



普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

下册

第二版

经济类

吕 雄◎主编

 中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

第二版

下 册

高等数学

经济类

吕雄 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 下册 / 吕雄主编. —2 版. —北京:
中国农业出版社, 2013. 8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等
农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17987-5

I. ①高… II. ①吕… III. ①高等数学-高等学校-
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 174867 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 甘敏敏

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2009 年 7 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版

2013 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 15

字数: 260 千字

定价: 29.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内容提要

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材。分上、下两册出版，下册内容为：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程。每节后均配有适量习题，每章后配有总习题，以巩固所学内容。书末还附有习题答案与提示。

本教材体系完整、结构严谨、由浅入深、循序渐进、通俗易懂，紧密联系实际应用，特别是经济应用，可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他专业高等数学课程的适用教材或教学参考书，也可作为科技人员参考书。

编写人员名单

主 编 吕 雄

副主编 姚贵平 吴国荣

编 者 （按姓名笔画排序）

白树叶 吕 雄 朱艳霞 杨丽英

吴国荣 姚贵平 高 莲 戴云仙

第二版前言

本教材第二版是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材。

本教材第一版是全国高等农林院校“十一五”规划教材，并于2011年11月获全国高等农业院校优秀教材奖。

随着高等农林院校人才培养方案的修订，经济类高等数学课程的教学大纲与教学计划有较大变化，课程性质从公共基础课(必修)调整为公共基础课(必修)+拓展课(选修)，公共基础课的教学时数减少幅度较大，教学内容及教学要求需做出相应的调整，同时也要兼顾课程的科学性、系统性，还要考虑学生考研的需求。本教材第二版是在第一版的基础上，结合新教学大纲与教学计划进行适当删减或加“*”号修订而成，未加“*”号部分主要放在基础课讲授，加“*”号部分主要放在拓展课讲授。

参加本教材第二版修订工作的仍为第一版编写团队。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2013年5月

第一版前言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材。

本教材按照高等学校经济类专业高等数学课程的教学大纲（并参考考研大纲）编写而成。根据该课程的教学分上、下两个学期进行以及每个学期教学进度的安排情况，本教材分为上、下两册，上册包括函数与极限、一元微分学、一元积分学；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、微分方程等知识。本教材各章节选编了较为丰富的习题，书末附有习题答案。为了更好地帮助学生学习，与本教材配套编写了学习指导书。

本教材可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他一些专业高等数学课程的适用教材或教学参考书。

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、着力保持体系的完整性 编排结构严谨；内容由浅入深，循序渐进，通俗易懂；突出微积分的基本思想和方法。使学生能够较好地理解各章节的内在联系，从总体上把握数学的思想和方法的同时，培养学生严密的逻辑思维能力。

二、力求简明实用 由于高等数学逻辑性强、内容抽象、概念与结论较多，因此在给出概念时尽量以简单实例或提出问题的方法引入，力求深入浅出、简单通俗；略去一些十分烦琐的理论证明，直接从现实生活的原理中加以解释说明，使表达简明扼要；引导学生理解概念的内涵及背景，培养学生用数学的思想和方法分析问题、解决问题的能力。

三、结合经济应用 紧密联系实际, 尽可能运用各章节的理论与方法处理一些经济管理中的问题, 为学生后继学习经济管理等方面的专业知识提供“契合点”。

参加本教材编写工作的是具有丰富教学经验的一线教师, 其中第一章由杨丽英编写, 第二章由吴国荣编写, 第三章由戴云仙编写, 第四章和第八章由朱艳霞编写, 第五章由吕雄编写, 第六章由白树叶编写, 第七章由姚贵平编写, 第九章和第十章由高莲编写。全书编写大纲及统稿由吕雄完成。

由于编者水平有限, 不足、疏漏、错谬之处在所难免, 敬请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2009年3月

