普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学 下册

第二版

经济类

吕 雄◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

第二版

下 册

高等数学

经济类

吕雄 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／吕雄主编．—2版．—北京：
中国农业出版社，2013.8
普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等
农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-17987-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吕…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-
教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第174867号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100125）
策划编辑　朱　雷　魏明龙
文字编辑　甘敏敏

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2009年7月第1版　　2013年8月第2版
2013年8月第2版北京第1次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：15
字数：260千字
定价：29.00元

内容提要

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材。分上、下两册出版，下册内容为：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程。每节后均配有适量习题，每章后配有总习题，以巩固所学内容。书末还附有习题答案与提示。

本教材体系完整、结构严谨、由浅入深、循序渐进、通俗易懂，紧密联系实际应用，特别是经济应用，可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他专业高等数学课程的适用教材或教学参考书，也可作为科技人员参考书。

编写人员名单

主　编　吕　雄

副主编　姚贵平　吴国荣

编　者　（按姓名笔画排序）

白树叶　吕　雄　朱艳霞　杨丽英

吴国荣　姚贵平　高　莲　戴云仙

第二版前言

本教材第二版是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材。

本教材第一版是全国高等农林院校“十一五”规划教材，并于2011年11月获全国高等农业院校优秀教材奖。

随着高等农林院校人才培养方案的修订，经济类高等数学课程的教学大纲与教学计划有较大变化，课程性质从公共基础课(必修)调整为公共基础课(必修)+拓展课(选修)，公共基础课的教学时数减少幅度较大，教学内容及教学要求需做出相应的调整，同时也要兼顾课程的科学性、系统性，还要考虑学生考研的需求。本教材第二版是在第一版的基础上，结合新教学大纲与教学计划进行适当删减或加“*”号修订而成，未加“*”号部分主要放在基础课讲授，加“*”号部分主要放在拓展课讲授。

参加本教材第二版修订工作的仍为第一版编写团队。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2013年5月

第一版前言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材。

本教材按照高等学校经济类专业高等数学课程的教学大纲（并参考考研大纲）编写而成。根据该课程的教学分上、下两个学期进行以及每个学期教学进度的安排情况，本教材分为上、下两册，上册包括函数与极限、一元微分学、一元积分学；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、微分方程等知识。本教材各章节选编了较为丰富的习题，书末附有习题答案。为了更好地帮助学生学习，与本教材配套编写了学习指导书。

本教材可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他一些专业高等数学课程的适用教材或教学参考书。

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、着力保持体系的完整性 编排结构严谨；内容由浅入深，循序渐进，通俗易懂；突出微积分的基本思想和方法。使学生能够较好地理解各章节的内在联系，从总体上把握数学的思想和方法的同时，培养学生严密的逻辑思维能力。

二、力求简明实用 由于高等数学逻辑性强、内容抽象、概念与结论较多，因此在给出概念时尽量以简单实例或提出问题的方法引入，力求深入浅出、简单通俗；略去一些十分烦琐的理论证明，直接从现实生活的原理中加以解释说明，使表达简明扼要；引导学生理解概念的内涵及背景，培养学生用数学的思想和方法分析问题、解决问题的能力。

三、结合经济应用 紧密联系实际，尽可能运用各章节的理论与方法处理一些经济管理中的问题，为学生后继学习经济管理等方面的专业知识提供“契合点”。

参加本教材编写工作的是具有丰富教学经验的一线教师，其中第一章由杨丽英编写，第二章由吴国荣编写，第三章由戴云仙编写，第四章和第八章由朱艳霞编写，第五章由吕雄编写，第六章由白树叶编写，第七章由姚贵平编写，第九章和第十章由高莲编写。全书编写大纲及统稿由吕雄完成。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2009 年 3 月

目 录

第 六 章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，把平面上的任一点和一对有序数(x, y)之间建立起一一对应关系，在此基础上，进一步研究了平面曲线与二元方程$F(x, y)=0$的对应关系．这样，一方面使几何问题“解析化”，即化为代数运算；另一方面使代数问题“几何化”，即为代数方程提供几何图形．

空间解析几何与此非常类似，首先建立空间直角坐标系，然后，把空间上任一点和三个有序数(x, y, z)之间建立起一一对应关系，在此基础上，引入物理学、力学以及其他应用科学中用途广泛的向量的概念，再介绍向量的一些运算，然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲线和曲面的部分内容．

