

问题 2.12 归并原理在极限理论中的重要作用	49
(1) 数列极限归并原理的作用	49
(2) 函数极限归并原理的作用	50
问题 2.13 判别数列收敛的方法	52
(1) 如何使用夹逼准则判定数列的收敛性	52
(2) 如何使用单调有界准则判别数列的收敛性	54
*(3) 如何使用 Cauchy 收敛原理判别数列的收敛性	55
*(4) 判别数列收敛的其他方法	57
问题 2.14 关于实数的完备性	58
(1) “万物皆数”说与无理数的发现	59
(2) 建立实数及其完备性理论是数学分析进一步严格化的需要	59
(3) 实数完备性理论简介	60
问题 2.15 怎样理解一元函数连续性与间断点的概念	62
(1) 函数的连续与间断是描写客观事物量的“渐变”与“突变” 两种对立性态的抽象	62
(2) 函数在一点连续的五种等价定义	62
(3) 怎样恰当地定义函数的间断点	63
问题 2.16 函数连续性的几个具体问题	64
(1) 是否存在着在数轴上处处有定义但处处不连续的函数	64
(2) 函数在某点处连续, 能否推知它在该点的某邻域内连续	64
(3) 为什么不能说初等函数在它的定义域上连续, 而只能说在其 定义区间上连续	65
问题 2.17 闭区间上连续函数的几个重要性质及其价值	66
(1) 闭区间上连续函数的性质	66
(2) 闭区间上连续函数的性质在理论和实际应用中的重要价值	66
(3) 闭区间上连续函数性质的推广	68
*(4) 如何理解函数在区间上的一致连续性	69
问题 2.18 多元函数的连续性	71
(1) 二元函数连续性的两种定义及比较	71
(2) 二元函数 $f(x, y)$ 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上关于自变量 x 和 y 都分别连续, 能否断言它在 $\mathbf{R}^2$ 上连续	72
第三章 一元函数微分学	74
问题 3.1 导数概念的本质及其在科学技术中的含义	74
(1) 导数概念的本质	74
(2) 导数在其他科学技术中的含义	75

(6) 容易发生混淆之处	252
问题 7.11 如何利用对称性计算各类多元函数的积分	254
(1) 利用对称性计算二重积分	254
(2) 利用对称性计算三重积分或第一型线、面积分	257
(3) 利用对称性计算第二型线、面积分	260

第八章 无穷级数 265

问题 8.1 关于正项级数的敛散性	265
(1) 如何理解比较审敛法	265
(2) 如何理解比值审敛法与根值审敛法	267
(3) 如何从几何上直观地理解积分审敛法	268
(4) 是否存在对所有正项级数都适用的比较标准级数	269
问题 8.2 在什么条件下对无穷级数可以使用结合律或交换律	271
(1) 对于收敛级数	271
(2) 对于正项级数	272
*(3) 对于绝对收敛级数	273
*(4) 对于任意项级数	274
问题 8.3 关于级数的乘法	277
问题 8.4 关于 Taylor 公式与 Taylor 级数	278
(1) 两种形式 Taylor 公式的比较	278
(2) Taylor 级数与 Taylor 展式有何区别	279
问题 8.5 关于幂级数的收敛半径	280
(1) 确定幂级数收敛半径有哪些常见方法	280
(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \neq 0$, 是否一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \frac{1}{R}$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R}$	282
(3) 为什么说“幂级数逐项积分与逐项求导后收敛半径不变”	282
问题 8.6 怎样理解函数的正交性与最佳均方逼近	283
(1) 怎样理解函数的正交性	283
(2) 如何理解 Fourier 级数的部分和是三角多项式对函数的最佳均方逼近	284
问题 8.7 关于函数的 Fourier 展开	286
(1) Fourier 级数与 Fourier 展式的区别	286
(2) 怎样把定义在区间 $[a, b]$ 上的函数展成周期为 $b - a$ 的 Fourier 级数	287
(3) 如何将定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 展成周期为 $2l$ 的 Fourier 级数, 其中 $2l > b - a$	288

例 2.3.3 古希腊雅典时期的诡辩学派的代表人物 Antiphon (安蒂丰, 约公元前 480 — 约前 411) 为解决“化圆为方”(作一个与给定的圆面积相等的正方形) 问题, 首先提出了用圆的内接正多边形面积来逼近圆面积的思想 (称为“穷竭法”), 后来被古希腊著名的应用数学家 Archimedes (阿基米德, 公元前 287 — 前 212) 用于求抛物线图形的面积。

例 2.3.4 我国魏晋时期的数学家刘徽 (约 225 — 295) 在对《九章算术》作注中提出“割圆术”作为计算圆周长、圆面积以及圆周率的基础, 基本思想也是用内接正多边形逐步逼近圆。书中指出:

“割之弥细, 所失弥小, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣”。

他用这种方法求得的圆周率

$$\pi \approx \frac{157}{50} \approx 3.14,$$

被后人称为“徽率”。

(2) 极限概念是适应微积分的创立和发展的需要逐步形成的

1° 微积分的创立和发展

17 世纪上半叶, 自然科学领域发生了一些重大事件. 1608 年, Galileo Galilei (伽利略, 1564 — 1642) 用天文望远镜遥望星空, 得到了许多令世人惊奇不已的发现; 1619 年, J. Kepler (开普勒, 1571 — 1630) 公布了他通过观测归纳出的行星运动的三大定律; 1638 年, Galileo Galilei 的《关于两门新科学的对话》一书出版, 建立了自由落体定律、动量定律等, 为动力学奠定了基础. 所有这一切, 标志着自文艺复兴以来蓬勃发展的自然科学迈入了综合与突破的阶段, 需要新的数学工具来解决所面临的困难. 微积分就是适应这种需要, 在 17 世纪下半叶, 由 Newton (牛顿, 1642 — 1727) 与 Leibniz (莱布尼茨, 1646 — 1716) 在前人工作的基础上, 分别以运动学和几何学为背景各自独立创立的, 被 F. Engels (恩格斯, 1820 — 1895) 誉为“人类精神的最高胜利”。

微积分的诞生和发展, 不但迎来了数学上的一个空前繁荣的时期, 大大拓展了数学的研究范围, 发展了一些诸如微分方程、无穷级数理论新工具, 出现了变分法、微分几何等新分支, 而且被应用于天文学、力学、光学、热学等学科领域, 取得了丰硕的成果, 引发了世界范围内的一场科学革命。

2° 微积分缺乏稳固的基础, 导致了第二次数学危机

然而, Newton 和 Leibniz 建立的微积分是不严格的, 他们自己也曾意识到这一点. 由于基础的不稳固, 在微积分的发展和应用过程中出现了越来越多的错误和悖论. 在微积分创立之后的大约一百年中, 虽然人们很少注意到这方面的问题,

$$= x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

与例 2.11.3 类似, 其中倒数第二个等式的证明也要利用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 详细证明请读者去完成. ■

由于基本初等函数的积分公式都是由与它们相应的导数公式得到的, 因此, 没有两个重要极限, 基本积分公式也是无法得到的.

(2) 微积分中三角函数角度的度量为什么用弧度制, 而不能用角度制

因为在证明重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的过程中利用了弧长公式 $s = xR$, 其中圆心角 x 用的是弧度. 若 x 用角度制来度量, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$. 事实上, x 的角度度数

$$\begin{aligned} x^\circ &= \frac{\pi}{180} x \text{ 弧度} \Rightarrow \sin x^\circ = \sin \frac{\pi}{180} x \\ &\Rightarrow \frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\sin(\pi x/180)}{x} = \frac{\sin(\pi/180)x}{(\pi/180)x} \cdot \frac{\pi}{180}, \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\pi}{180}. \end{aligned}$$

这样, $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$ 就要改为 $\sin x \sim \frac{\pi}{180}x$, 从而由例 2.11.2 易见, $(\sin x)' = \cos x$ 就要用 $(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x$ 来代替. 这样, 微积分中以此极限为基础的许多重要公式都要用繁杂的表达式来代替, 为应用带来许多不便!

问题 2.12 归并原理在极限理论中的重要作用

(1) 数列极限归并原理的作用

数列极限的归并原理 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A (有限或 ∞) 的充要条件为它的每个子列都收敛于 A (有限或 ∞).

作用: 建立了数列 $\{a_n\}$ 与它的子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛性之间的密切联系, 虽然很难用该原理 (的充分性) 来判断数列收敛, 但却可以利用它的必要性得到判断原数列发散、无界和不是无穷大等问题的一些常用方法.

1° 证明数列 $\{a_n\}$ 发散的常用方法

找出 $\{a_n\}$ 的一个发散子列或两个有不同极限的子列. 例如, 用此方法不难证明, $a_n = 2^{(-1)^n}$, $b_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ 都是发散数列.

2° 证明数列 $\{a_n\}$ 无界的常用方法

(1) “万物皆数”说与无理数的发现

Pythagoras of Samos (毕达哥拉斯, 约公元前 560 — 前 500) 是古希腊的著名哲学家和数学家, 大约在公元前 525 年, 创立了一个宗教式的组织, 就是今天称之为毕达哥拉斯学派的社团, 致力于哲学和数学研究. 该学派通过对客观世界的周密观察, 发现许多自然现象都依赖于数, 提出了“万物皆数”说. 他们所说的数仅指整数, 分数被看成是两个整数之比. 他们通过揭示数的奥秘来认识自然现象, 探索宇宙的规律. 例如, 用数的理论来解释运动, 发现音乐定律等. 该学派曾通过实验发现, 两条质地相同水平放置绷紧的弦, 若它们长度成小整数比时, 发音就和谐悦耳, 如 $2:3$ (称为五度和音)、 $3:4$ (称为四度和音) 等.

