本书受云南省学术著作出版基金资助

半空间上薄扁壳基础的静力弯曲及地震激发的动力响应

范家参 侯明明 范磊

云南科技出版社

本书受云南省学术著作出版基金资助

半空间上薄扁壳基础的静力弯曲及地震激发的动力响应

范家参　侯明明　范　磊

云南科技出版社

责任编辑：黄启云
封面设计：杨　峻

半空间上薄扁壳基础的静力弯曲
及地震激发的动力响应
范家参　侯明明　范　磊

云南科技出版社出版发行（昆明市书林街100号）
昆明新星印刷厂印装　　　新华书店经销

开本：787×1092 1/16　印张：10.25　字数：25万
1999年7月第1版　　　1999年7月第1次印刷
印数：0001～1000

ISBN 7－5416－1281－2/O・51　定价：30.00元

出 版 说 明

在固体力学及土木工程中，当基础底下的土层较厚时，基底与土层表面之间的接触压强必须用著名的 Boussinesq 积分公式表达，即视地下土层为弹性半空间，放弃只近似适用于浅土层的 Winkler 假定，即接触压强正比例于接触面积内地表沉陷。

但是，在弹性半空间上的平板基础的静力弯曲问题，其控制方程组是由一个四阶线性偏微分方程和一个奇异积分方程(Boussinesq 积分)构成，求它的精确解存在巨大的数学困难，于是便提出了半经验的“双参数弹性地基”以克服 Winkler 弹性地基在接触面积以外没有地表沉陷的缺点。本书作者则用椭圆型偏微分方程的位势越过边界面的间断性质，得出 Boussinesq 积分的反演为一个四阶偏微分公式，从而彻底解决了这个数学困难，并解决了倒置薄扁壳基础位于弹性或粘弹性半空间上静力弯曲及在垂直或水平地震激发而使薄扁壳基础产生的动力响应。平板是扁壳的特例，故本书内容也包括半空间上的平板基础在地震激发的动力响应求其解析解时，我们又引进了非线性 Rayleigh 阻尼。它在运动初期时因发震断层失稳破裂而突然释放巨大的能量使断层破裂加速而为激发阶段，但是断层两边剧烈的外摩擦(震后观察到的断层泥及烧灼痕迹)及断层分子之间的内摩擦产生的阻尼使破裂速度达到最高速后开始衰减至停止运动，这一运动过程只有非线性 Rayleigh 阻尼才能表达，而采用 Rayleigh 阻尼于地震工程的解析解，也是本书首次采用的工作，我们还研究了扁壳几何非线性问题。

连续理论的固体力学及地震工程问题都是求解偏微分方程(有时还涉及积分方程)，而非线性的结构的地震响应更是近年来研究的热点。

目　录

前　言

各种建筑在地面上建筑物，除了打桩的基础之外，其他基础的底面都可认为建在地面上，即使挖了几米至十几米的基坑作地下室的情况也不例外，基础以下土层的力学性能较差，则建造钢筋混凝土的平板、仰拱、壳体等整体式基础，以保持建筑物的压力不致造成地基土的分散式的不均匀沉陷而造成上部建筑物的开裂甚至破坏。

当基础下的地基土层较薄时，通常采用基底与地表之间的接触压强 $p(x,y)$ 正比例于此处沉陷 $w(x,y)$ 的 *Winkler* 假定 $p(x,y)=kw(x,y)$，此处 k 为比例常数，这个假定的优点是计算方便，但缺点是在基底以外的地表没有沉陷，显然与实际情况不相符合，只有当土层较薄时才近似地适用，为克服这个缺点，在土层较厚时，就要视地基为弹性半空间，地表为半空间的自由边界面。这时，定义基底与地表间的接触压强与地表任一点的沉陷值之间的关系式是著名的 *Boussinesq* 积分，即本书第一章的(1.3)式，此时与地基上的平板或弹性薄扁壳的控制方程(组)构成弹性半空间上的弹性薄板或弹性薄扁壳弯曲问题的控制方程组，后者就是本书第二章的(1.1)、(1.2)、(1.3)三式所组成，前者是后者在 $kx=ky=0$，$\varphi(x,y)=0$ 时特例，即弹性半空间上弹性薄板弯曲的控制方程组为：

$$\left.\begin{aligned} &D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = q(x,y) - p(x,y) \\ &w(x,y) = \frac{1-\xi ve}{\pi E_e} \iint_S \frac{p(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