目 录

第二版前言

第一版前言

第六章 向量代数与空间解析几何	1
§ 6.1 空间直角坐标系	1
一、空间点的直角坐标 (1) 二、空间两点间的距离 (2) 习题 6.1 (3)	
§ 6.2 向量及其线性运算	4
一、向量的概念 (4) 二、向量的加减法 (5) 三、向量与数量的乘法 (6)	
习题 6.2 (7)	
§ 6.3 向量的坐标表示法	7
一、向量及其线性运算的坐标表示 (7) 二、向量的模及方向的坐标表示 (9)	
习题 6.3 (10)	
§ 6.4 向量的乘法	10
一、数量积 (10) 二、向量积 (12) * 三、三个向量的混合积 (14)	
习题 6.4 (15)	
§ 6.5 平面方程	16
一、平面的点法式方程 (16) 二、平面的一般方程 (17)	
三、有关平面的一些问题 (18) 习题 6.5 (20)	
§ 6.6 空间直线方程	21
一、空间直线的点向式及参数方程 (21) 二、直线的一般方程 (22)	
三、直线与直线、直线与平面的一些问题 (23) 习题 6.6 (24)	
§ 6.7 空间的曲面与曲线	25
一、曲面方程 (25) 二、空间曲线的方程 (29) 三、曲线在坐标面上的投影 (30)	
四、几种常见的二次曲面 (31) 习题 6.7 (34)	
总习题六	35

第七章 多元函数微分学	37
§ 7.1 多元函数的基本概念	37
一、平面点集及 n 维空间 (37)	
二、多元函数的概念 (40)	
三、多元函数的极限 (41)	
四、多元函数的连续性 (44)	
习题 7.1 (45)	
§ 7.2 偏导数	46
一、偏导数的定义及其计算 (46)	
二、高阶偏导数 (49)	
习题 7.2 (51)	
§ 7.3 全微分	51
一、全微分的概念 (51)	
* 二、全微分在近似计算中的应用 (55)	
习题 7.3 (55)	
§ 7.4 多元复合函数的求导法则	56
一、复合函数的中间变量均为一元函数的情形 (56)	
二、复合函数的中间变量均为多元函数的情形 (57)	
三、复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数的情形 (58)	
四、全微分的形式不变性 (60)	
习题 7.4 (62)	
§ 7.5 隐函数求导法则	62
一、单个方程的情形 (63)	
* 二、方程组的情形 (66)	
习题 7.5 (69)	
* § 7.6 微分法的几何应用	69
一、空间曲线的切线与法平面 (69)	
二、曲面的切平面与法线方程 (74)	
习题 7.6 (78)	
§ 7.7 多元函数的极值	78
一、多元函数的极值及最大值、最小值 (78)	
* 二、条件极值 拉格朗日(Lagrange)乘数法 (81)	
习题 7.7 (85)	
总习题七	86
第八章 重积分	88
§ 8.1 二重积分	88
一、二重积分的概念 (88)	
二、二重积分的性质 (91)	
三、直角坐标系下二重积分的计算 (92)	
四、极坐标系下二重积分的计算 (98)	
五、二重积分的应用 (102)	
习题 8.1 (105)	
* § 8.2 三重积分	108
一、三重积分的概念与性质 (108)	
二、三重积分的计算 (109)	
习题 8.2 (113)	
总习题八	114
第九章 无穷级数	117
§ 9.1 常数项级数的概念与性质	117

