

WUTP

面向21世纪
高职高专计算机类
专业新编系列教材

Discrete
Mathematics

离散数学

主编 郭荣冰 常荆燕

武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

面向 21 世纪高职高专计算机类专业新编系列教材

Discrete Mathematics

离散数学

主 编	郭荣冰	常荆燕		
副主编	杨敬华			
编 委	候谦民	潘于丰	周 田	
	郭华栋	王叔宝	方 鹏	
	苏丽雅			

武汉理工大学出版社

Wuhan University of Technology Press

内 容 提 要

本书是根据教育部颁发的关于高职高专“离散数学”课程的基本要求而编写的“创新”教材,它共分为数理逻辑,集合、关系与函数,代数系统,图论等四章内容。用“类比法”、“对偶法”突出实用,通俗易懂,由浅入深,通过五个环节,便于培养学生自学和解决问题的能力。

本书可作为高职高专计算机专业及相关专业的教材,还可供技术人员自学或教师教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/郭荣冰,常荆燕主编. —武汉:武汉理工大学出版社,2004.4
面向 21 世纪高职高专计算机类专业新编系列教材
ISBN 7-5629-2057-5

I. 离… II. ① 郭… ② 常… III. 数学-离散数学-教材 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 005351 号

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号 邮政编码:430070)

HTTP://www.techbook.com.cn

E-mail:duanchao@mail.whut.edu.cn tiandq@mail.whut.edu.cn

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:安陆鼎鑫印务有限责任公司

开 本:787×960 1/16

印 张:8.5

字 数:167 千字

版 次:2004 年 4 月第 1 版

印 次:2004 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1~5000 册

定 价:12.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。本社购书热线电话:(027)87397097 87394412

前 言

《离散数学》是根据高职、高专对《离散数学》部分的“基本要求和规格”的要求,充分参考高职、高专和成人高校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果,结合多年教学实践而编写出来的.它是高职、高专及成人高校创新的《离散数学》教材.

本教材适当降低理论深度,突出实用分析、实用运算方法和实用论证方法,着重基本技能训练而不过分追求技巧.其创新意识体现在以下三个方面:

1. 以集合为主线,用“类比法”作为解题思路为解决主线的主要方法.例如:用学生在高中熟悉的集合 A 、 B 的交集“ $\cap$ ”,并集“ $\cup$ ”,补集“ $\bar{A}$ ”,包含“ $A \subseteq B$ ”,相等“ $A = B$ ”与命题逻辑中的 P 、 Q 的合取“ $\wedge$ ”,析取“ $\vee$ ”,否定“ $\neg$ ”,蕴含“ $P \Rightarrow Q$ ”,等价“ $P \Leftrightarrow Q$ ”相类比,从而得出 24 个“等价式”和 16 个“蕴含式”,在命题演算中和谓词演算中加以应用.而关系、代数系统以及图论也都是集合中的特例.

2. 利用简单易记忆的语句来说明和讲清理论、概念性质及有关定理,突出如何应用理论、概念性质及有关定理来解题.例如图论中的求最小生成树的克鲁斯卡尔算法,可用“选小不成圈”方法,即可求出最小生成树.如此深入浅出的方法,更能帮助学生提高分析和解决问题的能力.

3. 每章章前有“本章提要”,每节按“概念—概念性质—应用范例及分析—习题”等四个重要的教与学的环节进行,便于学生听课、自学及练习.每章讲完有“本章小结与练习”,同时有“习题与思考题”,以便学生学完后进行总的自测与复习,以做到“心中有数”来参加本课程考试.

本教材的形成与编写得到了有关领导、有关教师及编委会有关专家的大力支持和帮助,在此一并致谢.我们希望本教材能成为学生的良师与教师的益友.在编写中虽然经作者们精心构思、创新,多次把关审定稿件,但由于水平有限,加上创新试用,难免存在不足和疏漏之处,恳请读者批评指正,以便再版时修改.