上面两式各符号意见见第二章的解释。

因为(*A*)是偏微分—积分方程构成的耦连方程组，其解析解存在着很大的数学困难。

1885 年，*Boussinesq* 在其专著[1]中整理了前人的工作并系统地推导出上述的积分公式以来，一直到 1947 年才有(*A*)式是弹性半空间上的弹性圆薄板受匀体裁荷的轴对称弯曲问题有了唯一的精确解[2]，而更复杂的弹性半空间上的弹性薄扁壳基础的静力弯曲问题的的解析解，则未见过有关文献的报道，本书不但得到了薄扁壳静力弯曲问题的解析解，还得出了在非线性 *Rayleigh* 阻尼作用下，水平地震及垂直地震时，弹性半空间上薄扁壳基础动力响应的解析解，这是作者自 1989 年以来发表的系列成果的总结，又加上了非线性振动中分岔及浑沌性质的深入研究。

我国大多数地区都处于地震带上，如世界上著名的环太平洋地震带等地震区，在这些地震多发区建造建筑物，必须考虑结构的抗震设计。因此本书中考虑了扁壳基础的地震时的动力响应，不但有理论上的意义，也是工程设计中的抗震设计不可少的内容。

国际上公认，在大多数情况下，水平地震力的作用是建成建筑物破坏的主要原因，这是因为体波中的剪切波其波速总是小于纵波，但其振幅却大于纵波，而以 *SH* 波表示的剪切波水平理就是水平地震力的来源之一，而面波又是波速小于体波但振幅大于体波的地

震力源、面波中的 *Love* 波是使地面产生蛇形运动的水平振动，这就是在大多数情况下，水平地震是造成包括建筑物破坏的地震灾害的原因。但是，在下列情况下，垂直地震都是造成地震灾害的主要原因[3]：一是在地震烈度为 8 度及以上或震级大于 7 级的大震的震中高烈度极震区。二是对竖向地震敏感的如重力坝，或竖向地震反应很大的结构如水平结构和高耸结构，这就是我们在本书中既要得出薄扁壳基础的水平地震响应，又要得出垂直地震响应的原因。

一次强烈地震的过程中很短暂的，往往在 20 秒内结束，但却包括了运动开始有激发而加速运动，至最高速时又开始衰减而停止运动，为完整地用数学公式表达这一运动过程，非线性 *Rayleigh* 阻尼是惟一适用的阻尼公式，而通常使用的与速度正比的粘滞性阻尼公式，只有衰减而无激发，这就是在本书中有关阻尼的公式一律用非线性 *Rayleigh* 阻尼的原因。

在地震发生的剧烈运动中，介质之间的分子有剧烈的内摩擦而产生阻尼[4]，因此壳体应视为粘弹性体才更精确地反映事物本质，我们在讨论扁壳的水平地震响应时，视扁壳为弹性体、二元件的 *Voigt* 粘弹性、三元件的标准线性粘弹性固体，逐步由粗到精得出其解析解。最后，当地震运动过程由弱激发到强，以致求解非线性问题的小参数展开法已失效而不能使问题线性化而得出渐近解时，我们用 *van der Pol* 方法得出非线性问题的渐近解，进而讨论解的浑沌及分岔性质，深入地了解这种非线性问题的性质。

从工程实用方面讲也有重要意义，文献[5]中报道：在 70 年代的治淮工程中，对一孔净宽 6 米的节制闸，如用平板基础，要有 1.2～1.5 米厚的截面，每孔配置 4～5 吨钢筋。若用仰拱基础，底板厚仅需 0.6 米，每孔只要钢筋 0.8 吨。二者相比，仰拱基础比平板节省混凝土 50%左右，节省钢筋 80%左右。双向起拱的薄扁壳基础，当然会比单向起拱的仰拱基础节省更多材料。

由于平板的抗弯刚度小，当前流行折板式整体基础虽提高抗弯刚度，但折板基础有曲率突然变化的脊棱，这里应力集中而易于破坏，不如曲率平滑变化的扁壳基础的受力性能好。

参 考 文 献

[1]J. Boussinesq Applications des potentiels a' l'etude de le'quilibre et du moavement des solids e'lastiques, Paris, (1885)

[2]胡海昌等，弹性薄板的小挠度平衡问题，中国科学院出版，(1955)，北京，64，81。

[3]胡聿贤，地震工程学，地震出版社，北京，(1988)，640－642。

[4]Y. C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Prentice, Hall Inc, New York, (1965), 8－26.

