2015考研数学权威专家辅导系列

2015考研数学

命题人

易错题分析及应对策略

数学二

刘德荫　童　武/主编

考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威

- 命题组长10年呕心力作，全面、深入总结易错题型和考点
- 超值赠送：北京大学研究生考研数学高分复习秘籍
- 超值赠送：国家考研数学理工类命题组原组长2套命题密押试卷与精解

中国致公出版社

20 家辅导系列

2015考研数学

命题人

易错题分析及应对策略

数学二

刘德荫　童　武／主编

考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威

- 命题组长10年呕心力作，全面、深入总结易错题型和考点
- **超值赠送：北京大学研究生考研数学高分复习秘籍**
- 超值赠送：国家考 长2套命题密押试卷与精解

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

2015 考研数学命题人易错题分析及应对策略. 数学二 / 刘德荫, 童武主编. —北京: 中国致公出版社, 2014

ISBN 978-7-5145-0723-2

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①刘… ②童… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ① 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026207 号

2015 考研数学命题人易错题分析及应对策略. 数学二　刘德荫, 童　武　主编

责任编辑: 董拯民　董　亮
责任印刷: 岳　珍

出版发行: 中国致公出版社
地　　址: 北京市朝阳区八里庄西里 100 号住邦 2000 商务中心 1 号楼东区 15 层
邮　　编: 100025
电　　话: 010-82259658(总编室)　62082811(编辑部)
　　　　　010-85869872(发行部)
经　　销: 全国新华书店
印　　刷: 北京温林源印刷有限公司
开　　本: 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 16.25
字　　数: 283 千字
版　　次: 2014 年 4 月第 1 版　　2014 年 4 月第 1 次印刷

定　　价: 32.80 元

前　　言

在历年考研中，很多考生由于考研数学这一单科没有发挥好而与自己梦想中的学府擦肩而过。考生挣扎于各种选择中，困苦于备考过程中的“枯燥”和“寂寞”，熬过数月甚至一年之久，以此结局收场，难免心有不甘。痛定思痛，考生不难发现，考研数学不仅限于考查考生对各个知识点的理解和掌握程度，更注重考查考生对各知识点的综合运用能力以及各知识点之间联系的熟悉程度。很多考生会觉得自己对于各知识点都掌握了，但做题的正确率就是不高。本书通过对历年考生在考研数学中易犯错误整理分析，发现考生大多是因为一些“不起眼”的小错误而白白失分，最终可能导致整个考研目标的失败。如何解决并避免这些小错误是编写本书的初衷和根本原因。

本书编者本着为广大考研同学分忧的原则，将考研数学错题集分为三大部分：第一部分全面总结了考生在做数学题过程中的十二种易错类型，深入剖析了考生的易错原因，并分别配以详细的真题讲解，相信考生读后定能受益匪浅，提高做题的正确率；第二部分为易错试题专题突破，该部分列出大量习题，可供考生在读完本书第一部分基础上通过做练习题来巩固所学，避免错误进而提高做题的正确率；第三部分为对应第二部分专题的易错专题习题及参考答案，供读者参考。本书将命题者所要考查的要点以及考生易犯错误相结合，将真题与各易错点相结合进行讲解，让考生在了解误区的基础上进一步得到训练，最终能够在考试中发挥出最佳水平。

本书三大亮点：

易错类型分析　本书编写者根据考研数学大纲的要求、历年真题和考生的心理状态将考生易犯的错误归纳为十二大类型，使考生能更加准确地把握考研命题的模式以及相关对策，具有高效性。

便捷实用　为帮助考生在考研中获得满意的成绩，本书在总结考生的错误类型和应对技巧的基础上，还设置“易错专项练习”板块，并在题后附有答案和详解。考生对复习资料的选择感到迷惑或在不知如何复习时，拿出错题本翻一翻，不仅可以帮助考生梳理复习要点，同时还提供详细的讲解内容，有助于考生在较短的时间内对考研数学大纲的宗旨以及历年真题有个大概认识。

详尽　本书中讲解部分所举例子均附有答案、详尽的易错原因以及正解讲解内容，这样一来，考生更容易总结自己的解题规律，提高应试技巧。

本书将考生平时数学学习过程中容易犯下的典型错误进行整合，分析考生的错误原因，并为考生提出应对策略。考生可以通过学习本书所进行的归纳开阔思路，达到发散思维的效果，建立属于个人特有的“错题集”，站在命题者的角度分析考察点，加深对知识点综合运用的掌握，提高答题能力。考生建立自己的“错题集”后，不要因为看过或者总结过便将其束之高阁，由于改变一些不良习惯仍然需要不时的提醒、思考和总结，因此建议考生：