毕达哥拉斯学派还提出了线段的“可公度性”: 即对任何两条给定的线段, 总能找到某第三条线段, 使得给定的两条线段的长度都是该线段的整数倍, 就是说, 该线段是给定两线段的公共度量单位. 由此可知, 任何两条线段的比都是整数的比, 也就是有理数.

然而, 正是该学派 (据说是该学派的成员 Hippiasus (希帕苏斯)) 首先发现了不可公度线段的存在, 例如, 正方形的对角线与其一边就构成了不可公度线段. 事实上, 由勾股定理可以证明它们的长度之比为 $\sqrt{2}$, 不是有理数, 而是无理数 (据说, 证明也由该学派完成). 这一发现, 是对毕达哥拉斯学派的核心思想“万物皆依赖于整数”的致命打击, 在该学派内引起了极大的震动, 也深深地困惑着当时的数学家. 既然 $\sqrt{2}$ 不能写成两个整数之比, 那么它究竟怎样依赖于整数呢? 毕达哥拉斯学派关于比例和相似形的理论都是建立在“万物皆数”说的基础上的, 现在这个基础受到了挑战, 发生了动摇, 使得古希腊数学的逻辑基础产生了严重的危机, 从而爆发了“第一次数学危机”. 大约在一个世纪后, 即公元前 370 年, 这一危机才由该学派的成员 Archytas (阿尔希塔斯) 的学生 Eudoxus (欧多克索斯) 提出的新比例理论巧妙地避开了量的“可公度”概念而暂时消除了. 但是, 从理论上彻底克服这一危机还有待于 19 世纪后半叶实数理论的建立.

(2) 建立实数及其完备性理论是数学分析进一步严格化的需要

前面我们已经指出, 第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固, Cauchy 的功绩在于将微积分建立在极限的基础. 然而, 人们不久便发现了 Cauchy 的理论还存在许多漏洞. 例如, 除了他在极限概念中用了许多直观的描述性的语言外, 更重要的是微积分中的一些重要概念和理论都是以承认实数完备性为前提的. 但是, 直到 19 世纪中叶, 对于什么是实数还没有明确的定义, 数学家们对于实数系还停留在直观理解的基础上, 随意地使用无理数, 没有认真地研究它们的确切含义和性质. 实际上, 微积分中的许多问题都与实数及其完备性有关. 例如, 既然有理数列可能以无理数为极限, 那么, 实数列的极限一定是实数吗? 如何证

时, 就有 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$. 从 δ 的表达式可见, 它不仅随 ε 而变, 而且与 x_0 有关. 即便对同一个 $\varepsilon > 0$, 当 x_0 不同时, δ 也不尽相同. 从图 2.17.3 中可以看得很清楚: 当 x 分别取 x_1 与 x_2 时, 对应的 δ 相差很大. 这说明, 在不同点 x_0 处, 为使函数值改变量的绝对值 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right|$ 小于同一个 ε , 自变量改变量的绝对值 $|x - x_0|$ 的大小也不相同. x_0 越小 (即 x_0 越靠近原点), δ 也越小. 因此, 在区间 $(0, +\infty)$ 内不同点附近, 函数值随自变量改变的“步伐”是不一致的. 又因为 $(0, +\infty)$ 中包含无穷多个点 x_0 , 所以也就有无穷多个不同的 δ . 而且由 δ 的表达式易见, 当 $x_0 \rightarrow 0$ 时, $\delta \rightarrow 0$, 因此在无穷多个 δ 中找不到一个共同的正数 δ , 使得当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 恒有 $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon$. 故函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内虽处处连续, 但不一致连续. 然而, 如果将它的定义域缩小为 $[\alpha, +\infty)$, 其中 $\alpha > 0$, 那么, 它在 $[\alpha, +\infty)$ 上是一致连续的. 因为在这种情况下, 只要取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \varepsilon \right\}$, 那么 δ 就仅与 ε 有关, 是无穷多个 δ 中共同的最小一个, 只要 $x_1, x_2 \in [\alpha, +\infty)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon$.

从上面的分析不难看到, 函数 f 在区间上的一致连续性比它在区间上的处处连续性要求更强. 若 f 在区间 I 上一致连续, 则该函数必在 I 上处处连续; 反之不一定成立. 然而, 若 I 是一个闭区间 $[a, b]$, 则在 $[a, b]$ 上处处连续的函数必在该区间上一致连续, 这就是所谓一致连续性定理 2.17.3. 因此, 我们有如下结论:

函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续的充要条件是 f 在 $[a, b]$ 上处处连续.