一、常数项级数的概念 (117)	二、收敛级数的基本性质 (120)	
* 三、柯西审敛原理 (123)	习题 9.1 (123)	
§ 9.2 常数项级数的审敛法		124
一、正项级数及其审敛法 (124)	二、交错级数及其审敛法 (131)	
三、绝对收敛与条件收敛 (133)	习题 9.2 (134)	
§ 9.3 幂级数		135
一、函数项级数的概念 (135)	二、幂级数及其收敛性 (136)	
三、幂级数的运算与性质 (140)	习题 9.3 (143)	
§ 9.4 函数展开成幂级数		144
一、泰勒(Taylor)级数 (144)	二、函数展开成幂级数 (146)	习题 9.4 (151)
* § 9.5 泰勒级数的应用		152
一、函数值的近似计算 (152)	二、积分的近似计算 (155)	
三、欧拉(Euler)公式 (156)	习题 9.5 (157)	
总习题九		158
第十章 微分方程		160
§ 10.1 微分方程的基本概念		160
一、引例 (160)	二、微分方程的基本概念 (162)	习题 10.1 (165)
§ 10.2 一阶微分方程		165
一、可分离变量的微分方程 (166)	二、齐次方程 (169)	
三、一阶线性微分方程 (173)	习题 10.2 (178)	
§ 10.3 可降阶的高阶微分方程		179
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 (180)	二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 (181)	
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 (182)	习题 10.3 (183)	
§ 10.4 高阶线性微分方程及其解的结构		183
一、二阶齐次线性微分方程的通解的结构 (184)		
二、二阶非齐次线性微分方程的通解的结构 (185)	习题 10.4 (187)	
§ 10.5 二阶常系数齐次线性微分方程		187
习题 10.5 (193)		
* § 10.6 二阶常系数非齐次线性微分方程		193
一、 $f(x)=e^{kx}P_m(x)$ 型 (194)		
二、 $f(x)=e^{kx}[P_l(x)\cos \omega x+P_n(x)\sin \omega x]$ 型 (197)	习题 10.6 (200)	
§ 10.7 微分方程在经济学中的应用		201
一、分析商品的市场价格与需求量(供应量)之间的函数关系 (201)		
二、分析产量、收入、成本及利润之间的函数关系 (201)		
三、关于国民收入、储蓄与投资的关系 (202)		

四、关于国民收入与国民债务问题 (202)	
五、关于商品的销售成本与存贮费用的关系问题 (203)	
六、关于商品使用过程中的维修问题 (203)	
七、其他方面的应用 (204)	
习题 10.7 (205)	
总习题十	205
习题答案与提示	207
参考文献	224

第 六 章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,我们建立了平面直角坐标系,把平面上的任一点和一对有序数 (x, y) 之间建立起一一对应关系,在此基础上,进一步研究了平面曲线与二元方程 $F(x, y)=0$ 的对应关系.这样,一方面使几何问题“解析化”,即化为代数运算;另一方面使代数问题“几何化”,即为代数方程提供几何图形.

空间解析几何与此非常类似,首先建立空间直角坐标系,然后,把空间上任一点和三个有序数 (x, y, z) 之间建立起一一对应关系,在此基础上,引入物理学、力学以及其他应用科学中用途广泛的向量的概念,再介绍向量的一些运算,然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲线和曲面的部分内容.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可或缺的一样,空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

§ 6.1 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广,我们在空间作三条互相垂直相交的直线 Ox 、 Oy 、 Oz ,它们有相同的单位长度,它们的交点 O 称为坐标原点, Ox 称为 x 轴(横轴), Oy 称为 y 轴(纵轴), Oz 称为 z 轴(竖轴). Ox 、 Oy 、 Oz 统称为坐标轴.通常把 x 轴和 y 轴放置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线.它们的正方向符合右手规则:即用右手握住 z 轴,当右手的四个手指头从 x 轴正向以角度 $\frac{\pi}{2}$ 转向 y 轴正向时,大拇指所指的方向就是 z 轴的正向(图6-1),图中箭头的指向表示 x