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可或缺的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的．

§6.1　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广，我们在空间作三条互相垂直相交的直线Ox、Oy、Oz，它们有相同的单位长度，它们的交点O称为**坐标原点**，Ox称为x**轴**(横轴)，Oy称为y**轴**(纵轴)，Oz称为z**轴**(竖轴)．Ox、Oy、Oz统称为**坐标轴**．通常把x轴和y轴放置在水平面上，而z轴则是铅垂线．它们的正方向符合右手规则：即用右手握住z轴，当右手的四个手指头从x轴正向以角度$\frac{\pi}{2}$转向y轴正向时，大拇指所指的方向就是z轴的正向(图 6－1)，图中箭头的指向表示x

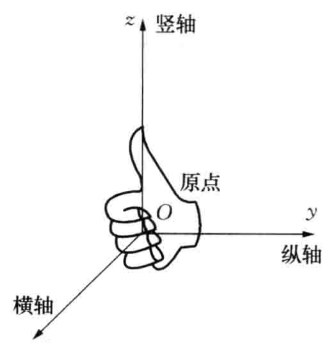

图 6－1

轴、y 轴、z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**.

任意两条坐标轴可以确定一个平面，x 轴和 y 轴所确定的平面称为 **xOy 平面**，y 轴和 z 轴所确定的平面称为 **yOz 平面**，z 轴和 x 轴所确定的平面称为 **zOx 平面**，此三个平面统称为**坐标平面**. 这三个平面把空间分为八个部分，每一个部分称为一个**卦限**. 以 x 轴正半轴、y 轴正半轴、z 轴正半轴为棱的那个卦限称为**第Ⅰ卦限**，在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次为**第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限**. 在 xOy 平面下方第Ⅰ卦限相对的为**第Ⅴ卦限**，然后按逆时针方向依次为**第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限**(图 6－2).

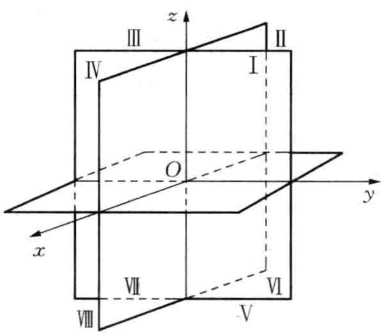

图 6－2

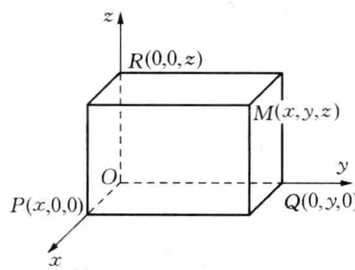

图 6－3

设空间任意一点 M(图 6－3)，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，这三个平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在三条坐标轴上的坐标分别为 x、y、z. 于是空间的任一点 M 就唯一确定了一个有序实数组 x、y、z. 反之，已知一有序实数组 x、y、z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过点 P、Q、R 分别做 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M 便是由有序数组 x、y、z 所确定的唯一的点，这样就建立了空间点 M 和有序数组 x、y、z 之间的一一对应关系. 这组数 x、y、z 叫作点 M 的**坐标**，x、y、z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，坐标为 x、y、z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间任意两点，为了用两点的坐标来表示它们之间的距离 d，我们过 M_1，M_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6－4).

由于$\triangle M_1NM_2$为直角三角形，$\angle M_1NM_2$为直角，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又$\triangle M_1PN$也是直角三角形，且

$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2,$$

所以 $\quad d^2=|M_1M_2|^2$

$$=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

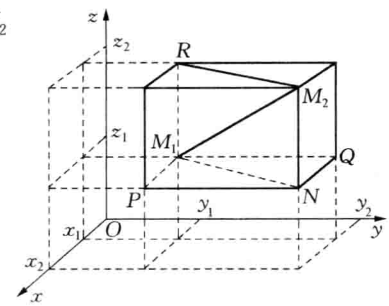

图 6-4

由于 $\quad |M_1P|=|x_2-x_1|,$

$$|PN|=|y_2-y_1|,$$

$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$

所以 $\quad d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$

这就是**空间两点间的距离公式**.