[5]江苏省治淮指挥部设计组，枳壳结构在涵闸中的应用，科学实验，1973 年，第 8 期，30～32。

预备知识

为使不太熟悉偏微分方程的读者对本书的第一、二两章内容比较易于了解，我们编写了一点必要的预备知识供读者参考。

§0－1　二阶偏微分方程的分类[1]

以两个自变量的二阶偏微分方程为例来说明问题，它可表示为：

$$F(x,y,u,p,q,r,s,t)=0 \tag{0.1}$$

在上式中：x 和 y 为自变量，u 为未知函数，$p=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$，$q=\frac{\partial u}{\partial y}=u_y$；$r=\frac{\partial u}{\partial x^2}=u_{xx}$，$s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{xy}$，$t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{yy}$。

若方程(0.1)在边界为 γ 的域中有唯一的解析解，则在 γ 上的某点(x_0,y_0)的邻域内可展或收敛的 $Taylor$ 级数：

$$u=u_{00}+\sum_1^{\infty}\mathrm{u}_{mn}\frac{(x-x_0)^m(y-y_0)^n}{m!n!} \tag{0.2}$$

在(0.2)式中，u_{mn} 为$\left.\frac{\partial^{n+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=y_0}}$之值。

首先，必须使未知函数 u 的任意阶偏导数在边界线 γ 上的每一点是唯一存在的，从而使方程(0.1)在包括边界线的区域唯一存在。

在 γ 上，函数 u 及一阶偏导数 p 和 q 是解析函数，令 γ 的弧长为 l，以上标“,”表示以 l 为自变量的求得的导数，则在 γ 上，有导数

$$\left.\begin{aligned} p'&=\frac{dp}{dl}=rx'+sy'\\ q'&=\frac{dq}{dl}=sx'+ty'\end{aligned}\right\} \tag{0.3}$$

由(0.1)式及(0.3)式共三个方程，用以求出 γ 上的二阶偏导数 r、s、t。存在三种可能性：(1)没有满足(0.1)式及(0.3)式的 r、s、t 存在，则此时方程(0.1)无解。(2)有满足(0.1)式及(0.3)式的唯一的一组 r、s、t 存在，则此时(0.1)式有唯一的解。(3)有许多组的三个二阶偏导数之值均满足(0.1)式和(0.3)式，因此我们可以取每一组的 r、s、t 之值，得

到(0.1)式的一个解。

现在，我们讨论第三种情况，这时要求出未知函数 u 的三阶偏导数，对(0.1)式求 x 的偏导数而有：

$$Rr_x + Ss_x + Tt_x = -X - Up - Pr - Qs \tag{0.4}$$

在(0.4)式中，$R=\frac{\partial F}{\partial r}$，$S=\frac{\partial F}{\partial s}$，$T=\frac{\partial F}{\partial t}$，$X=\frac{\partial F}{\partial x}$，$U=\frac{\partial F}{\partial u}$，$P=\frac{\partial F}{\partial p}$，$Q=\frac{\partial F}{\partial q}$。此式中，只有未知函数 u 的三阶偏导数 r_x、s_x、t_x 未知，其余各项均为已知。

因为 $dr=r_xdx+s_ydy$，$ds=sxdx+t_xdy$，但是 $r_y=s_x$ 以及 $s_y=t_x$，故在边界线 γ 上有

$$\left.\begin{aligned} r_xx' + s_xy' &= r' \\ s_xx' + t_xy' &= s' \end{aligned}\right\} \tag{0.5}$$

由(0.4)式和(0.5)式构成的三个代数方程，用以求出三个三阶偏导数 r_x、s_x、t_x 在边界线 γ 上之值，易知这三式的系数行列式是：

$$\begin{vmatrix} R & S & T \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = Ry'^2 - x'(Sy' - Tx')$$