编 者

2004 年 2 月

目 录

1 数理逻辑	(1)
1.1 命题、联结词与公式	(1)
1.1.1 基本概念	(1)
1.1.2 命题联结词及其真值表	(2)
1.1.3 实例分析	(4)
1.1.4 公式 G 的种类	(5)
习题 1.1	(6)
1.2 公式的等价与蕴含	(7)
1.2.1 公式的等价与 24 个基本等价式	(7)
1.2.2 公式的蕴含与 16 个基本蕴含式	(9)
习题 1.2	(10)
1.3 公式的主范式	(11)
1.3.1 主析取范式	(11)
1.3.2 主合取范式	(13)
习题 1.3	(15)
1.4 推理理论	(15)
习题 1.4	(18)
1.5 谓词逻辑	(18)
1.5.1 谓词逻辑的基本概念	(19)
1.5.2 语句命题的谓词形式符号化	(20)
1.5.3 谓词公式	(20)
习题 1.5	(24)
2 集合、关系和函数	(26)
2.1 集合和集合的运算	(26)
2.1.1 集合的基本概念	(26)
2.1.2 集合的运算	(28)
2.1.3 集合运算中等值式与命题公式的“等价式”一致	(28)
2.1.4 序偶和笛卡尔积	(28)
习题 2.1	(30)

2.2 关系	(31)
2.2.1 二元关系 R	(31)
2.2.2 关系 R 的表示与性质	(31)
2.2.3 关系的运算	(33)
2.2.4 集合 A 上的关系 R 的闭包问题——包含关系 R 的有用性质(自反性、对称性、传递性)的最小关系问题	(36)
习题 2.2	(37)
2.3 等价关系和集合的划分	(37)
2.3.1 等价关系	(37)
2.3.2 A 的划分 s	(38)
2.3.3 A 关于等价关系 R 的商集 A/R	(38)
习题 2.3	(39)
2.4 序关系和哈斯图	(40)
2.4.1 偏序关系及其哈斯图	(40)
2.4.2 其他序关系	(41)
习题 2.4	(44)
2.5 函数	(44)
2.5.1 函数的概念	(44)
2.5.2 几种特殊的函数及其特点	(45)
2.5.3 函数的表示	(46)
2.5.4 复合函数与逆函数	(46)
习题 2.5	(47)
3 代数结构	(50)
3.1 代数系统	(50)
3.1.1 运算及其封闭性	(50)
3.1.2 代数系统	(51)
3.1.3 子代数	(55)
习题 3.1	(57)
3.2 半群和独异点	(57)
3.2.1 半群	(57)
3.2.2 独异点	(58)
习题 3.2	(59)
3.3 群与子群	(60)
3.3.1 群的概念	(60)

3.3.2	群 $\langle G; * \rangle$ 的一个子群 $\langle H; * \rangle$	(62)
习题 3.3		(63)
3.4*	环与域	(64)
3.4.1	环	(64)
3.4.2	环的性质定理	(65)
3.4.3	几种特殊的环	(65)
习题 3.4		(67)
3.5	格、子格与布尔代数	(67)
3.5.1	格的概念	(67)
3.5.2	几种特殊的格	(70)
3.5.3	布尔代数	(73)
习题 3.5		(74)
4	图论	(76)
4.1	图的基本概念	(76)
4.1.1	图 G 的定义	(76)
4.1.2	图的种类	(77)
4.1.3	图的一些术语	(77)
4.1.4	图的性质	(79)
4.1.5	特殊图	(79)
习题 4.1		(82)
4.2	图的连通性	(83)
4.2.1	无向图的连通性	(83)
4.2.2	有向图的连通性	(84)
习题 4.2		(88)
4.3	图的矩阵表示	(89)
4.3.1	图 G 的邻接矩阵	(89)
4.3.2	图 G 的可达矩阵(又称路径矩阵)	(91)
习题 4.3		(92)
4.4	树、生成树、有向树及其应用	(92)
4.4.1	树的基本概念	(92)
4.4.2	有向树的基本概念	(94)
习题 4.4		(97)
4.5	欧拉图、哈密顿图、平面图	(98)
4.5.1	欧拉图的基本概念及其有关定理和应用	(98)

4.5.2 哈密顿图的基本概念及其有关定理和应用	(99)
4.5.3 平面图	(101)
习题 4.5	(103)
参考答案	(105)
参考文献	(126)

1 数理逻辑

本章提要

数理逻辑(又称数理演算),它是用数学方法来研究推理形式结构和推理规律的数学学科.它的基本特点是用数学的方法研究逻辑.其基本内容包括命题逻辑(以命题为基本对象的一个数字化的逻辑系统称命题逻辑)和谓词逻辑(又称一阶逻辑,它是对简单命题作进一步分析,分解出其中的个体词、谓词、量词等,研究它们的形式结构及逻辑关系,总结出正确的推理形式和规则).其研究的中心问题是推理(演算),而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句(即命题),它们构成了推理的基本单位.