这是闭区间上连续函数的一个重要的特征性质.

函数的一致连续性概念还可以推广到 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 并且可以证明, $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集 (即紧集) 上的连续函数是一致连续的.

一致连续性概念和一致连续性定理在数学分析中有重要的应用. 例如, 闭区间和有界闭域上的连续函数的可积性定理就是利用一致连续性定理来证明的.

问题 2.18 多元函数的连续性

一元函数的连续性概念及其性质都可以推广到多元函数中, 下面仅以二元函数为例来说明. 在学习这部分内容的时候, 应当将一元函数的连续性与多元函数的连续性加以比较, 特别注意推广后出现的新问题, 分析出现新问题的原因.

(1) 二元函数连续性的两种定义及比较

由于二元函数的连续性是建立在二重极限的基础上的, 所以按照二重极限

一般地, 若函数 $y = f(x)$ 在定义区间上的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是一个常数, 则称函数随 x 是均匀变化的. 在这种情况下, 平均变化率就表示该函数在定义区间上各点的变化率, 因此, 只要通过除法用商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就可以研究该函数的变化率问题. 若平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不是常量, 随区间内点 x 而变化, 则称函数随 x 是非均匀变化的. 对于这种情况, 平均变化率只是各点变化率的近似值. 为了精确研究该函数在不同点的变化率, 就需要利用函数在各点处的导数. 因此我们说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数刻画了非均匀变化量 y 在点 x_0 处的变化率, 导数是研究均匀变化问题的商在研究相应的非均匀变化问题中的推广和发展.

(2) 导数在其他科学技术中的含义

导数概念的本质是函数的变化率, 变化率在不同学科中的具体含义不尽相同. 例如, 在变速直线运动中, 位移 s 对时间 t 的变化率 $s'(t)$ 是瞬时速度; 在物质非均匀分布的细棒上, 质量 m 对棒上各点坐标 x 的变化率 $m'(x)$ 是细棒在 x 处的线密度; 在直流电路中, 导线中通过的电量 $q(t)$ 对时间 t 的变化率 $q'(t)$ 是电量在 t 时刻的电流强度; 在生物学中, 设 $N = N(t)$ 表示某生物种群在 t 时刻个体的数目, 则在个体数量很大并且经常有出生和死亡的情况下, $N(t)$ 对 t 的变化率 $N'(t)$ 表示种群的增长率; 在经济学中, 设 $p = p(x)$ 表示生产 x 个某种产品的总成本, $p(x)$ 对 x 的变化率 $p'(x)$ 表示成本增长率, 经济学中称其为边际成本, 它表示产量为 x 时再多生产一个单位产品所需要的成本.

问题 3.2 导数与微分概念中的局部线性化思想

(1) 导数概念中的局部线性化思想

我们知道, 质量非均匀分布的物质细棒上点 x_0 处的密度归结为质量函数 $m = m(x)$ 在点 x_0 处的导数 $\left. \frac{dm}{dx} \right|_{x_0}$ 的过程包含了两步: 第一步, 在微小局部内“以匀代非匀”, 求得密度的近似值. 就是说, 在微小区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 内, 将质量分布看成是均匀的, 用平均密度 $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ 作为点 x_0 处密度的近似值; 第二步, 通过极限求得点 x_0 处密度 $\rho(x_0)$ 的精确值, 即 $\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}$. 其中第一步“以匀代非匀”本质上就是“以线性函数代替非线性函数”, 也就是局部线性化. 从问题 2.2 (1) 中我们知道, 函数 $y = f(x)$ 随 x 均匀变化的充要条件为 $y = f(x)$ 是线性函数. 一元线性函数在几何上表示直线, 而非线性函数表示曲线, 所以从这个意义上看, “以匀代非匀”“以线性函数代替非线性函数”与“以直代曲”在本质上是一回事, 它们从不同角度表述了局

从上面的分析可见, Taylor 定理的思想包含两个方面: 第一, 用简单函数 (多项式) 来逼近复杂函数; 第二, 通过函数 f 在已知点处的信息 (f 以及各阶导数在点 x_0 处的值) 来表达它在未知点的信息. 这样使我们可以借助简单函数的性质来研究复杂函数 f 的性质, 利用函数 f 在已知点信息构造的简单函数 (多项式) 计算函数 f 在未知点的近似值, 这就是数学中常用的一种思想 —— 逼近的思想. 读者应当从微分到 Taylor 公式的学习中深刻领会这种思想.