特别地，点$M(x,y,z)$与坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　求证：以三点$A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　因为 $|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$

$$|BC|^2=(2-10)^2+(4-(-1))^2+(3-6)^2=98,$$

$$|CA|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$

所以 $\quad |AB|=|CA|,$

且 $\quad |AB|^2+|CA|^2=|BC|^2,$

所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

例 2　在z轴上求与点$A(-1,0,2)$和$B(1,-1,0)$等距离的点.

解　因为所求的点M在z轴上，所以设该点为$M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即 $\sqrt{(0+1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+1)^2+(z-0)^2},$

解得 $\quad z=\dfrac{3}{4},$

故所求的点为$\left(0,0,\dfrac{3}{4}\right)$.

习 题 6.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点分别在哪个卦限.

$A(1, -3, 2)$；$B(1, 2, -2)$；$C(3, -2, -3)$；$D(-1, -2, 3)$.

2. 坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：
$A(1, 2, 0)$；$B(0, 3, 4)$；$C(1, 0, 0)$；$D(0, -2, 0)$.

3. 求点(a, b, c)关于(1)各坐标平面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点$M(4, -3, 5)$到各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 平面上，求与三个已知点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$和$C(0, 5, 1)$等距离的点.

6. 求证：以$M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

§6.2 向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到两种不同类型的量，一种只有大小没有方向的量，叫作**数量**或**标量**，如时间、面积、体积等．一种既有大小又有方向的量，叫作**向量**或**矢量**，如速度、力、电场强度等．

向量通常可用一条有向线段来表示．线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向．以 M_1 为起点、M_2 为终点的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 6－5）．有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量．例如，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$ 等．

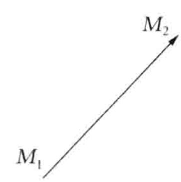

图 6－5

向量的大小称为向量的**模**或**长度**．向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$．模等于 1 的向量叫作**单位向量**．模等于零的向量叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$．零向量的方向可以看作是任意的．

在实际问题中，有些向量与其始点的位置有关，有些与其始点的位置无关．与始点位置无关的向量，称为**自由向量**．一般，我们只讨论自由向量．因而，只要不改变其大小和方向，可以将一向量在空间任意地平行移动．如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，就称这**两个向量相等**，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由于我们讨论的是自由向量，平行向量可以平行移动而位于同一直线上，故平行的向量又是**共线向量**．另外，平行于同一平面的向量也可以平行地移动到同一平面上，因此平行于同一平面的向量，也称为**共面向量**．

为了书写与讨论方便，下面引入两个记号：

(1) 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反的向量记为 $-\boldsymbol{a}$ (图6－6).

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；同向平行时，记为 $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$；反向平行时，记为 $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$.

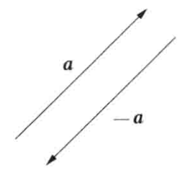

图 6－6

二、向量的加减法

根据力学等实际问题中向量的加法(如力的合成、速度的合成等)服从平行四边形法则，于是抽象出向量的加法定义如下：

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$(图 6－7)，取对角线 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种定义两个向量加法的方法叫作**平行四边形法则**.

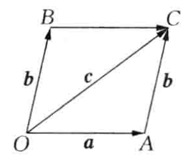

图 6－7

如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 按照下列方法确定：若 $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，若 $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中模较大者方向相同，且 $|\boldsymbol{c}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

由于 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，若把第二个向量的始点平移到第一个向量的终点，则以第一个向量的起点 O 为起点，以第二个向量的终点 C 为终点的向量 $\overrightarrow{OC}$，就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，这种求向量和的方法叫作**三角形法则**.

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和的情形，只需将前一个向量的终点作为后一个向量的始点，相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，然后从第一个向量的始点向最后一个向量的终点引一个向量，此向量即为这 n 个向量的和(图 6－8)，$\overrightarrow{OD}$ 就是四个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的和，即

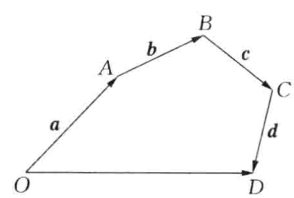

图 6－8

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

向量的加法符合下列**运算规律**：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) **结合律**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这两个规律从图 6－9(a)、(b)中很容易得知.

由向量的加法及负向量的定义得向量的减法：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

显然，对任意向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}，\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$