1.1 命题、联结词与公式

1.1.1 基本概念

(1) 命题

能判断真假的陈述句称为命题.用大写字母 $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$ 表示.

真:若一个命题 A 是真的(即真实的),称其真值为“真”或用“T”或“1”来表示命题 A 的真值.

假:若一个命题 B 是假的(即虚假的),称其真值为“假”或用“F”或“0”来表示命题 B 的真值.

例如:

A :“北京是中国的首都.”为真命题,真值为“1”;

B :“雪是黑的.”为假命题,其真值为“0”;

C :“你来吗?”和 D :“请把门关上!”不是命题,故无所谓真假.

(2) 命题的种类

① 原子命题:不能再分解的命题(又称简单命题或者称为不带联结词的命题).

② 复合命题:经过一些联结词($\neg, \wedge, \vee, \forall, \rightarrow, \leftrightarrow$)复合而成的命题.

1.1.2 命题联结词及其真值表

1.1.2.1 命题联结词

(1) 否定:若 P 是一个命题,而“ P 是不对的”也是命题,称为原命题 P 的否定.记为 $\neg P$.

例如:

P :雪是黑的,真值为“假”或“0”; $\neg P$:雪不是黑的,真值为“真”或“1”.

P :武汉是中国的城市,真值为“真”或“1”; $\neg P$:武汉不是中国的城市,真值为“假”或“0”.

显然 P 与 $\neg P$ 的真值,正好相反.

(2) 合取:若 P, Q 是两个命题,则“ P 且 Q ”称为 P 和 Q 的合取,记为 $P \wedge Q$.

例如:

P : $1+1=2$; Q :雪是白的; R : $3 \times 3=5$.

$P \wedge Q$:“ $1+1=2$ 且 雪是白的”为真命题,真值为“1”.

$P \wedge R$:“ $1+1=2$ 且 $3 \times 3=5$ ”为假命题,真值为“0”.

(3) 析取:若 P, Q 是两个命题,则“ P 或者 Q ”称为 P 和 Q 的析取,记为 $P \vee Q$.

例如:

P : $1+1=2$; Q :雪是白的; R : $3 \times 3=5$.

$P \vee Q$: $1+1=2$ 或 雪是白的,为真命题,真值为“1”.

$P \vee R$: $1+1=2$ 或 $3 \times 3=5$,为真命题,真值为“1”.

(4) 异或:若 P, Q 为命题,则“ P 或 Q 恰有一个成立”,称为 P 和 Q 的异或,记为 $P \nabla Q$.

例如:

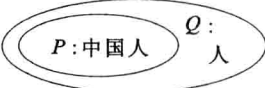
P :第一节课上数学; Q :第一节课上英语.

$P \nabla Q$:第一节课或者上数学或者上英语.

(5) 蕴含:设 P, Q 是两个命题,“如果 P , 则 Q ”称为 P 蕴含 Q ,记为 $P \rightarrow Q$. 有些教材称 $P \rightarrow Q$ 为“条件”.

例如:

P :他是中国人; Q :他是人. 故有“ $P \rightarrow Q$ ”:他是中国人则他是人. 有些“类似”

集合的“ $P \subseteq Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$ ”即  的关系.

(6) 等值: 设 P, Q 是两个命题, 则“ P 当且仅当 Q ”, 称为 P 等值 Q , 记为 $P \leftrightarrow Q$. 有些教材称为“双条件”, 且记为 $P \leftrightarrow Q$ 或 $P \text{ iff } Q$ (若用集合观点来看: $P \leftrightarrow Q$ “相当于” $P = Q$. 同理, 若用集合上理解: $\neg P$ “相当于” $\bar{P}$; $P \wedge Q$ “相当于” $P \cap Q$; $P \vee Q$ “相当于” $P \cup Q$; $P \vee Q$ 相当于 $(P - Q) \cup (Q - P)$ 等.