(2) Taylor 定理的应用

Taylor 定理有两种形式, 即带有 Peano 余项的形式和带有 Lagrange 余项的形式. 前者是一阶微分公式的推广, 后者是 Lagrange 公式的推广, 它们都具有重要的理论意义和广泛的应用价值. 下面仅就四个方面加以说明.

第一, 它是进一步研究函数性态的理论基础. 我们已经指出, Lagrange 定理是利用导数研究函数性态的重要基础, 但它主要用于研究与一阶导数相关的那些性态. 如果要研究函数那些与高阶导数有关的更进一步的性态, 自然就要借助作为 Lagrange 定理推广的 Taylor 定理. 例如, 利用二阶导数值在驻点处的正负来判定该驻点是极大值点还是极小值点的定理, 以及利用更高阶导数来研究函数的极值问题的定理等, 都是利用 Taylor 定理证明的.

第二, 计算函数的近似值. 利用 Taylor 公式来计算函数的近似值比用微分精度更高, 适用范围更广, 而且可以进行误差估计. 由于 Lagrange 余项给出了余项的表达式, 所以为了估计误差的精度, 需要利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

第三, 它是求 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限的一般性方法. 因为求极限时不需要对余项的大小进行具体的计算, 而且仅涉及函数 f 在点 x_0 的去心邻域内的变化性态, 所以只要用带有 Peano 余项的 Taylor 公式就行了. 求极限时, 利用 Taylor 公式将不定式分子与分母中的函数分别展开, 使它们的多项式部分的最高次数相同, 就可很容易求得极限.

第四, 证明不等式. 前面已指出, 证明不等式的方法很多, 例如, 可以利用单调性、Lagrange 定理和函数的凹凸性等. 而 Taylor 公式常用于证明与中间值 ξ 处二阶以上导数 (含二阶导数) 有关的不等式. 由于证明不等式往往需要对其中的某些含 ξ 的项进行具体估计, 所以一般使用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 证明中, 一方面要充分利用题中给定的函数 $f(x)$ 及其各阶导数的已知信息, 例如, 在某些已知点上的值, 它们满足的不等式条件及有界性等; 另一方面, 要恰当选用在哪一点处函数的 Taylor 公式. 后者没有一般规律可循, 可根据题中的已知条件, 选用区间的端点、中间点、函数的极值点和导数为零的点等已知信息比较多的特殊点. 现举例说明如下:

*(4) 积分中值定理能否从微分中值定理导出? 反之如何

由于积分与导数之间有密切的联系, 积分中值定理与微分中值定理之间也应该有一定关系, 现说明如下:

1° 积分中值定理可以由微分中值定理导出

由本问题 (3) 的证明过程可见, 积分中值定理可以利用 Newton-Leibniz 公式从微分中值定理导出.

由此可见, 积分中值定理可以看作是微分中值定理的推论. 但是应当指出, 由于通常教材中, 讲述连续函数必存在原函数的变上限求导定理时, 其证明用到了积分中值定理. 若局限于此, 则在 f 连续的条件下, 上述从微分中值定理导出积分中值定理的过程, 导致了不合理的循环. 问题 4.4 中结论 (2) 显示: 变上限求导定理的证明可以不需要积分中值定理.

2° 积分中值定理不能导出微分中值定理

这是因为微分中值定理的条件是 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 而 $F(x)$ 在 (a, b) 内导函数 $f(x)$ 的存在性不能保证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

容易看出, 如果我们把微分中值定理在原有的条件上再加强到 F 的导函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则由于

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b,$$

便可以从积分中值定理导出微分中值定理.

(5) 推广的积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (4.3.3)$$

证 由于在等式 (4.3.3) 的两边对调积分上、下限将导致两边同时变号, 所以只要对 $a < b$ 的情形来证明这个等式就可以了. 又由于改变 $g(x)$ 的符号也同时使 (4.3.3) 的两边变号, 所以不失一般性, 可以设 $g(x) \geq 0, x \in [a, b]$. 又设 m, M 分别表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值, 并记 $I = \int_a^b g(x)dx$, 则由

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

得

$$mI \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq MI. \quad (4.3.4)$$

(4) 在 Newton-Leibniz 公式中原函数使用时应注意的问题

1° 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且原函数存在时, f 的无穷多个原函数中的任意一个都可用于 Newton-Leibniz 公式, 事实上, 由原函数的结构可知, $f(x)$ 的任意两个原函数之间只能相差一个常数. 于是若

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + c]_a^b = F(b) - F(a).$$

所以将 $f(x)$ 的任意一个原函数用于 Newton-Leibniz 公式, 其结果都是一样的.

2° 在例 4.5.1 中, 我们知道

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的原函数, 于是

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1) = \sin 1 - \sin 1 = 0$$

是否正确?

