

Higher Mathematics

· 大 · 学 · 数 · 学 · 辅 · 导 · 丛 · 书 ·

高等数学 同步知识解读 与习题解答

马菊侠 吴云天 程小红 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

大学数学辅导丛书

高等数学同步知识 解读与习题解答

马菊侠 吴云天 程小红 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是以教育部编发的《高等数学教学大纲》为依据,以同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版教材为蓝本,编写的同步知识解读与习题解答。

本书共分为12章,内容为:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。

本书是针对大一学生同步学习高等数学的辅导书,将教材中的每一节内容进行同步知识解读,指出易犯的错误,提出相关的注意事项,给出常规的解题思路,并归纳出相关题型的解题方法及技巧,将教材中的重点题做了详细的解答。编排新颖,将高等数学的知识体系能鲜明地反映出来,使学生能伴随课程的进度同步提高,强化训练,进而提高高等数学的学习水平,并提高应试成绩。

本书体现同步知识、同步释疑、同步训练、同步解答,总结全面,细则详尽,使读者有一目了然的新意。书末附有高等数学两个学期期末考试真题八套,并附有参考解答,从而提高读者分析问题、解决问题的能力,以致达到融会贯通的目的。

本书可作为本科、专科、职业教育与继续教育、专升本及自学考试类“高等数学”的辅导教材;也可供报考硕士研究生的读者作复习提高之用;尤其是对理工科大学一年级新生,学习“高等数学”课程会起到一定的推动作用;对于从事“高等数学”教学的教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步知识解读与习题解答/马菊侠,吴云天,

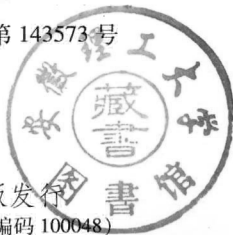
程小红编著. —北京:国防工业出版社,2014.8

(大学数学辅导丛书)

ISBN 978-7-118-09089-5

I. ①高… II. ①马… ②吴… ③程… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 143573 号



※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 20 $\frac{1}{4}$ 字数 387 千字

2014年8月第1版第1次印刷 印数 1—4000 册 定价 39.80 元

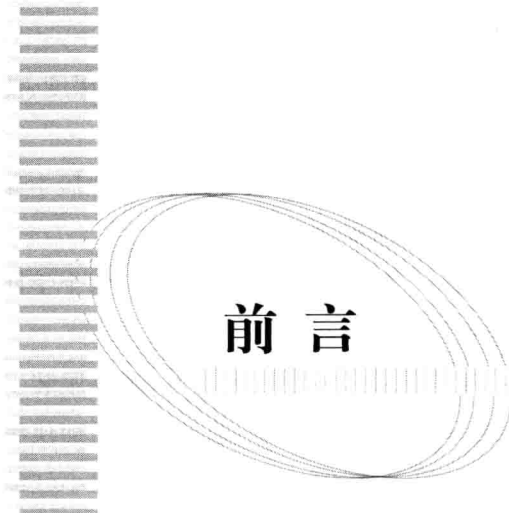
(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717



前言

高等数学是理工科院校必修的基础课,由于该课程推理缜密、方法灵活、题型多变等特点,使得刚踏入大学的学子们感到疑惑茫然,也使得“力克高数”成了大一与考研的重中之重。为此我们编写了《高等数学同步知识解读与习题解答》,以供大一学子同步学习与大四考研之用。本书包含同步知识解读、同步疑难释疑、同步方法与思路、同步训练与解答、同步习题解答、期末考试真题(八套)等。本书按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版的节次进行同步知识理解、诠释、比较;总结常规思路与技巧,归纳出常见错误与注意事项;对一些概念题、本科考试题、考研题等进行比较与解答。本书是以同步辅导与知识解读为主线,贯穿着方法与技巧、习题解答与测试为一体的辅导用书。本书有如下特点:

(1) 同步知识解读。将每一节的知识进行了比较与区分,给出更加详细的解读与思路。

(2) 同步疑难释疑。将每一节的概念、理论、易犯错误、疑难问题等进行诠释,使读者加深理解,理清思路。

(3) 同步方法与思路。将每一节所涉及的知识、相关题型,归纳出详细的解题方法与技巧,加强知识、题型、方法的有机联系与统一。

(4) 同步训练与解答。每一章给出了章节同步测试题及答案,其中包含基础

题、重点题、难点题、本科考试题及研究生入学考试题,体现题目的广度与深度,使得读者了解自我,检测自我,提升自我。

(5) 同步习题与解答。对同济大学应用数学系主编的《高等数学》第六版中课后练习题、总习题中的重点题作了详细解答,便于同步学习参考。

(6) 同步辅导与测试。为了提高应试能力,每一章配套自我检测题,每个学期配套考试真题,便于检测与巩固,以提高读者的应试能力。

本书由陕西科技大学马菊侠、吴云天,咸阳职业技术学院程小红,陕西服装工程学院刘晔、徐国丽、贺艳琴、张攀编著。其中第一章、第三章、第五章由马菊侠编写,第四章、第九章、第十一章由吴云天编写,第二章、第七章、第八章由程小红编写,第十章由刘晔、徐国丽编写,第六章由贺艳琴、张攀编写。最后由马菊侠统稿。在编写中,参阅了近几年国内外相关书籍,在此特向有关作者及出版社致谢。

由于水平有限,书中难免有不妥或疏漏之处,敬请读者及同仁斧正。

编 者

目录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数的特性及相关知识解读	1
第二节 数列极限的定义证明思路与注意事项	6
第三节 函数极限的定义证明与左右极限的应用	7
第四节 利用无穷小的性质计算极限	10
第五节 有理式(无理式)函数的极限计算	11
第六节 何时利用重要极限及准则求极限	14
第七节 利用等价无穷小计算极限的方法与技巧	18
第八节 分段函数的连续性讨论及待定常数的确定	20
第九节 如何找间断点并判断其类型	22
第十节 方程根存在性的相关证明	23
第二章 导数与微分	37
第一节 导数定义解读与应用技巧	37
第二节 分段函数可导性及相关待定常数确定	39
第三节 复合函数求导方法解读及对数求导技巧	42
第四节 高阶导数的求导技巧	45

第五节	隐函数的导数与微分求法技巧	46
第六节	参数方程求导与注意事项	48
第三章	微分中值定理与导数应用	62
第一节	微分中值定理的联系、共性、证明	62
第二节	洛必达法则应用技巧与未定式极限方法归纳	67
第三节	泰勒公式的解读与相关应用	71
第四节	方程根的个数判定及不等式证明	74
第五节	函数的单调性、凹凸性、极值、最值的判断与比较	78
第六节	函数图形的描绘与渐近线的求法	81
第四章	不定积分	100
第一节	原函数的概念解读与常用的积分技巧	100
第二节	换元法的应用技巧与题目类型	102
第三节	分部积分的应用技巧与题目类型	107
第四节	有理函数的积分技巧	109
第五章	定积分	123
第一节	定积分的概念及性质应用技巧	123
第二节	积分上限函数的性质应用与证明技巧	125
第三节	定积分的换元技巧与题目类型	127
第四节	分部积分的应用技巧与题目类型	129
第五节	分段函数的积分技巧	130
第六节	定积分中的等式与不等式证明技巧	131
第七节	反常积分敛散性判定	132
第六章	定积分的应用	147
第一节	元素法的步骤	147
第二节	平面图形面积、体积、弧长的计算技巧与注意事项	147
第三节	定积分物理应用的相关公式	150
第七章	微分方程	161
第一节	微分方程的概念	161

第二节	可分离变量及可转化型的一阶方程	161
第三节	一阶线性微分方程解法与技巧	162
第四节	可降阶的几类微分方程的解法	165
第五节	线性微分方程解的结构与应用	166
第六节	常系数线性微分方程的求解	166
第八章	空间解析几何与向量代数	179
第一节	利用向量坐标所进行的线性运算	179
第二节	数量积、向量积、混合积的比较	181
第三节	球面、柱面、旋转曲面的方程比较	183
第四节	空间曲线、曲面、立体在坐标面上的投影	184
第五节	平面方程的建立技巧	186
第六节	空间直线方程的建立技巧与相关投影	187
第九章	多元函数微分法及其应用	199
第一节	二元函数极限概念解读与计算	199
第二节	偏导数的计算	201
第三节	二元函数的连续、偏导、可微之间的关系	202
第四节	多元复合函数的求导方法与技巧	204
第五节	隐函数的求导方法与技巧	205
第六节	空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与法线的求法	208
第七节	方向导数与梯度的概念比较与计算	210
第八节	多元函数的极值、最值求法	211
第十章	重积分	229
第一节	简化计算二重积分的方法与技巧	229
第二节	三重积分的坐标选择与计算技巧	233
第三节	重积分的应用	237
第十一章	曲线积分与曲面积分	246
第一节	对弧长的曲线积分计算技巧	246
第二节	对坐标的曲线积分计算与格林公式应用技巧	248