1. 依个人需求定期翻看；

2. 以“错题本”为基础，吸取教训得到启发的同时，找到适合自己的答题技巧；

3. 持之以恒地使用“错题集”，只有这样才能精益求精。

“宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。”最后衷心祝愿广大考生考研成功！书中如有缺漏或不妥之处，敬请批评指正。

编者　于清华园

目　　录

易错专项习题

易错专项习题参考答案及解题提示

易错类型分析及应对策略

易错类型一　审题错误

【易错原因】审题是解题的第一步,也是至关重要的步骤.如果题目没能审好,后续解题过程所做出的努力都可能白费;如果题目能审好,抓住了问题的关键,求解过程也能事半功倍.考生因审题不到位而丢分主要体现在:①读题马虎,不够仔细.特别是对那些冗长的,以及需要考生将题目转化为数学语言的文字题,阅读能力表现很差.此外,考试时间紧迫也会促使考生急于求成,略读题目,而不能准确地抓住题中的关键性文字.②不理解题意.解题中不能将题中所给信息与所学知识结合起来或联系错误.这又体现在两个方面:一是题目中提到的概念,考生没能掌握或不太熟悉,这就要求考生的知识面要广,对大纲要求的概念要拿捏好;二是不知如何将实际问题转化为合适的数学模型,然后再对其进行求解.这类问题在考题中屡见不鲜,也是数学与其他学科建立起联系的纽带.考生应注重培养这方面的能力,即从实际问题中抽象出数学模型,再从数学模型回归到实际问题的能力.

【命题人应对策略】考生在复习或练习的过程中,应注重养成良好的阅读题目的习惯,培养阅读理解能力,做到审题要慢,做题要快.避免错误的策略有:①咬文嚼字,深入挖掘题中信息.逐序逐句,仔细分析,找出题中重要信息是审题的应对策略之一.在审题时,经常会出现一些容易看错的,或易被忽视的,或容易误解的字词,或隐含的信息,这些都可能成为审题错误的重要原因.为此,必要时可通过作图等更直观的表示方式帮助分析、记忆.在阅读的过程中,应注重有扩展思维,有联想力,将题中信息最大化,全面化,为后续求解提供依据.②善于简化,将问题清晰化.在阅读时,应辨清题目中哪些是已知条件,是否有隐含条件,待求参数是哪些.将复杂、繁琐的条件或结论简化,从而将目标锁定,便于集中精力去求解.③善于转换.审题时,思路不能僵化,死盯在原题上,而应当积极地将其转化成熟悉或易于求解的问题,如将实际问题转换成数学问题;将几何问题转化成代数问题.这些策略的有效性还得考生去实践,培养自己的一套良好审题习惯尤为重要,考生应慢慢体会.

典型例题

1.(2007,一(4))设函数$f(x)$在$x=0$处连续,下列命题错误的是　(　　)

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$

(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则$f(0)=0$

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f'(0)$存在

(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则$f'(0)$存在

【错误解法】直接选择选项(A)为正确答案,因为选项(A)的命题是正确的.

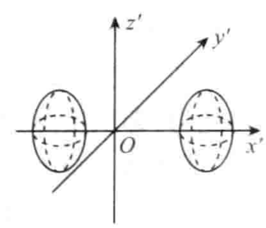
【易错分析】审题过程过于马虎,误将题干要求选出"错误"命题看成"正确"命题,导致求解错误.这类错误虽然简单,但犯错的不乏其人.

【正确解法】对于选项(A),由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在可知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$

又函数$f(x)$在$x=0$处连续,则$f(0)=0$;

对于选项(B),同样由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在知$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$.又函数$f(x)$在$x=0$处连续可得$2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$,则$f(0)=0$.对于选项(C),由选项(A)的结论得$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$存在,而对于选项(D),取$f(x)=|x|$,则$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$,但$f(x)$在$x=0$处不可导,即命题(D)为错误命题.故本题正确答案应选(D).

2.(2008,一(6))设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则$\boldsymbol{A}$的正特征值的个数为 ( )



(A)0 (B)1

(C)2 (D)3

【错误解法】考生不知道此题该如何下手,随意选择了一个选项作为正确答案.

