数加奇函数是非奇非偶函数。

3. 奇偶性判断

一般是用定义或运算方法进行。

【例 3】　$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是________。

(A)有界函数　(B)单调函数　(C)周期函数　(D)偶函数

解　因$(-\infty,+\infty)$可看成是对称区间,$|x\sin x|$、$e^{\cos x}$都是偶函数,故$f(x)$为偶函数,选(D)。

【例 4】　判断$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性。

解　$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\xlongequal{\text{有理化分子}}\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

故$f(x)$为奇函数。

【例 5】　**证明**　定义在对称区间上的任何函数$f(x)$均可表示成奇函数与偶函数之和。

证明　$f(x)=\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}$

设$g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)\text{，偶函数；}$$

设 $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，则

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\text{，奇函数。}$$

而 $f(x)=g(x)+h(x)$，即 $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数的和。

（四）函数的周期性

函数周期性的证明一般是用定义进行。

【例 6】 设对任意实数 x，恒有 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$。

证明 函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数。

分析 只需证明 $f(x+6)=f(x)$。

证明 由已知

$$f(x)=f(x+1)+f(x-1)=f(x+2)+f(x)+f(x-1)$$

即有

$$f(x-1)=-f(x+2)$$

于是

$$f(x)=-f(x+3)$$

而

$$f(x+6)=f[(x+3)+3]=-f(x+3)=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数。

二、函数的复合与分解思路

（1）函数的复合主要是找出函数的框架，再代入。如 $f(x)=\sin x^2+3x+e^x$，则框架为 $f(\quad)=\sin(\quad)^2+3(\quad)+e^{(\quad)}$，其中 x 是什么，就将什么代入。

（2）函数的分解则是从外至里，依次与基本的初等函数比较。其中自变量处只能是一个变量，依次分解，直至最后一个函数是基本初等函数，或简单函数。

【例 7】 设 $f(x)=x^3$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解　由$f(\quad)=(\quad)^3$得$f[g(x)]=[g(x)]^3=(\mathrm{e}^x)^3=\mathrm{e}^{3x}$；

由$g(\quad)=\mathrm{e}^{(\quad)}$得$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^{x^3}$。

【例 8】　设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x+1)$。

分析　**法 1**　令$x+\dfrac{1}{x}=t$，解出x，代入原式，可求得$f(x)$。

法 2　根据$x^2+\dfrac{1}{x^2}$的特点，凑成由$x+\dfrac{1}{x}$的表达式。

解
$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$
故
$$f(x)=x^2-2$$
$$f(x+1)=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$$

【例 9】　已知$f(x)=\sin x$，$f[g(x)]=1-x^2$，求$g(x)$及其定义域。

解　由$f(\quad)=\sin(\quad)$，$f[g(x)]=\sin[g(x)]=1-x^2$。故$g(x)=\arcsin(1-x^2)$。定义域$|1-x^2|\leqslant 1$，即$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$。

【例 10】　设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则$f\{f[f(x)]\}=$________。

[2001 年数学二][①]

解　$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$，而$|f(x)|>1$是不可能的。实际上$|x|>1$时，$f(x)=0$；$|x|\leqslant 1$时，$f(x)=1$。故$|f(x)|\leqslant 1$时，$f[f(x)]=1$。$f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$。

【例 11】　将所给函数进行分解：

(1) $y=\ln\cos(\mathrm{e}^{-x})$；(2) $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$。

解　(1)从外至里，可看见对数→三角→指数→幂，则分解为
$$y=\ln u,u=\cos v,v=\mathrm{e}^t,t=-x。$$

(2)从外至里，有指数→幂函数→三角函数→幂函数，则
$$y=\mathrm{e}^u,u=v^2,v=\sin t,t=\frac{1}{x}。$$

---

①2001 年数学二表示 2001 年全国硕士研究生入学数学试题数学二。

第二节　数列极限的定义证明思路与注意事项

1. 明确数列极限的"$\varepsilon-N$"定义

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon \iff \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

2. 证明思路

$\forall\varepsilon>0$，由不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$

$$\Big\downarrow \text{恒等变形，适当放大}$$

$$n>\varphi(\varepsilon,a)$$

$$\Big\downarrow$$

记 $N=[\varphi(\varepsilon,a)]$，由此向上推，即可。

3. 注意事项

数列极限的定义证明是"必要式"的，不是"充分式"的。所用的语言是"要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要找到 N"，即"后边保证前边成立"。

【例 1】 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2n}}{n+1}=0$。

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2n}}{n+1}-0\right|=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2n}}{n+1}<\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$，则逆推得当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2n}}{n+1}-0\right|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2n}}{n+1}=0$。

注 由于 N 的不唯一性，可由 $\dfrac{2}{n+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，此时 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，也可推出结论。