若上述系数行列式之值不为零，则 r_x、s_x、t_x 之值为唯一确定之值。同样只要上述的系数行列式之值不为零，其他的三阶偏导数在 γ 上的值也是唯一确定的。若有：

$$Ry'^2 - Sx'y' + Tx'^2 = 0 \tag{0.6}$$

则称边界线 γ 为特征线，此时特征线通常与给定在 γ 上的 u、p、q 之值有关。例如，二阶偏微分方程：

$$p^2r - 3pqs + 2q^2t = 0$$

其系数行列式为零得出下列方程

$$p^2y'^2 - 3pqx'y' + 2q^2x'^2 = 0$$

若 $y=x$ 是一条特征线，则有

$$p^2 - 3pq + 2q^2 = 0$$

为满足上式，必须有 $p=q$ 或 $p=2q$，否则 $y=x$ 就不是一条特征线。

考虑另一个例子，给定二阶偏微分方程

$$pr - qs = 0$$

其特征线方程为

$$py'^2 - qx'y' = 0$$

故有一组特征线 $py'-qx'=0$ 与 p 和 q 之间的关系式之值有关，另一组特征线 $y=\text{const}$ 则与 p 和 q 的关系式之值无关。

对于下列的二阶线性偏微分方程：

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0 \tag{0.7}$$

在(0.7)式中，a_{11}、a_{12}、a_{22}、b_1、b_2、c、f 只是 x 和 y 的函数，如这些系数只是常数，则移为常系数二阶线性偏微分方程。

对于二阶线性偏微分方程，因为$\frac{\partial F}{\partial r}=a_{11}$，$\frac{\partial F}{\partial s}=a_{12}$，$\frac{\partial F}{\partial t}=a_{22}$，故(0.6)式应用于(0.7)式时就变成了

$$a_{11}y'^2 - 2a_{12}x'y' + a_{22}x'^2 = 0 \tag{0.8}$$

也可以把(0.8)式写为

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{0.9}$$

由(0.9)式可得[2]

$$\frac{dy}{dx} = a_{12} + \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{0.10}$$

$$\frac{dy}{dx} = a_{12} - \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{0.11}$$

在方程(0.7)的定义域内的某一点 m，可把(0.7)式的二阶线性偏微分方程分为三种类型。

双曲线型：$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$

抛物线型：$a_{11}^2-a_{11}a_{22}=0$

椭圆型：$a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$

易知：双曲线型二阶偏微分方程有两组不同的实特征线，抛物线型二阶偏微分方程只

有一组实特征线，椭圆型二阶偏微分方程有两组不同的虚特微线而无实特征线。

借助可逆的变量变换

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y) \\ \eta &= \psi(x,\eta) \end{aligned}\right\} \qquad (0.12)$$

可使三种类型的二阶偏微分方程得出最简单的表达式。

把偏导数用新自变量(ξ,η)的偏导数来表示而有

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{aligned}\right\} \qquad (0.13)$$

把(0.13)式之值代入(0.7)式而得

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\xi\eta} + \bar{F}(u_\xi, u_\eta, u, \bar{f}) = 0 \qquad (0.14)$$

在(0.14)式中，$\bar{f}$ 为用新自变量(ξ,η)表示的已知函数，而三个新的系数是

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (0.15)$$

不难验证

$$\bar{a}_{12}^2\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (\bar{a}_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2$$

故方程的类型在自变量的变换中不变。

从(0.15)式可看出，$\bar{a}_{11}$与$\bar{a}_{22}$的表达式在形式上完全一致，都是可以由下式简化。

$$a_{11}Z_x^2 + 2a_{12}Z_xZ_y + a_{22}Z_y^2 = 0 \qquad (0.16)$$

取(0.16)式的两个线性无关的解为 $Z_1=\varphi(x,y)$，$Z_2=\psi(x,y)$，若令

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y) \\ \eta &= \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (0.12)$$

则可使方程(14)式的系数 $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}=0$，则因变换(0.12)式是两个实数变换，相应于双曲线型方程的两 族相异的实特征线，于是双曲线型方程可以简化为

$$\left.\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= \varphi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \\ \varphi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) &= \frac{\overline{F}}{2\bar{a}_{12}} \end{aligned}\right\} \tag{0.17}$$