1.1.2.2 命题联结词的真值表

(1) 命题公式

对于命题变元的标识符号 $P, Q, R, \dots$ (也为命题变, 它们的取值仅“0”或“1”两种) 的表达式称为命题公式. 命题公式在命题变元未赋值之前不能判别真假, 故不是命题. 对命题公式中每一标识符号均指派一个命题真值之后, 原命题公式才能推理出真假, 方为命题. 命题公式常用“ G ”表示.

(2) 公式 G 的真值表

对于一个公式 G , 将 G 在其所解释下所取真值列成一个表, 称为 G 的真值表.

(3) 基本公式“ $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ ”等基本联结词的真值表的写法

为了便于大家记忆和熟练上述基本联结词的基本公式的真值表, 可用下面“小诗”的方法来写出其真值表, 即

否定相反合似“积”; 析取如并, 并如“和”;

P 假蕴真, P 真随 Q ; 0 像“负 1”, 等像积;

异或相异值 1.

注: “假, 0, F”或“真, 1, T”.

如: 否定相反合似积:

P	$\neg P$
0	1
1	0

;

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

;

$\vee$ $\cup$ $\cup$
析取如并, 并如“和”:

P	Q	$P \vee Q$	
0	0	0	
0	1	1	;
1	0	1	
1	1	1	

$\rightarrow$
 P 假蕴真, P 真随 Q :

P	Q	$P \rightarrow Q$	
0	0	1	
0	1	1	;
1	0	0	
1	1	1	

$\leftrightarrow$
0 像“负 1”, 等像积:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	
0	0	1	
0	1	0	;
1	0	0	
1	1	1	

$\forall$
异或相异值为 1:

P	Q	$P \forall Q$	
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

1.1.3 实例分析

【例 1.1】 判断下列句子中哪些构成命题,若是命题,判定它的真值.

- (1) 8 是偶数; (2) 雪是黑的; (3) $3+8>9$;
(4) 明年国庆节是个晴天; (5) 我是大学生; (6) 火星上有生物;
(7) 今天下午有会吗? (8) 请勿吸烟! (9) $x+y>8$.

答:(1),(2),(3),(4),(5),(6)都是命题. 其中(1)的真值为“1”; (2) 为“0”; (3) 为“1”; (4) 目前不能确定,只有到明年国庆节时方能确定,但也是命题; (5) 为“1”; (6) 为“1”; 而(7),(8),(9)都不是命题,故无所谓真假.

【例 1.2】 将下列命题符号化.

- (1) 小王不是大学生; (2) 李敏工作努力且身体好;
(3) 王强是这次校运动会的跳高或 100 米短跑的冠军;

- (4) 明天下午我乘 14 次或 22 次列车去北京;
 (5) 如果我有就学机会,那么我必用功读书;
 (6) 两个三角形全等,当且仅当它们三组对应边相等.

解 (1) P :小王是大学生.

$\therefore$ (1) 为 $\neg P$.

(2) P :李敏工作努力; Q :李敏身体好.

$\therefore$ (2) 为 $P \wedge Q$.

(3) P :王强是这次校运动会的跳高冠军; Q :王强是这次校运动会的 100 米短跑冠军.

$\therefore$ (3) 为 $P \vee Q$.

(4) P :明天下午我乘 14 次列车去北京; Q :明天下午我乘 22 次列车去北京.

$\therefore$ (4) 为 $P \vee Q$.

(5) P :我有就学机会; Q :我用功读书.

$\therefore$ (5) 为 $P \rightarrow Q$.

(6) P :两个三角形全等; Q :两个三角形的三组对应边相等.

$\therefore$ (6) 为 $P \leftrightarrow Q$.

【例 1.3】 构造公式 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = G$ 的真值表.

解	P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$G = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	0	1	0	0	0
	1	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	0	0	0	1

1.1.4 公式 G 的种类

(1) **永真式 G** :设 G 为一命题公式,若 G 在它的各种指派的情况下取值均为真,则称公式 G 为永真式或重言式,常记为 T .