第三节 对面积的曲面积分解读	251
第四节 对坐标的曲面积分计算与高斯公式应用技巧	253
第五节 积分应用比较	256
第十二章 无穷级数	267
第一节 常数项级数性质解读	267
第二节 常数项级数敛散性判别技巧与方法解读	268
第三节 幂级数收敛半径的求法	271
第四节 函数展开成幂级数的方法	273
第五节 幂级数和函数的求法	274
第六节 求傅里叶级数的和函数或在某点的和	276
第七节 将函数展开成傅里级数的方法——直接展开法	277
高等数学(上)试题(一)	291
高等数学(上)试题(二)	292
高等数学(上)试题(三)	294
高等数学(上)试题(四)	296
高等数学(下)试题(一)	298
高等数学(下)试题(二)	300
高等数学(下)试题(三)	302
高等数学(下)试题(四)	304
高等数学(上)试题(一)答案	307
高等数学(上)试题(二)答案	307
高等数学(上)试题(三)答案	308
高等数学(上)试题(四)答案	309
高等数学(下)试题(一)答案	311
高等数学(下)试题(二)答案	312
高等数学(下)试题(三)答案	314
高等数学(下)试题(四)答案	316

第一章

函数与极限

第一节 函数的特性及相关知识解读

一、函数几种特性的理解与解题思路

(一) 函数的有界性

1. 函数的有界性等价说法

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$ 。

(1) $\forall x \in X, \exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ (或 $|f(x)| < M$, 或 $|f(x)| = M$);

(2) $\forall x \in X, \exists M_1, M_2$, 使 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ (或 $M_1 < f(x) < M_2$, 或 $M_1 \leq f(x) < M_2$, 或 $M_1 < f(x) \leq M_2$)。

则均称 $f(x)$ 在数集 X 上有界, 其中 M 为界; M_1 为下界, M_2 为上界, 且界(上界或下界)是不唯一的。

2. 常见的有界函数

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1];$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi, x \in [-1, 1];$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$0 < \operatorname{arccot} x < \pi, x \in (-\infty, +\infty)。$$

3. 函数的有界性或无界性证明(判断)

函数的有界性证明,只预找到界 M ,使 $|f(x)| \leq M (M>0)$,或者找到上(下)界,使 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ 。

函数的无界性定义为: $\forall M>0$,都能找到点 $x_0 \in D$ (定义域),使 $|f(x_0)| > M$,则 $f(x)$ 在 D 上无界。

【例1】 证明函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的。

证明 由 $1+x^2 \geq 2\sqrt{x^2} = 2|x|$ 得

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的。

【例2】 证明 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的。

证明 $\forall M>0$, 由 $\frac{1}{x^3} > M$ 得 $x < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$, 于是取 $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{M+1}}$, 则 $x_0 \in (0, 1)$,

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0^3} = M+1 > M。$$

故 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, 1)$ 上无界的。

(二) 函数的单调性

判断函数单调性的方法如下:

(1) $\forall x_1, x_2 \in I$, 若 $x_1 < x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1$ (或 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1$), 则 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增(递减)的。

(2) $\forall x_1, x_2 \in I$, 若 $x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (或 $f(x_2) - f(x_1) < 0$), 则 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增(或递减)的。

(3) 利用导数的正负判断(详见第三章)。

(三) 函数的奇偶性

1. 定义

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。 $\forall x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x), f(x) \text{ 为偶函数};$$

$$f(-x) = -f(x), f(x) \text{ 为奇函数}.$$

注 若定义域不关于原点对称, 则函数一定不具有奇偶性。

2. 两个非零的奇偶函数的运算

(1) 偶函数乘偶函数是偶函数;

(2) 偶函数乘奇函数是奇函数;

(3) 奇函数乘奇函数是偶函数;

(4) 偶函数加偶函数是偶函数;

(5) 偶函数加奇函数是非奇非偶函数。

3. 奇偶性判断

一般是用定义或运算方法进行。

【例3】 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是_____。

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 因 $(-\infty, +\infty)$ 可看成是对称区间, $|x \sin x|$ 、 $e^{\cos x}$ 都是偶函数, 故 $f(x)$ 为偶函数, 选(D)。

【例4】 判断 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

$$\text{解 } f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \xrightarrow{\text{有理化分子}} \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

故 $f(x)$ 为奇函数。

【例5】 证明 定义在对称区间上的任何函数 $f(x)$ 均可表示成奇函数与偶函数之和。

$$\text{证明 } f(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \text{ 则}$$

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \text{偶函数};$$

设 $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, 则

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x), \text{奇函数}.$$

而 $f(x) = g(x) + h(x)$, 即 $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数的和。