还有第二种典型的双曲线型方程。令

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha + \beta \\ \eta &= \alpha - \beta \end{aligned}\right\} \tag{0.18}$$

则(0.17)式化为

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi \tag{0.19}$$

对于抛物线型方程，只有一族实特征线为 $\Phi(x,y)=c$ 且 $a_{22}=\sqrt{a_{11}a_{12}}$，取特征坐标变换。

$$\xi = \varphi(x,y) \tag{0.20}$$

则有 $\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=(\sqrt{a_{11}}\xi_x+(\sqrt{a_{22}}\xi_y)^2=0$

以及：$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=$

$(\sqrt{a_{11}}\xi_x+(\sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x+\sqrt{a_{22}}\eta_y)=0$

故方程(0.14)式化为

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{\bar{a}_{11}}F(u_\xi,u_\eta,u) = 0 \tag{0.21}$$

对于椭圆型方程，因为 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$，故(0.10)式与(0.11)式为共轭复数。令：

$$\varphi(x,y) = c$$

是(0.10)式的复数积分，以 φ^* 表示 φ 的共轭复数，则：

$$\varphi^*(x,y) = \bar{c}$$

是共轭方程(0.11)式的复数积分　令

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \varphi(x,y)\\ \eta &= \varphi^*(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{0.22}$$

为了不涉及复变数，引入下面新变量 α 及 β

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\varphi+\varphi^*}{2}\\ \beta &= \frac{\varphi-\varphi^*}{2i}\end{aligned}\right\} \tag{0.23}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha+i\beta\\ \eta &= \alpha-i\beta\end{aligned}\right\} \tag{0.24}$$

此时有

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=(a_{11}\alpha_x^2+2a_{12}\alpha_x\alpha_y+a_{22}\alpha_y^2)-(a_{11}\beta_x^2+2a_{12}\beta_x\beta_y+ a_{22}\beta_y^2+2i[a_{11}\alpha_x\beta_x-a_{12}(\alpha_x\beta_y+\alpha y\beta_x)+a_{22}\alpha_y\beta_y]=0 \tag{0.25}$$

$$\text{即}:\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22},\bar{a}_{12}=0 \tag{0.25$'$}$$

于是椭圆型方程简化为

$$\left.\begin{aligned}&u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\Phi(\alpha,\beta,u_\partial,u_\beta)\\ &(\Phi=-\frac{\overline{F}}{\overline{a}a_{22}})\end{aligned}\right\} \tag{0.26}$$

超过两个自变量的二阶线性偏微分方程，可化为下面的几种典型之一。

$u_{x_1x_2}+u_{x_2x_2}+\cdots\cdots+u_{x_nx_n}+\Phi=0$　(椭圆型)

$u_{x_1x_1}=\sum\limits_{i=2}^{n}u_{x_i}x_i+\Phi$　(双曲线型)

$\sum\limits_{i=1}^{m-n}u_{x_ix_i}=\sum\limits_{i=m+1}^{n}u_{x_ix_i}+\Phi$　(超双曲线型)

$\sum\limits_{i=1}^{n-m}(\pm u_{x_ix_i})+\Phi=0(m>0)$　(抛物线型)

§0—2　二阶以上的高阶偏微分方程的分类[3]

一般两个自变量 (x, y) 函数 $u(x, y)$ 的 n 阶拟线性偏微分方程可以写成

$$L(u)+K(u)=0 \tag{0.27}$$

在上式中

$$L(u)=a_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+a_{n-1}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}+a_{n-2}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\cdots\cdots+a_0\frac{\partial^n u}{\partial y^n} \tag{0.28}$$

K（u）和 a_i（$i=0$，1，2，$\cdots n$）是 x、y、u、以及 u 的直到（$n-1$）阶的各阶偏导数的函数。

在这一段里，也同§0—1一样采用坐标变换的方法来推导方程（0.27）所表示各种不同类型方程的特征。

设在（x，y）平面中的一条曲线 γ 上给定了 u 和 u 对 x 或 y 的直到（$n-1$）阶的各阶偏导数之值，给定 γ 曲线用方程 Φ（x，y）$=0$ 来表示，则在 γ 附近可以做出曲线族 Φ（x，y）$=1$，2……。同样也可做出另一曲线族 ψ（x，y）$=0$，1，2，……两族曲线在交点处不一定互相垂直。于是可以把坐标（x，y）换成曲线坐标（Φ，ψ），函数 u（x，y）变换成（Φ，ψ），，并且把在曲线 γ 上的给定初始条件表示为：当 $\Phi=0$ 时，u，$\frac{\partial^k u}{\partial\Phi^k}$（$k=1$，2，……，$n-1$）均为已知。