【例 2】 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3}=\dfrac{3}{2}$。

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{3n+2}{2n+3}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{5}{2(2n+3)}<\dfrac{5}{2n+3}<\dfrac{5}{2n}<\dfrac{5}{n}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{5}{\varepsilon}$，只要取

$N=\left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right]$，可推得 $\left|\dfrac{3n+2}{2n+3}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3}=\dfrac{3}{2}$。

注　此题由 $\dfrac{5}{2(2n+3)}<\varepsilon$，$\dfrac{5}{2n+3}<\varepsilon$，$\dfrac{5}{2n}<\varepsilon$ 均可求出 N。

第三节　函数极限的定义证明与左右极限的应用

一、函数极限定义的比较与定义证明思路

1. 自变量 x 的变化趋势与相关表达式

$$\left.\begin{array}{l} x\to x_0,0<|x-x_0|<\delta \\ x\to x_0^+,x_0<x<x_0+\delta \\ x\to x_0^-,x_0-\delta<x<x_0 \end{array}\right\}\exists\delta>0,\qquad \left.\begin{array}{l} x\to\infty,|x|>X, \\ x\to+\infty,x>X, \\ x\to-\infty,x<-X, \end{array}\right\}\exists X>0$$

函数 $f(x)$ 的变化趋势与相关表达式

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\to A,|f(x)-A|<\varepsilon \\ f(x)\to 0,|f(x)|<\varepsilon \end{array}\right\}\forall\varepsilon>0,\qquad \left.\begin{array}{l} f(x)\to\infty,|f(x)|>M \\ f(x)\to+\infty,f(x)>M \\ f(x)\to-\infty,f(x)<-M \end{array}\right\}\forall M>0$$

在上述变化中，任取 x 的变化趋势及函数 $f(x)$ 的变化趋势，就得到一种极限定义。注：极限为无穷大，代表极限不存在。

2. 极限定义证明思路

(1) 用“$\varepsilon-\delta$”定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon\xrightarrow[\text{或适当放大}]{\text{恒等变形}}|x-x_0|<\varphi(\varepsilon,A)$，取 $\delta=\varphi(\varepsilon,A)$。

(2) 用“$\varepsilon-X$”定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon\xrightarrow[\text{适当放大}]{\text{恒等变形}}|x|>\varphi(\varepsilon,A)$，取 $X=\varphi(\varepsilon,A)$。

(3) 用“$M-X$”定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$。

$\forall M>0$，要使 $|f(x)|>M\xrightarrow[\text{或适当缩小}]{\text{恒等变形}}|x|>\varphi(M)$，取 $X=\varphi(M)$。

【例1】　利用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+2)=6$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$; (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2x}{x}=\infty$。

解 (1) $\forall\varepsilon>0$,要使$|x^2+2-6|=|x^2-4|=|x-2||x+2|<\varepsilon$,由于$x\to2$,不妨设$|x-2|<1$,则$1<x<3$,于是$|x-2||x+2|<5|x-2|$,只要$5|x-2|<\varepsilon$,取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$,则当$0<|x-2|<\delta$时,$|x^2+2-6|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to2}(x^2+2)=6$。

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right|=\dfrac{3}{|x-2|}<\varepsilon$。

因$x\to\infty$,需得到$|x|$,利用三角不等式$|x|-2\leqslant|x-2|\leqslant|x|+2$,得$\dfrac{3}{|x-2|}\leqslant\dfrac{3}{|x|-2}<\varepsilon$。只要$|x|-2>\dfrac{3}{\varepsilon}$,$|x|>\dfrac{3}{\varepsilon}+2$。取$X=\dfrac{2}{\varepsilon}+2$,则当$|x|>X$时,$\left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right|<\varepsilon$,即有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x+2}=1$。

(3) 因$f(x)\to\infty$,故$\forall M>0$,要使$\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|\geqslant\dfrac{1}{|x|}-2>M$,$\dfrac{1}{|x|}>M+2$,$|x|<\dfrac{1}{M+2}$,取$\delta=\dfrac{1}{M+2}$,则当$0<|x|<\dfrac{1}{M+2}$时,$\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>M$,即有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2x}{x}=\infty$。

二、必须考察左、右极限的相关题目

1. 函数$f(x)$极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 且 }\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

(左、右极限不仅存在且相等)

注:左、右极限至少有一个不存在或左、右极限都存在但不相等,则$x\to x_0$时,$f(x)$极限不存在。

2. 相关题型

(1) 求分段函数的分段点x_0处的极限;

(2) 含有绝对值的函数极限;

(3) 相关的指数函数:a^x在$x\to\infty$时需分$x\to+\infty$,$x\to-\infty$;$a^{\frac{1}{x}}$在$x\to0$时需分$x\to0^+$,$x\to0^-$;