(四) 函数的周期性

函数周期性的证明一般是用定义进行。

【例6】 设对任意实数 x , 恒有 $f(x) = f(x+1) + f(x-1)$ 。

证明 函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数。

分析 只需证明 $f(x+6) = f(x)$ 。

证明 由已知

$$f(x) = f(x+1) + f(x-1) = f(x+2) + f(x) + f(x-1)$$

即有

$$f(x-1) = -f(x+2)$$

于是

$$f(x) = -f(x+3)$$

而

$$f(x+6) = f[(x+3)+3] = -f(x+3) = f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数。

二、函数的复合与分解思路

(1) 函数的复合主要是找出函数的框架, 再代入。如 $f(x) = \sin x^2 + 3x + e^x$, 则框架为 $f(\quad) = \sin(\quad)^2 + 3(\quad) + e^{(\quad)}$, 其中 x 是什么, 就将什么代入。

(2) 函数的分解则是从外至里, 依次与基本的初等函数比较。其中自变量处只能是一个变量, 依次分解, 直至最后一个函数是基本初等函数, 或简单函数。

【例7】 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ 。

解 由 $f(\quad) = (\quad)^3$ 得 $f[g(x)] = [g(x)]^3 = (e^x)^3 = e^{3x}$;

由 $g(\quad) = e^{(\quad)}$ 得 $g[f(x)] = e^{f(x)} = e^{x^3}$ 。

【例 8】 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x+1)$ 。

分析 法 1 令 $x + \frac{1}{x} = t$, 解出 x , 代入原式, 可求得 $f(x)$ 。

法 2 根据 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的特点, 凑成由 $x + \frac{1}{x}$ 的表达式。

$$\text{解} \quad f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

故

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$

【例 9】 已知 $f(x) = \sin x$, $f[g(x)] = 1 - x^2$, 求 $g(x)$ 及其定义域。

解 由 $f(\quad) = \sin(\quad)$, $f[g(x)] = \sin[g(x)] = 1 - x^2$ 。故 $g(x) = \arcsin(1 - x^2)$ 。定义域 $|1 - x^2| \leq 1$, 即 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 。

【例 10】 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[2001 年数学二]①

解 $f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leq 1 \\ 0, & |f(x)| > 1 \end{cases}$, 而 $|f(x)| > 1$ 是不可能的。实际上 $|x| > 1$ 时,

$f(x) = 0$; $|x| \leq 1$ 时, $f(x) = 1$ 。故 $|f(x)| \leq 1$ 时, $f[f(x)] = 1$ 。 $f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1$ 。

【例 11】 将所给函数进行分解:

(1) $y = \ln \cos(e^{-x})$; (2) $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 。

解 (1) 从外至里, 可看见对数 $\rightarrow$ 三角 $\rightarrow$ 指数 $\rightarrow$ 幂, 则分解为

$$y = \ln u, u = \cos v, v = e^t, t = -x。$$

(2) 从外至里, 有指数 $\rightarrow$ 幂函数 $\rightarrow$ 三角函数 $\rightarrow$ 幂函数, 则

$$y = e^u, u = v^2, v = \sin t, t = \frac{1}{x}。$$

①2001 年数学二表示 2001 年全国硕士研究生入学数学试题数学二。

第二节 数列极限的定义证明思路与注意事项

1. 明确数列极限的“ $\varepsilon-N$ ”定义

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当 } n > N \text{ 时}, |x_n - a| < \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

2. 证明思路

$\forall \varepsilon > 0$, 由不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$

恒等变形 $\downarrow$ 适当放大

$$n > \varphi(\varepsilon, a)$$



记 $N = [\varphi(\varepsilon, a)]$, 由此向上推, 即可。

3. 注意事项

数列极限的定义证明是“必要式”的, 不是“充分式”的。所用的语言是“要使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只要找到 N ”, 即“后边保证前边成立”。

【例 1】用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n+1} = 0$ 。

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n+1} - 0 \right| = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n+1} < \frac{2}{n+1} < \varepsilon$, 解得 $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, 取 $N =$

$\left[\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right]$, 则逆推得当 $n > N$ 时, $\left| \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n+1} = 0$ 。

注 由于 N 的不唯一性, 可由 $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon$, 解得 $n > \frac{2}{\varepsilon}$, 此时 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]$, 也可推出结论。

【例 2】用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3}{2}$ 。

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{3n+2}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n+3)} < \frac{5}{2n+3} < \frac{5}{2n} < \frac{5}{n} < \varepsilon$, 解得 $n > \frac{5}{\varepsilon}$, 只要取