这个问题要从两种观点来看. 第一, 由于 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上无界, 所以 $f(x)$ 不可积. 作为定积分来看, 使用 Newton-Leibniz 公式显然是错误的.

第二, 积分 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 是一无界函数的反常积分, 容易验证它是收敛的.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} [F(\varepsilon) - F(-1)] + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [F(1) - F(\delta)] = F(1) - F(-1) = 0. \end{aligned}$$

所以当反常积分收敛时, 也可直接使用 Newton-Leibniz 公式来计算, 本题的结论也可从奇函数所构成的收敛反常积分直接得出.

3° 由于

$$\left(\arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (4.6.3)$$

应用 Newton-Leibniz 公式, 得

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\pi.$$

利用 (6.7.1) 式, 我们还有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\ &= \frac{1}{J^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}. \quad \blacksquare\end{aligned}\quad (6.7.2)$$

将定理 6.7.1 同一元函数反函数存在定理与求导公式比较易见, 它们之间有许多相似之处, 只是将一元函数反函数存在定理中的条件 $\frac{dy}{dx} \neq 0$, 改为 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 将反函数求导公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 改为 (6.7.2) 式的形式.

定理 6.7.1 还可以推广到 n 个 n 元函数的情形, 所得到的反函数存在定理与求导公式在重积分换元法中是相当有用的.

问题 6.8 多元函数无约束极值问题与一元函数极值问题的比较

多元函数的极值问题包含无约束 (无条件) 极值和有约束 (有条件) 极值两种类型. 前者是一元函数极值问题的直接推广. 它们之间有许多相似点, 也存在一些不同点. 教学中要特别注意它们的不同点以及出现不同点的原因. 下面以二元函数为例加以说明:

(1) 二者的相似点

二元函数 $f: U(x_0, y_0) \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极值的必要条件和充分条件与一元函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 在点 x_0 处取得极值的相应条件类似, 如下表所示:

	一元函数 f	二元函数 f
必要条件	f 在 x_0 处可导 (可微), $f'(x_0) = 0$	f 在 (x_0, y_0) 处可偏导, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (或 f 在 (x_0, y_0) 可微, $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$)
充分条件	f 在 x_0 处可导, $f'(x_0) = 0$. 若 $f''(x_0) > 0$ (< 0), 则 f 在 x_0 处取极小 (大) 值	$f \in C^{(2)}(U(x_0, y_0))$, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. 若 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则 f 取极小 (大) 值 ($f \in C^{(2)}(U(x_0, y_0))$, $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. 若 $H_f(x_0, y_0)$ 正 (负) 定, 则 f 在 (x_0, y_0) 处取极 小 (大) 值)

明: 在闭合曲线 (C) 所张的曲面 (S) 上, 向量场 $\mathbf{A}$ 沿各微小曲面 (dS) 边界曲线正向环量的无限累加就等于 $\mathbf{A}$ 沿曲面 (S) 边界正向 (C) 的环量, 这是显而易见的事实.

Gauss 公式 (7.6.8) 左端的被积函数 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 表示向量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 处的通量密度. 从而 $\operatorname{div} \mathbf{A} dV$ 表示 $\mathbf{A}$ 通过微小立体 (dV) 的表面的通量. (7.6.8) 式左端的积分表示将 (V) 上所有这些 (dV) 边界曲面上通过的通量 “无限累加”. 在累加过程中, 由于相邻微小区域 (dV) 的邻接表面上的通量相互抵消, 就只剩下 $\mathbf{A}$ 通过 (V) 边界曲面 (S) 的通量. Gauss 公式所反映的这一物理意义也是显而易见的.

(3) 两种形式的 Green 公式分别是 Stokes 公式与 Gauss 公式在平面上的特例

若 $\mathbf{A} = (P(x, y), Q(x, y)) \in C^1((\sigma)), (\sigma) \subset \mathbf{R}^2$ 为一闭域, (σ) 的边界曲线为 (C) , 这时, 张在曲线 (C) 上的曲面就是平面 (σ) . 沿 (C) 的正向时, 此平面 (σ) 的正法线朝上, 故 $dx \wedge dy = d\sigma, dy \wedge dz = dz \wedge dx = 0$. 于是, 容易看出, 此时的 Stokes 公式 (7.6.4) 就蜕化为 Green 公式 (7.6.1).

事实上, 若仍用三维空间的表示法, 有 $\mathbf{A} = (P(x, y, 0), Q(x, y, 0), 0), \mathbf{e}_n = (0, 0, 1), (S)$ 就是 $(\sigma), d\mathbf{s} = (dx, dy, 0)$.