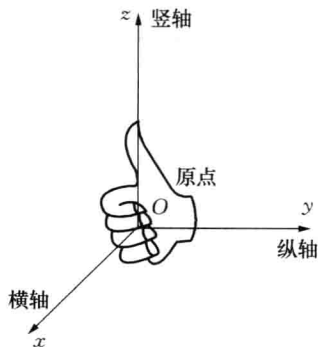


图 6-1

轴、 y 轴、 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系。

任意两条坐标轴可以确定一个平面， x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面， y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 平面， z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 平面，此三个平面统称为坐标平面。这三个平面把空间分为八个部分，每一个部分称为一个卦限。以 x 轴正半轴、 y 轴正半轴、 z 轴正半轴为棱的那个卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限。在 xOy 平面下方第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，然后按逆时针方向依次为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(图6-2)。

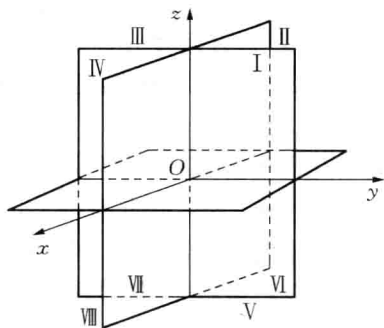


图 6-2

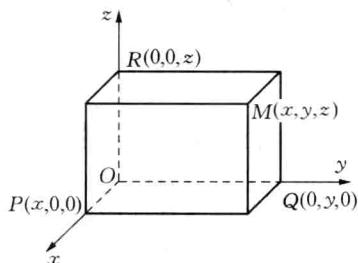


图 6-3

设空间任意一点 M (图6-3)，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴，这三个平面与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P 、 Q 、 R ，这三点在三条坐标轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z 。于是空间的任一点 M 就唯一确定了一个有序实数组 x 、 y 、 z 。反之，已知一有序实数组 x 、 y 、 z ，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P ，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q ，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R ，然后通过点 P 、 Q 、 R 分别做 x 轴、 y 轴、 z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M 便是由有序数组 x 、 y 、 z 所确定的唯一的点，这样就建立了空间点 M 和有序数组 x 、 y 、 z 之间的一一对应关系。这组数 x 、 y 、 z 叫作点 M 的坐标， x 、 y 、 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，坐标为 x 、 y 、 z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$ 。

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间任意两点，为了用两点的坐标来表示它们之间的距离 d ，我们过 M_1 ， M_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面。这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图6-4)。

由于 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形, $\angle M_1NM_2$ 为直角, 所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

所以 $d^2 = |M_1M_2|^2$

$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

由于 $|M_1P| = |x_2 - x_1|$,

$$|PN| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以 $d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

这就是空间两点间的距离公式.

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 求证: 以三点 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为 $|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49$,

$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4-(-1))^2 + (3-6)^2 = 98,$$

$$|CA|^2 = (2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2 = 49,$$

所以 $|AB| = |CA|$,

且 $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$,

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 2 在 z 轴上求与点 $A(-1, 0, 2)$ 和 $B(1, -1, 0)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

$$\text{即 } \sqrt{(0+1)^2 + (0-0)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0+1)^2 + (z-0)^2},$$

$$\text{解得 } z = \frac{3}{4},$$

故所求的点为 $(0, 0, \frac{3}{4})$.

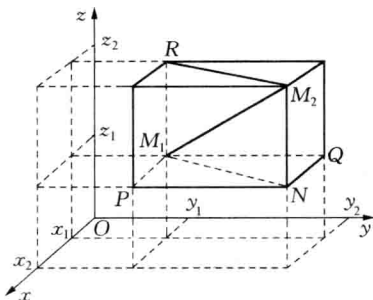


图 6-4

习 题 6.1

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点分别在哪个卦限.

$A(1, -3, 2); B(1, 2, -2); C(3, -2, -3); D(-1, -2, 3)$.

2. 坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$A(1, 2, 0); B(0, 3, 4); C(1, 0, 0); D(0, -2, 0)$.