(2) **永假式 G** :设 G 为一命题公式,若 G 在它的各种指派的情况下取值均为假,则称公式 G 为永假式或矛盾式,常记为 F .

(3) **可满足式 G** :设 G 为一命题公式,若 A 在各种真值指派下至少存在一组成真指派,则称 G 为可满足式.

【例 1.4】 构造下列公式 G 的真值表,判别其类型.

(1) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$;

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$;

(3) $P \wedge (Q \vee \neg R)$.

解 (1)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

∴ 公式(1)为永真式.

(2)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

∴ 公式(2)为永假式.

(3)

P	Q	R	$\neg R$	$Q \vee \neg R$	$R \wedge (Q \vee \neg R)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

∴ 公式(3)为可满足式.

显然:

① 对命题公式 G 的一种指派:对 G 中所有的命题变元 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 指定一组真值,称命题公式 G 的一种指派.

② 成真指派:若指定的一种指派,使公式 G 为 1,则称其为成真指派.

③ 成假指派:若指定的一种指派,使公式 G 为 0,则称其为成假指派.

④ 含 n 个命题变元的命题公式 G ,共有 2^n 组指派.

习题 1.1

1. 分析下列语句哪些是命题?若是命题,指出其真值.

(1) 离散数学是计算机科学系的一门必修课.

(2) 不存在最大的质数.

(3) 你有空吗?

(4) 如果天下雨,就不去公园.

(5) 全体起立!

(6) $x+y \geq 168$.

2. 用语句: P :张军是健壮的; Q :张军是聪明的.把下列语句写成符号形式:(1) 张军是聪明的也是健壮的;(2) 张军是健壮或者是不聪明的;(3) 张军既不健壮也不聪明;(4) 张军并不是又健壮又聪明;(5) 张军不健壮,但聪明.

3. 用汉语写出语句,使之对应以下各形式语句.

(1) $(P \vee Q) \rightarrow R$; (2) $\neg P \wedge \neg Q$; (3) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

4. 指出下列命题中的原子命题.

(1) 天气又热又不下雨; (2) 小李和小王都进城去;

(3) 如果你不去,那么我也不去.

5. 下列公式中哪些是命题公式? 哪些不是命题公式?

(1) $Q \rightarrow (R \wedge S)$; (2) $P \leftrightarrow (R \rightarrow S)$; (3) $RS \rightarrow P$.

6. 求下列公式的真值表,并判定公式的类型.

(1) $P \rightarrow (Q \vee R)$; (2) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$; (3) $(P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \rightarrow R)$.

1.2 公式的等价与蕴含

1.2.1 公式的等价与 24 个基本等价式

(1) 公式的等价

设公式 A 和 B 中所有的变元是 $P_1, P_2, \dots, P_n$. 若公式 A, B 在上述 n 个变元有相同值的任意两组指派下,总是有相同的真值,则称公式 A 与 B 是等价的,记为“ $A \Leftrightarrow B$ ”.有的教材记为 $A = B$.

【例 1.5】试证: $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

证	P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
	0	0	1	1	1
	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0
	1	1	0	1	1

$\therefore (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

(2) 定理 1.1: 公式 $A \Leftrightarrow B$, 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式.

证 由公式的等价的定义可知: $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当公式 A, B 在任一组指派下 A 与 B 的真值总是相同. 也就是说: 在任一组指派下, 命题 $A \leftrightarrow B$ 的真值皆为真, 即是“ $A \leftrightarrow B$ 为永真式”. 注意: 语句“ $A \Leftrightarrow B$ ”和语句“ $A \leftrightarrow B$ 是永真式”是一回事, 即为一种语句两种不同的说法. 但“ $A \Leftrightarrow B$ ”与“ $A \leftrightarrow B$ ”就不是一回事, 即

“ $A \Leftrightarrow B$ ”是一个命题:“ A 与 B 是等价的”;而“ $A \leftrightarrow B$ ”则是一个命题公式,它不是命题语句.

(3) 等价关系的三个基本性质

① 自反性: $A \Leftrightarrow A$;

② 对称性: 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$;

③ 传递性: 若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$.

在化简公式或证明公式等价时,经常利用基本等价关系进行化简公式或证明公式.