在初始曲线 $\Phi=0$ 上，$(0,\psi)$ 是已知的，因此 u 对 ψ 的各阶偏导数 $\frac{\partial^k u}{\partial\psi^k}$（$k=1,2,\cdots\cdots,n$）在 $\Phi=0$，上也是已知的，而且

$$\frac{\partial^j u}{\partial\Phi^s\partial\psi^{j-s}}=\frac{\partial^{j-s}}{\partial\psi^{j-s}}\left(\frac{\partial^s u}{\partial\Phi^s}\right),s\leqslant n-1 \tag{0.29}$$

在 $\Phi=0$　上也是已知的。

下面求方程（0.27）在坐标变换后的表达式。

u 对 x 的偏导数在（Φ，ψ）坐标系中为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\Phi}\Phi_x+\frac{\partial u}{\partial\psi}\psi_x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\Phi_x\frac{\partial}{\partial\Phi}+\Phi x\frac{\partial}{\partial\psi})^2 u$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=(\Phi_x\frac{\partial}{\partial\Phi}+\psi_x\frac{\partial}{\partial\psi})^i u$$

因此，$(\Phi_x\frac{\partial}{\partial\Phi}+\psi_x\frac{\partial}{\partial\psi})$ 可以认为是一个偏微分算子，对 u 求 x 的偏导数相当于把这个偏微分算子作用到 u 上去。同理可得

$$\frac{\partial^i u}{\partial y^i}=(\Phi_y\frac{\partial}{\partial\Phi}+\psi_y\frac{\partial}{\partial\psi})^i u$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-i}\partial y^i}=(\Phi_x\frac{\partial}{\partial\Phi}+\psi_x\frac{\partial}{\partial\psi})^{n-i}(\Phi_y\frac{\partial}{\partial\Phi}+\psi_y\frac{\partial}{\partial\psi})^i u=\Phi_x^{\,n-i}\Phi_y^i\frac{\partial^n u}{\partial\Phi^n}S'_{n-i} \tag{0.30}$$

在（0.30）式中右端第一项是未知的，第二项 S'_{n-i}是 u 对 Φ 低于 n 阶的偏导数的对 ψ 的各阶偏导数项的集合，在初始曲线 γ 上，S'_{n-i}的每一项都是已知的。

把方程（0.27）用（0.30）式进行变换，整理后得到

$$Q(\Phi_x,\Phi_y)\frac{\partial^n s}{\partial \Phi^n}+S=0 \qquad (0.31)$$

在（0.31）式中

$$\left.\begin{aligned} Q(\Phi_x,\Phi_y) &= a_n\Phi_x^n + a_{n-1}\Phi_x^{n-1}\Phi_y + \cdots\cdots + a_0\Phi_y^n \\ S &= \sum_{i=0}^{n} a_i S'_i + K(u) \end{aligned}\right\} \quad (0.31)'$$

由于 K（u）和 a_i（$i=0$，1，……，n）在 γ 上已知，因此 Q 和 S 在 γ（$\Phi=0$）上都是 ψ 的已知函数。

由（0.31）式可得下面的结论：

（1）如果 $Q\neq0$，在初始曲线 γ 上有唯一的解，它是

$$\frac{\partial^n s}{\partial \Phi^n}=-\frac{S}{Q}$$

这就类似二阶拟线性偏微方程中为求出三阶偏导数 γ_x、S_x、t_x 时其系数行列式不等于零的条件。

（2）若在 γ 上 $Q=0$，$S\neq0$，方程式（0.31）没有解，而在二阶拟线性偏微分方程中，相应于（0.6）式成立，而用行列式求解 γ_x、S_x、t_x 的分子的行列式不等于零的情况。

（3）若在 γ 上 $Q=0$，$S=0$，则方程式（0.31）有无究多组解。这时 $Q=0$ 是特征线的常微分方程，而 $S=0$ 给出在特征线上的相容条件。因此，如果初始曲线 γ 是一条特征线，则初始条件 u 以及 u 的各阶偏导数在 γ 上就不能任意给定，它们之间必须满足相容条件。