3. 求点 (a, b, c) 关于(1)各坐标平面; (2)各坐标轴; (3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 平面上, 求与三个已知点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

6. 求证: 以 $M_1(4, 3, 1)$ 、 $M_2(7, 1, 2)$ 、 $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

§ 6.2 向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时, 常会遇到两种不同类型的量, 一种只有大小没有方向的量, 叫作**数量**或**标量**, 如时间、面积、体积等. 一种既有大小又有方向的量, 叫作**向量**或**矢量**, 如速度、力、电场强度等.

向量通常可用一条有向线段来表示. 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、 M_2 为终点的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 6-5). 有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量. 例如, 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{v}$ 等.

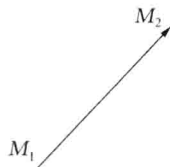


图 6-5

向量的大小称为向量的**模**或**长度**. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\mathbf{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\mathbf{a}|$. 模等于 1 的向量叫作**单位向量**. 模等于零的向量叫作**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

在实际问题中, 有些向量与其始点的位置有关, 有些与其始点的位置无关. 与始点位置无关的向量, 称为**自由向量**. 一般, 我们只讨论自由向量. 因而, 只要不改变其大小和方向, 可以将一向量在空间任意地平行移动. 如果两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模相等, 且方向相同, 就称这两个向量相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

由于我们讨论的是自由向量, 平行向量可以平行移动而位于同一直线上, 故平行的向量又是**共线向量**. 另外, 平行于同一平面的向量也可以平行地移动到同一平面上, 因此平行于同一平面的向量, 也称为**共面向量**.

为了书写与讨论方便,下面引入两个记号:

(1) 与向量 a 的模相等,而方向相反的向量记为 $-a$ (图6-6).

(2) 向量 a 与 b 平行时,记为 $a \parallel b$; 同向平行时,记为 $a \uparrow b$; 反向平行时,记为 $a \downarrow b$.

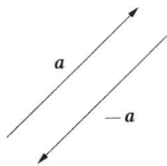


图 6-6

二、向量的加减法

根据力学等实际问题中向量的加法(如力的合成、速度的合成等)服从平行四边形法则,于是抽象出向量的加法定义如下:

设 $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$ (图6-7), 取对角线 $\overrightarrow{OC} = c$, 称为向量 a 与 b 的和, 记作 $c = a + b$. 这种定义两个向量加法的方法叫作平行四边形法则.

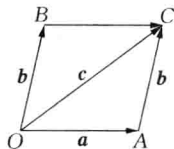


图 6-7

如果 $a \parallel b$, 则规定 $c = a + b$ 按照下列方法确定: 若 $a \uparrow b$, 则 c 与 a 、 b 方向相同, 且 $|c| = |a| + |b|$; 若 $a \downarrow b$, 则 c 与 a 、 b 中模较大者方向相同, 且 $|c| = ||a| - |b||$.

由于 $b = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, 若把第二个向量的始点平移到第一个向量的终点, 则以第一个向量的起点 O 为起点, 以第二个向量的终点 C 为终点的向量 $\overrightarrow{OC}$, 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和, 这种求向量和的方法叫作三角形法则.

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和的情形, 只需将前一个向量的终点作为后一个向量的始点, 相继作出向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 然后从第一个向量的始点向最后一个向量的终点引一个向量, 此向量即为这 n 个向量的和 (图6-8), $\overrightarrow{OD}$ 就是四个向量 a, b, c, d 的和, 即

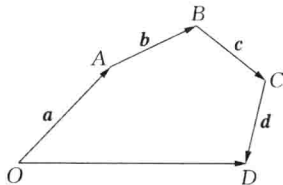


图 6-8

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = a + b + c + d.$$

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律: $a + b = b + a$.

(2) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

这两个规律从图6-9(a)、(b)中很容易得知.

由向量的加法及负向量的定义得向量的减法:

$$a - b = a + (-b).$$

显然, 对任意向量 a , 有

$$a - a = a + (-a) = 0, \quad a + 0 = 0 + a = a.$$