【易错分析】本题乍一看很难读懂,如果考生对正交变换或正特征值的概念不很清楚时,问题就棘手了.

【正确解法】本题要求考生对正交变换和正特征值的概念清晰明白,还应能将文字信息转化为数学信息.本题待求的是二次型矩阵$\boldsymbol{A}$的正特征值的个数,而给出的是变换后在x',y',z'坐标系中曲面图形,图形显示的曲面为旋转双叶双曲面$\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2+z'^2}{b^2}=1$,它是由平面双曲线$\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{z'^2}{b^2}=1$绕$x'$轴旋转一周生成的.而$\boldsymbol{A}$的正特征值的个数,就是二次型的正惯性指数,也就是标准形中正平方项的个数,依惯性定理,它在坐标变换(今知为正交变换)下是不变的,即$\boldsymbol{A}$的正特征值个数为1.故应选(B).

3.(2005,一(1))曲线$y=\dfrac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程为________.

【错误解法】$k=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$,故斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

【易错分析】审题时没有弄清斜渐近线的表达式. 只记住求斜率,而忘记求截距.

【正确解法】斜渐近线的截距为:

$$b=\lim_{\to 0}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4},$$

综上得待求斜渐近线方程为:$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

4.(2004,三(16))某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9 000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为700 km/h,经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?(注:kg表示千克,km/h 表示千米/时).

【错误解法】错误一,错误地认为飞机着陆滑行所受的力 $F=kv$,而未考虑到力 F 与速度 v 的方向是相反的.

实际上,受力 $F=-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,条件 $v|_{t=0}=v_0=700$ km/h.

设滑行距离为 x,则上述方程可代为:$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kv$

则 $m\mathrm{d}v=-k\mathrm{d}x$,两边积分得 $mv=-kx+c$. 则 $x=\frac{1}{k}(c-mv)=\frac{1}{6.0\times 10^6}(c-mv)$.

当 $v=0$ 时,可得 $x_{\max}=\frac{c}{6.0\times 10^6}$. 至此得到最长距离为$\frac{c}{6.0\times 10^6}$.

【易错分析】考生在将文字题转化为数学模型时,没能深入挖掘题中隐含信息. 虽然考生得到 $v|_{t=0}=v_0=700$ km/h,但却忘记隐含条件 $x|_{t=0}=0$,综上两个条件得 $v|_{x=0}=$ 700 km/h,该条件可用于求出常数 c.

【正确解法】在得出 $mv=-kx+c$ 的关系式后,由条件 $v|_{x=0}=700$ km/h 可知,$c=mv_0=9\,000\times 700=6.3\times 10^6$. 则最长滑行距离为:$x_{\max}=\frac{c}{6.0\times 10^6}=\frac{6.3\times 10^6}{6.0\times 10^6}=1.05$km,

即从着陆点算起,飞机滑行最长距离是 1.05 千米.

触类旁通

1. 若 α 与 β 是等价的无穷小量,则下面的结论中不能成立的是 ( )

(A)$o(\alpha)\sim o(\beta)$　　(B)$\alpha\sim\beta+o(\beta)$

(C)$\alpha\sim\alpha+o(\beta)$　　(D)$\alpha+o(\alpha)\sim\beta+o(\beta)$

2. 可微周期函数的导函数 ( )

(A)一定仍是周期函数,且周期不变　　(B)一定仍是周期函数,但周期不一定不变

(C) 一定不是周期函数　　　(D) 不一定是周期函数

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 不一定是其特征向量的矩阵是　(　　)

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$　　　(B) $-2\boldsymbol{A}$

(C) $\boldsymbol{A}^T$　　　(D) $\boldsymbol{A}^*$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，下列命题中不一定正确的是　(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有零　　　(B) $\boldsymbol{A}$ 必不能对角化

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}$ 必可逆　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量

5. 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$ ________.

参考答案

1. A 【解析】本题可采用赋值法，即令 $x\to 0$ 时，$\alpha=x,\beta=\sin x, x^3=o(\alpha),(\sin x)^2=o(\beta)$ 满足题设条件，显然有：$\alpha\sim\beta+o(\beta),\alpha\sim\alpha+o(\beta),\alpha+o(\alpha)\sim\beta+o(\beta)$. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(\alpha)}{o(\beta)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{(\sin x)^2}=0$，即此时 $o(\alpha)$ 是比 $o(\beta)$ 高阶的无穷小. 故正确答案为(A).