于是 Stokes 公式 (7.6.5) 的左端为

$$\begin{aligned} \iint_{(+S)} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n dS &= \iint_{(+S)} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \cdot (0, 0, 1) dS \\ &= \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot (0, 0, 1) d\sigma \\ &= \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

公式 (7.6.5) 的右端为

$$\oint_{(+C)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\tau ds = \oint_{(+C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(+C)} Pdx + Qdy.$$

于是空间的 Stokes 公式变为

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C)} Pdx + Qdy$$

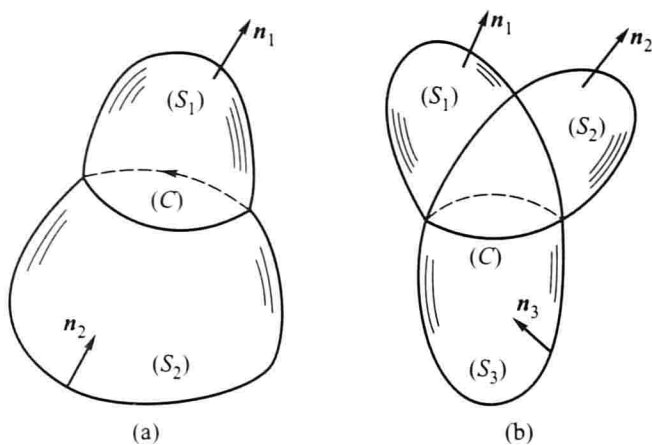


图 7.6.2

由上面已证结果知

$$\begin{aligned}\iint_{(S_1)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{(S_3)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \\ \iint_{(S_2)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{(S_3)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},\end{aligned}$$

所以仍有

$$\iint_{(S_1)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S_2)_+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

问题 7.7 如何理解环量、环量密度与旋度的内涵

(1) 环量

设有空间向量场 $\mathbf{A}(M) \in C((G)), (G) \subset \mathbf{R}^3$, (C) 为 (G) 内任意一条有向闭曲线, $\mathbf{A}$ 在 (C) 的线积分

$$\oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\tau ds \quad (7.7.1)$$

称为 $\mathbf{A}$ 沿有向闭曲线 (C) 的环量.

设想 $\mathbf{A}$ 为域 (G) 内的一流速场, $M(x, y, z)$ 为曲线 (C) 上任一点, 则 $\mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{e}_\tau(M)$ 表示 $\mathbf{A}$ 在点 M 沿曲线 (C) 的切线方向分速度的大小 (图 7.7.1). 于是, $\mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{e}_\tau(M) ds$ 就表示单位时间内, 在 (C) 的微小弧段 (ds) 上的流体沿 (C) 的正切线方向的流量, 从而将微元 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\tau ds$ “无限累加” 所得到的线积分 (7.7.1) 就

近似表示, (7.8.2) 式称为向量场 $\mathbf{A}$ 的平均通量密度. (ΔV) 越向 M 收缩, 近似程度越高. 于是若极限

$$\lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{\oint_{(\Delta S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在, 则称其为向量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 处的通量密度. 它的正负号就确定了 $\mathbf{A}$ 在点 M 处源的正负, 此极限值的大小, 就表征了 $\mathbf{A}$ 在点 M 处源的强度. 易见, $\mathbf{A}$ 在点 M 处的通量密度, 就是通量在点 M 处对闭曲面所围立体体积的变化率. 记作

$$\frac{d\Phi}{dV} = \lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}.$$

(3) 散度

1° 散度的概念

散度的定义: 设有连续向量场 $\mathbf{A}(M)$ ($M \in (V) \subseteq \mathbf{R}^3$), 在 (V) 内点 M 的邻域内任作一包含点 M 而法向量朝外的闭曲面 $(\Delta S) \subseteq (V)$, (ΔS) 所围区域为 (ΔV) , 其体积为 ΔV . 如果让 (ΔS) 所围区域 (ΔV) 以任意方式收缩为点 M 时,

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}$$

的极限存在, 则此极限值称为场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M 的散度, 记作

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(M) = \lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta S)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.8.3)$$

由定义可见, 散度就是通量密度, 也就是在点 M 处通量对体积的变化率.

应当注意, 与梯度和旋度不同, 向量场的散度是一个数量. 对于给定的连续向量场 $\mathbf{A}(M)$, 场域中任一点 M 都对应着一个散度 $\operatorname{div} \mathbf{A}(M)$, 因而散度形成了一个数量场, 称为散度场. 它揭示了场 $\mathbf{A}$ 内各点源的分布与强弱, 当某一点 M 处的散度为正时, 向量场 $\mathbf{A}$ 在此点有正源; 为负时, 有负源; 为零时, 此点处无源, 散度的绝对值给出了源强度的大小.

我们看到, 这样给出的散度定义是与坐标系无关的, 它刻画了向量场 $\mathbf{A}$ 的另一种物理特性.