$N = \left[\frac{5}{\varepsilon} \right]$, 可推得 $\left| \frac{3n+2}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3}{2}$ 。

注 此题由 $\frac{5}{2(2n+3)} < \varepsilon$, $\frac{5}{2n+3} < \varepsilon$, $\frac{5}{2n} < \varepsilon$ 均可求出 N 。

第三节 函数极限的定义证明与左右极限的应用

一、函数极限定义的比较与定义证明思路

1. 自变量 x 的变化趋势与相关表达式

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x_0, 0 < |x - x_0| < \delta \\ x \rightarrow x_0^+, x_0 < x < x_0 + \delta \\ x \rightarrow x_0^-, x_0 - \delta < x < x_0 \end{array} \right\} \exists \delta > 0, \quad \left. \begin{array}{l} x \rightarrow \infty, |x| > X, \\ x \rightarrow +\infty, x > X, \\ x \rightarrow -\infty, x < -X, \end{array} \right\} \exists X > 0$$

函数 $f(x)$ 的变化趋势与相关表达式

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow A, |f(x) - A| < \varepsilon \\ f(x) \rightarrow 0, |f(x)| < \varepsilon \end{array} \right\} \forall \varepsilon > 0, \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \infty, |f(x)| > M \\ f(x) \rightarrow +\infty, f(x) > M \\ f(x) \rightarrow -\infty, f(x) < -M \end{array} \right\} \forall M > 0$$

在上述变化中,任取 x 的变化趋势及函数 $f(x)$ 的变化趋势,就得到一种极限定义。注:极限为无穷大,代表极限不存在。

2. 极限定义证明思路

(1) 用“ $\varepsilon - \delta$ ”定义证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon \xrightarrow[\text{或适当放大}]{\text{恒等变形}} |x - x_0| < \varphi(\varepsilon, A)$, 取 $\delta = \varphi(\varepsilon, A)$ 。

(2) 用“ $\varepsilon - X$ ”定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon \xrightarrow[\text{适当放大}]{\text{恒等变形}} |x| > \varphi(\varepsilon, A)$, 取 $X = \varphi(\varepsilon, A)$ 。

(3) 用“ $M - X$ ”定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 。

$\forall M > 0$, 要使 $|f(x)| > M \xrightarrow[\text{或适当缩小}]{\text{恒等变形}} |x| > \varphi(M)$, 取 $X = \varphi(M)$ 。

【例1】 利用极限定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2) = 6; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x}{x} = \infty.$$

解 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x^2 + 2 - 6| = |x^2 - 4| = |x-2||x+2| < \varepsilon$, 由于 $x \rightarrow 2$, 不妨设 $|x-2| < 1$, 则 $1 < x < 3$, 于是 $|x-2||x+2| < 5|x-2|$, 只要 $5|x-2| < \varepsilon$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, 则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, $|x^2 + 2 - 6| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2) = 6$ 。

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \text{要使 } \left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| = \frac{3}{|x-2|} < \varepsilon.$$

因 $x \rightarrow \infty$, 需得到 $|x|$, 利用三角不等式 $|x| - 2 \leq |x-2| \leq |x| + 2$, 得 $\frac{3}{|x-2|} \leq \frac{3}{|x|-2} < \varepsilon$. 只要 $|x|-2 > \frac{3}{\varepsilon}$, $|x| > \frac{3}{\varepsilon} + 2$. 取 $X = \frac{3}{\varepsilon} + 2$, 则当 $|x| > X$ 时, $\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$, 即有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$ 。

(3) 因 $f(x) \rightarrow \infty$, 故 $\forall M > 0$, 要使 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 2 \right| \geq \frac{1}{|x|} - 2 > M$, $\frac{1}{|x|} > M+2$, $|x| < \frac{1}{M+2}$, 取 $\delta = \frac{1}{M+2}$, 则当 $0 < |x| < \frac{1}{M+2}$ 时, $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > M$, 即有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x}{x} = \infty$ 。

二、必须考察左、右极限的相关题目

1. 函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

(左、右极限不仅存在且相等)

注: 左、右极限至少有一个不存在或左、右极限都存在但不相等, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 极限不存在。

2. 相关题型

(1) 求分段函数的分段点 x_0 处的极限;

(2) 含有绝对值的函数极限;

(3) 相关的指数函数: a^x 在 $x \rightarrow \infty$ 时需分 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$; $a^{\frac{1}{x}}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时需分 $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$;