【点评】审题时，要看清题干要求选出“不能成立”的选项，以免在简单题目中丢分.

2. A 【解析】因为 $f(x+T)=f(x)$ 且 $f'(x)$ 存在，所以

$$f'(x+T)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$，故正确选项为(A).

【点评】本题求解的关键在于如何将文字语言转换成数学语言，虽然靠举例的方法也能求解，但必须不断尝试来得到错误选项的反例，费时费力.

3. C 【解析】选项(A)，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{\alpha}_0=(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_0+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_0=(\lambda_0^2+2\lambda_0+1)\boldsymbol{\alpha}_0=(\lambda_0+1)^2\boldsymbol{\alpha}_0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$ 的特征向量；选项(B)，$-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0=-2\lambda_0\boldsymbol{\alpha}_0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $-2\boldsymbol{A}$ 的特征向量；选项(C)，只有当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时，$\boldsymbol{\alpha}_0$ 才一定是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量；选项(D) 也不难证明. 故知正确答案为(C).

【点评】注意题中的重点字眼，即“不一定是”，意思是在一定条件下是可以成立的.

4. D 【解析】设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\lambda^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=0$，(A) 正确；因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解，即 $\lambda=0$ 有 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的特征向量，故(B) 正确，而(D) 不一定正确；由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{E}$，知(C) 正确. 故正确答案为(D).

【点评】本题除了注意题干中的陷阱(“不一定正确”)外，实际上认真读懂每一个选项也是审题的一部分.

5. -2 【解析】对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})$ 作初等变换得，

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 2a+4 \end{pmatrix}.$$

当 $a = -2$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) = 2 < 3$ 原方程组有无穷多解.

【点评】题干中暗含了条件 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) < 3$，这是通过方程组有无穷多个解中得到的.

易错类型二 概念理解错误

【易错原因】数学概念中的每一个定义、术语、符号,甚至是习惯用语都有明确的具体的含义. 概念理解错误产生的原因是多方面的,包括概念理解不深,概念的外延和内涵扩大或缩小等. 错误的类型主要有两种:一是过程性错误,包括用日常生活概念、概念原型、"形象描述"等替代数学概念,分类与比较不合理,概念定义与概念相脱离,概念运用僵化,对联系作不正确的推广或依据个人经验强行进行不恰当的联系等错误;二是"合理性"错误,包括用原有的思维审视新概念,按以往的经验、结论或方法对概念作"合理"的延伸等错误. 考研数学涉及的数学概念有很多,而其中又有许多是抽象概念,理解和应用较难,而解题的关键又在于概念本身,因此概念理解错误会直接导致解题的失败.

【命题人应对策略】在复习或学习的过程中,应能抓住概念的外延和内涵,正确深入地理解数学概念,挖掘出数学概念的本质、属性和相互间的内在联系,从而帮助在解题中快速掌握重点. 在学习完一个数学概念后,应在概念的定义的基础上分析相应的实际问题,从而帮助揭示概念的本质及其属性. 通过正例和反例的反复比较,自身在学习过程中对实际问题的比较、分析、概括和延伸等,可以使得概念的关键属性变得清晰明了,同时也能掌握概念在实际问题中的应用.

典型例题

1. (2010,一(4)) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

【错误解法】直接求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 和四个选项中的二重积分,结果一上来就在求极限上撞了墙,不知如何下手.

【易错分析】本题其实考查的是二重积分与二重极限间的联系,而非具体地求极限和求二重积分,造成错误求解的原因主要是考生对二重极限的概念理解不深,把大量精力放在熟练求解二重积分的练习上,而对二重积分的基本概念缺乏足够认识.

【正确解法】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} \mathrm{d}y.$$

故正确答案为(D).

2.(2005,二(10))设有三元方程 $xy - z\ln y + \mathrm{e}^{xz} = 1$,根据隐函数存在定理,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域内该方程 (　　)

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

【错误解法】令函数 $F(x,y,z) = xy - z\ln y + \mathrm{e}^{xz} - 1 = 0$,则

$$F'_x(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} = (y + z\mathrm{e}^{xz})\Big|_{(0,1,1)} = 2 \neq 0,$$

$$F'_y(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} = \left(x - \frac{z}{y}\right)\Big|_{(0,1,1)} = -1 \neq 0,$$

$$F'_z(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} = (-\ln y + x\mathrm{e}^{xz})\Big|_{(0,1,1)} = 0.$$

因为 $F'_z(x,y,z) = 0$,所以选项(A)正确.