2° 散度的计算

为了计算场 $\mathbf{A}$ 的散度, 我们在域 (G) 内建立空间直角坐标系. 设 $\mathbf{A}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in C^1((G)), (G) \subset \mathbf{R}^3$.

(2) 无源场及其等价关系

1° 设 $\mathbf{A} = (P, Q, R) \in C^1((G)), (G) \subset \mathbf{R}^3$, 则下列三个结论等价:

(i) 沿 (G) 内任一分块光滑的闭曲面 (S) , 第二型面积分

$$\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv 0;$$

(ii) 在 (G) 内第二型面积分 $\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 的值与积分曲面无关, 仅取决于向量 $\mathbf{A}$ 与有向积分曲面的边界曲线 (C) ;

(iii) $\mathbf{A}$ 是某向量场的旋度场, 即存在一向量值函数 $\mathbf{B}(M) \in C^1((G))$, 使 $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的向量势.

2° 若加强条件 $\mathbf{A} \in C^1((G))$, 且 $(G) \subset \mathbf{R}^3$ 为二维连单通域, 则上述三个结论与结论:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0, \quad \forall (x, y, z) \in (G)$$

等价.

由此可见, 对于无源场 $\mathbf{A}$, 也可用积分和导数两类形式表示. 用积分 $\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv 0$, 对任一闭合曲面 $(S) \subset (G)$ 成立来表示时, 只需要条件 $\mathbf{A} \in C^1((G))$; 用导数形式: $\text{div } \mathbf{A} \equiv 0, \forall (x, y, z) \in (G)$ 表示时, 则需要可导的条件. 但若若要证明 $\text{div } \mathbf{A} \equiv 0$ 与 $\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv 0$ 等价, 则还需要 $\mathbf{A} \in C^1((G))$ 与 (G) 为二维单连通域的条件.

顺便指出, 在 Stokes 公式

$$\iint_{(+S)} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{(+C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

中, 令 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, 则由于 $\mathbf{B}$ 是向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度场, 故由本段结论 (ii) 可知, 面积分

$$\iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S)} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

仅依赖于 $\mathbf{B}$ 和 (S) 的边界曲线 (C) , 而与有向积分曲面 (S) 的形状和大小无关, 这正是我们在问题 7.6 的 (4) 中所证明的事实.

例 7.11.6 计算线积分

$$I = \oint_{(C)} x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz,$$

其中 (C) 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $z=0, x=0, y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 的交线 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ 所组成, 方向如图 7.11.2 所示.

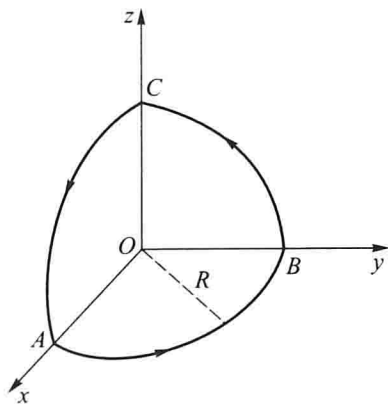


图 7.11.2

解法 1 容易看出被积函数表达式具有轮换对称性. 积分曲线也有相应的轮换对称性, 而且积分曲线的方向与变量的轮换相一致, 即当 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ 时, 被积表达式不变, 且此时积分曲线相应地由 $\widehat{AB} \rightarrow \widehat{BC} \rightarrow \widehat{CA}$.

这意味着沿 $\widehat{AB}$ 的积分

$$\int_{\widehat{AB}} x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz \quad (7.11.1)$$

与变量轮换一次后的积分

$$\int_{\widehat{BC}} y(x-z)dy + z(y-x)dz + x(z-y)dx \quad (7.11.2)$$

仅仅是将被积表达式中的变量与积分路线中相应的变量改用了记号而已, 故它们的值相等. 再注意到 (7.11.1) 式与 (7.11.2) 式中的被积表达式是相同的, 若将变量再轮换一次, 结论类似. 因此,

第八章 无穷级数

问题 8.1 关于正项级数的敛散性

(1) 如何理解比较审敛法

比较审敛法是正项级数敛散性判别最基础与最常用的方法, 该方法的理论基础是数列收敛的单调有界原理. 由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 一定单调增, 所以 “级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是 $\{S_n\}$ 有上界”. 我们通常又将该结论称为正项级数收敛的基本定理, 利用该定理可直接得到正项级数的比较审敛法.

定理 8.1.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 若存在正整数 N , 对 $\forall n > N$, 都有 $a_n \leq b_n$, 则有

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

在使用比较审敛法确定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时, 以下两点是关键:

1° 选择适当的比较标准级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

2° 对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项作适当的放大或缩小, 得到 a_n 与 b_n 的大小关系, 并作出敛散性判断.