特征线所满足的微分方程为

$$Q=a_n\Phi_x^n+a_{n-1}\Phi_x^{n-1}\Phi_y+\cdots\cdots+a_0\Phi_y^n=0 \qquad (0.32)$$

对特征线 γ 的方程 Φ（x，y）$=0$ 求全微分

$\Phi_x dx+\Phi_y dy=0$

若 $\Phi_x\neq0$，则有

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\Phi_y}{\Phi_x} \qquad (0.33)$$

于是（0.32）式变为

$$a_0(\frac{dx}{dy})^n - a_1(\frac{dx}{dy})^{n-1} + \cdots\cdots + (-1)^n a_n = 0 \tag{0.34}$$

方程式（0.34）是$\frac{dx}{dy}$的 n 次代数方程式，它有几个根，由这些根的性质可以对方程式（0.31）进行分类。

椭圆型：这时，代数方程（0.34）的根全为虚数且为互为共轭复数。这种情况只有当 n 是偶数时才会出现，若 n 为奇数时，至少有一个实数根。

抛物线型：这时，方程（0.34）有唯一的根$\frac{dx}{dy}=\infty$，当 $\Phi_x=0$ 时就是这种情况。

双曲线型：这时方程（0.34）的根全部都是有限的实数，若这些实数根无重根，则称方程（0.27）为完全的双曲线型。

其他类型：这时方程（0.34）的根中可能同时存在实数根、虚数根和无穷大根。

举三个例子说明高于二阶的偏微分主程的类型。Mindlin 和 Herrman 对圆型截面的杆，推出的改进的波动方程如下[3]。

$$C_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2K[C_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}][C_R^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = 0 \tag{0.35}$$

上式中 a 是圆杆横截面半径，K、C_1 和 C_R 都是材料常数。（0.35）式有四族实特征线：

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_1, \pm C_R$$

故（0.35）式是完全双曲线型的四阶偏微分方程。梁弯曲振动的 *Bernoulli*－*Euler* 方程[3]为

$$EIu_{xxxx} + mu_{tt} = p(x,t) \tag{0.36}$$

上式中 EI 是横截面的抗弯刚度，u 是梁的振幅，m 是梁的单位体积的质量，p（x，t）是横向干扰力的分布荷载。

代（0.36）式入（0.32）式而得 $\Phi_x=0$，此时波速为 $c=\infty$，故（0.36）式是抛物线型的四阶偏微分方程式。

弹性力学平面问题的 *Airy* 应力函数 Φ（x，y）所满足的双调和方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}) = 0 \tag{0.37}$$

上式的特征线方程为

$$\frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

故（0.37）式是椭圆型四阶偏微分方程。

§0－3　三种偏微分方程的区别及方程类型的改变及注意事项

双曲线型的二阶偏微分方程，以波动方程为其代表，用最简单的弦横向自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{0.38}$$

为例来说明问题。上式中 $C^2=\frac{T}{\rho}$，ρ 是弦的密度，T 为弦内张力，C 为波速。（0.38）式有两族实特征线 $\xi=x+ct$ 及 $\eta=x-ct$。（0.38）式的 $D'Alemdert$ 解为：

$$u=f(x+ct)+g(x-ct) \tag{0.39}$$

在（0.39）式中，f（$x+ct$）的代表向 x 负方向传播的波，g（$x-ct$）代表向 x 的正方向传播的波，特征线表示波动区域与未受扰动区域的分界线。（0.38）式要求在弦的两端点给定边界条件，例如给定 u（0，t）$=u$（l，t）$=0$。此外还要给定初位移及初速度两个初始条件。

抛物线型二阶导微分方程，以热传导方程为代表，也以最简当的无热源的一维热传导方程：

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{0.40}$$

为例来说明问题，（0.40）式中，a 称之为热传导系数，是一个常数。

由于（0.40）式只有一条实特征线，即热量只能从温度高处流向温度低处这一个流动方向。而（0.40）式的定解条件包括一个初始条件及沿直杆热量流动的杆的两端的边界条件。

椭圆型二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=-\frac{q}{T} \tag{0.41}$$