【易错分析】考生不熟悉隐函数存在定理的条件和结论在求出偏导数后,容易按以往的经验作出"方程等于0即为确定状态"的"合理性"错误.

【正确解法】得出 $F'_x(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} \neq 0$,$F'_y(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} \neq 0$ 和 $F'_z(x,y,z) = 0$ 后,直接由隐函数的存在定理知,正确答案为(D).

3.(2002,二(1))考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面4条性质;

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P \Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q,则有 (　　)

(A)②⇒③⇒①　　(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　(D)③⇒①⇒④

【错误解法】联系到一元函数的性质,函数可导 ⇒ 左、右极限存在且相等 ⇒ 函数连续,从而得出结论 ③⇒④⇒①,故正确答案为(C).

【易错分析】考生对一元函数和二元函数间的联系作了不正确的推广或强行进行了不恰当的联系.应注意二元函数与一元函数的不同,偏导数存在函数不一定连续,但是可微必连续,这一结论与一元函数的性质相同.

【正确解法】若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,而可微必连续,故而有 ②⇒③⇒①,即正确答案为(A).

4.(2003,二(4))设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则 (　　)

(A)当 $r < s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关

(B)当 $r > s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关

(C) 当 $r < s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关

(D) 当 $r > s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关

【错误解法】当 $r < s$ 时,向量组 Ⅱ 中的向量个数大于向量组 Ⅰ 中向量的个数,又二者维数相同,故向量组 Ⅱ 必线性相关.

【易错分析】单纯以向量个数的多少来判别向量组的线性相关性显然是缺乏依据的,二者的关系是考生生拉硬拽而来,不具可靠性.

【正确解法】依题干知,向量组的秩 $r(\text{Ⅰ}) \leqslant r(\text{Ⅱ})$,且 $r(\text{Ⅰ}) \leqslant r$,$r(\text{Ⅱ}) \leqslant s$,则 $r(\text{Ⅰ}) \leqslant s$. 若 $r > s$ 时,可知向量组 Ⅰ 的向量个数大于其秩,从而得到向量组 Ⅰ 必线性相关. 故正确答案为(D). 本题亦可用排除法,举例排除选项(A)、(B) 和(C),解题时间稍长些.

5. (2002,十) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,

(Ⅰ) 如果 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 相似,试证 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等;

(Ⅱ) 举一个二阶方阵的例子说明(Ⅰ) 的逆命题不成立;

(Ⅲ) 当 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时,试证(Ⅰ) 的逆命题成立.

【错误解法】错误主要出现在第(Ⅰ) 问的证明中,即:因为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可同时相似于同一对角矩阵,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

【易错分析】考生将"相似" 概念的外延作了不合理的延伸. 相似矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并不一定能相似对角化,需要满足一定的条件.

【正确解法】(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 相似,那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$,从而

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| &= |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

即命题得证.

(Ⅱ) 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$,则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda^2 = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,但 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 不相似,否则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$,从而得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{O}$,与 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ 相矛盾.

(Ⅲ) 由 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵知,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均相似于对角阵. 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等. 记特征多项式的根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\boldsymbol{B} \sim \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使得,

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}.$$

从而得,

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B,$$

由 PQ^{-1} 为可逆矩阵知,A 与 B 相似. 命题得证.

触类旁通

1. $x = 0$ 是 $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ 的 ( )

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点

(C) 振荡间断点 (D) 无穷间断点

2. 函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是 $f(x,y)$ 在该点处可微的 ( )

(A) 必要条件 (B) 充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

3. 设函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$ 的特解,其中 P, Q, F 都是已知函数,则对任意常数 C_1, C_2,函数 $y = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$ ( )

(A) 不一定是所给方程的通解 (B) 肯定不是方程的通解

(C) 是所给方程的特解 (D) 一定是方程的通解

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是三维列向量,且 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1| = 2$, $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2| = 4$,则 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 + 2\boldsymbol{\beta}_2| =$ ( )

(A) 6 (B) 8

(C) 10 (D) 12

5. 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 ( )

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表出

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

6. 设 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$ 其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$, $b_j \neq 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含解向量的个数为________.

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全是 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是________.

参考答案

1. A 【解析】因为 $x = 0$ 时,$f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ 无定义,但 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$(因 $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$),