(4) 24 个常用的基本等价关系式

为了便于大家记忆,可用下面速记诗:

交² 结² 分² 同² 幂², 吸² 否³ 德² 零² —² (共 19 个公式)

等¹ 否¹ 蕴¹, 蕴¹ 归¹ 位¹ 易¹ (共 5 个公式)

$$\begin{aligned}
 \text{即 交换律} & \begin{cases} P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \\ P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \end{cases}; & \text{结合律} & \begin{cases} (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \\ (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \end{cases}; \\
 \text{分配律} & \begin{cases} P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{cases}; & \text{同一律} & \begin{cases} P \vee 0 \Leftrightarrow P \\ P \wedge 1 \Leftrightarrow P \end{cases}; \\
 \text{幂等律} & \begin{cases} P \wedge P \Leftrightarrow P \\ P \vee P \Leftrightarrow P \end{cases}; & \text{吸收律} & \begin{cases} P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \end{cases}; \\
 \text{否定律} & \begin{cases} \neg(\neg P) \Leftrightarrow P \text{ (双否律)} \\ P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0 \\ P \vee \neg P \Leftrightarrow 1 \end{cases}; & \text{德·摩根律} & \begin{cases} \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \end{cases}; \\
 \text{零壹律} & \begin{cases} P \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \\ P \vee 1 \Leftrightarrow 1 \end{cases}; & \text{等}\Leftrightarrow\text{否等} & P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q;
 \end{aligned}$$

等 $\Leftrightarrow$ 蕴等: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$; 蕴含等价式: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$;

归谬律: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$; 假言易位律: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$.

以上 24 个重要的等价关系式,若能牢记,在化简与证明中极为方便.在使用时,常常要应用公式 A 的子公式与替换子公式定理.即

A 的子公式: 公式 A 中的部分公式 X 称 A 的子公式.

替换子公式定理: 设 X 是 A 的子公式,若有公式 $Y \Leftrightarrow X$,将 A 中 X 用 Y 置换,得到公式 B ,则 $A \Leftrightarrow B$.

证 $\because X \Leftrightarrow Y, \therefore$ 在相应变元的任一种指派情况下, X 与 Y 真值相同,故在 A 中以 Y 取代 X 所得的公式 B 的真值也一定相同, $\therefore A \Leftrightarrow B$.

怎样证明公式 $A \Leftrightarrow B$?

一般有两种方法,即推演法和真值表法.

推演法: 由上述 24 个基本等价公式和替换子公式定理来推证出所得的结

论.

真值表法:构造出 A 和 B 的真值表完全相同,则由定义可知 $A \Leftrightarrow B$.

【例 1.6】 证明: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

证 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$;

$Q \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$.

$\therefore P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

【例 1.7】 试证: $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$.

证 左边 $\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R) \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge R$
 $\Leftrightarrow 1 \wedge R \Leftrightarrow R \Leftrightarrow$ 右边

【例 1.8】 试证 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是永真式.

证 原式 $\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee (Q \wedge R))) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$
 $\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow 1$

$\therefore$ 为永真式.

1.2.2 公式的蕴含与 16 个基本蕴含式

(1) 公式的蕴含

设公式 A 和 B 中所有的变元是 $P_1, P_2, \dots, P_n$. 若公式 A, B 在上述 n 个变元有相同的任意两组指派下, 当 A 为真时 B 也必定为真, 则称 A 蕴含 B . 记为 “ $A \Rightarrow B$ ”.

若借助集合观点来理解: “ $A \Rightarrow B$ ” 相当于 “ $A \subseteq B$ ”. 常说 “是中国人 A ” $\Rightarrow$ “是人 B ”, 即 .

【例 1.9】 试证: $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$.

证	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
	0	0	0	0
	0	1	0	1
	1	0	0	1
	1	1	1	1

即 $P \wedge Q$ 为真时, $P \vee Q$ 必定为真.

$\therefore (P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$.

(2) **定理 1.2** 公式 $A \Rightarrow B$, 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式.

注意: 语句 “ $A \Rightarrow B$ ” 和语句 “ $A \rightarrow B$ 是永真式” 是一回事, 即为一种语句两种不同的说法. 但 $A \rightarrow B$ 是一个命题公式, 而不是命题语句.