高等学校"十二五"规划教材

线性代数及其MATLAB应用

谢彦红 主 编
吴茂全 韩世迁 副主编

化学工业出版社

高等学校“十二五”规划教材

线性代数及其 MATLAB 应用

谢彦红　主编
吴茂全　韩世迁　副主编

化学工业出版社
·北京·

本书按照普通高等学校教学指导委员会制订的本科数学基础课程教学基本要求，并结合作者多年从事教学实践的经验编写而成。全书共分六章，内容包括行列式、矩阵及初等变换法、求解线性方程组理论与方法、向量的相关性理论、矩阵的特征值问题及二次型化标准形方法等。书中每章最后一节介绍了利用MATLAB软件解决相应线性代数问题的内容，为逐步培养学生运用软件解决数学问题的能力打下良好的基础。课后习题按照一定的难易比例进行配备，习题中融入了近年考研真题，以期满足各层次学生的学习需求。书末附录中介绍了线性代数发展简史，能拓宽视野，扩展知识面，提高数学素养。

本书适用于工科院校本科各专业，亦可供其他相关专业选用，适用面较广。本书还可以作为考研读者及科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其MATLAB应用/谢彦红主编．—北京：化学工业出版社，2014.8

高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-20923-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①线性代数-计算机辅助计-Matlab软件-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2-39

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第125564号

责任编辑：郝英华　　文字编辑：郑　直
责任校对：边　涛　　装帧设计：孙远博

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张10½　字数251千字　2014年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00元

前言 PREFACE

数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。数学教育在培养高素质科学技术人才中越来越显示出其独特的、不可替代的重要作用。

随着计算机技术的飞速发展，线性代数的基本理论和方法在自然科学、社会科学、工程技术及经济管理等领域得到了广泛应用，已经成为广大科技工作者从事基础研究、应用研究必不可少的数学工具。因而线性代数是高等院校理工农医经管等学科本科生必修的一门重要基础课，也是硕士研究生入学必考的科目之一。该课程有助于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数值计算能力和综合运用知识分析解决问题的能力，为后续课程的学习奠定良好的数学基础。

编者依据教育部普通高等学校教学指导委员会所制订的新的本科数学基础课程教学基本要求，将多年的教学经验有机地融入书中，在编写过程中注重数学思想的渗透，重视数学概念产生背景的分析。编者在编写过程中主要考虑了以下几个方面。

（1）线性代数教学学时偏少。在内容安排上力求全面、精炼，注重深入浅出，从具体到抽象，简明易懂，使学生少走弯路地接受新知识。在习题配备上，既有必要的基础训练，又有适当的综合提高题，并挑选了近十年典型的考研真题放在总习题里，如题号后（2013 数学一）表示 2013 年数学一的考题，以期满足各层次学生的需求。

（2）利用代数余子式引入行列式的概念。本书避开了排列、轮换等知识，通过以旧带新的方式，即学生在中学已学过的知识——二、三阶行列式及代数余子式的概念引出 n 阶行列式的定义，使学生更易接受和理解行列式的本质。

（3）突出了矩阵及初等变换方法。本书注重运用矩阵的思想和方法处理问题，在求逆矩阵、矩阵的秩、判别向量组的线性相关性、求解线性方程组及二次型化标准形等问题上，初等变换方法贯穿始终。

（4）注重学生实践能力的培养。为了加强学生运用线性代数知识解决实际问题的实践能力培养，本书在每一章的最后一节均介绍了利用 MATLAB 软件解决相应线性代数问题的内容，为逐步提高学生解决更复杂的实际问题的能力打下良好的基础。

（5）注重数学素养的提升。随着科学技术的迅猛发展，数学文化已渗透到社会的各领域，具备数学素养的高科技人才更适合社会发展需要，因此本书在附录部分简要介绍了线性代数的发展历程，以期拓宽视野、扩展知识面，提高数学素养。附录中还介绍了一元多项式的基本理论，以便讨论矩阵对角化求特征值时参考应用。

本书由谢彦红主编，吴茂全、韩世迁任副主编，参加本书编写的还有李金娜、刘丹、姜鹏、鲁亚男。本书的出版得益于沈阳化工大学各级领导的鼓励和支持，得益于广大同仁的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

编者力求编好此书，但限于水平，难免有疏漏之处，敬请广大同仁及读者批评指教。

编者

2014 年 4 月

目 录 CONTENTS

第1章 行列式

第2章 矩阵

第 3 章 初等变换与线性方程组

第 4 章 向量空间

第 5 章 矩阵的特征值与特征向量

第 6 章 二次型及其标准形

习题参考答案与提示

附录

参考文献

第 1 章　行列式

行列式是一种特定的算式，它是我们今后学习线性代数的一个基本工具．本章将在二、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质及利用其性质计算行列式等内容．最后讨论行列式知识的有关应用．

1.1　二、三阶行列式及 n 阶行列式

1.1.1　二阶、三阶行列式

从消元法解二元线性方程组入手，引入二阶行列式．

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1\text{-}1\text{a}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (1\text{-}1\text{b}) \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 是未知数 x_j $(j=1,2)$ 的系数，b_i $(i=1,2)$ 是常数项．

用消元法消去 x_2，即 $a_{22}\times$式（1-1a）$-a_{12}\times$式(1-1b)，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$a_{11}\times$式(1-1b）$-a_{21}\times$式(1-1a)，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1-1）有唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

从式（1-2）可以看到，x_1，x_2的分母都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组（1-1）的未知量系数所确定的，将方程组（1-1）的系数按原来位置排成两行两列（横的称为行，竖的称为列）的方表（见图 1.1）．

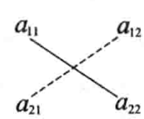

图 1.1

从图 1.1 可以看出，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$就是方表中实线表示的对角线（称为**主对角线**）上的两个数的乘积减去用虚线表示的对角线（称为**次对角线**）上的两个数的乘积所得的差，通常用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即定义$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为**二阶行列式**，其中 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素．行列式一般用字母 D 表示．

由二阶行列式的定义，二元线性方程组(1-1）的解式(1-2)，当方程组(1-1）的系数所组成的行列式［称为方程组（1-1）的**系数行列式**］

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组（1-1）有唯一解，记 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则方程组（1-1）的解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

由二阶行列式的定义，二阶行列式的算法很容易记，即其值等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积

【例 1.1】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ 的值．

解 由二阶行列式的定义，得 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-3\times 2=-7$

【例 1.2】 解方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2=5 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases}$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\neq 0$，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{10}=\frac{20}{10}=2\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{10}=-1$$

定义 1.1 设有 $3\times 3=9$ 个数 a_{ij}（$i=1$，2，3；$j=1$，2，3）排成三行三列的数表，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**．

从上述定义可知，三阶行列式是 6 项的代数和，每一项都是不同行不同列的 3 个数的乘积，再冠以正负号，三项正号，三项负号，它可以用图 1.2 记忆．图中每条实线所连接的三个数的乘积前面加正号，每条虚线所连接的三个数的乘积前面加负号．这一计算行列式的方法叫做**对角线法**．

【例 1.3】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

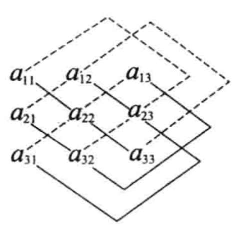

图 1.2

解 由对角线法，有

$D=1\times 0\times 6+3\times 4\times 0+2\times 5\times(-1)-3\times 0\times(-1)-1\times 5\times 0-2\times 4\times 6=-10-48=-58$

类似地，我们可以利用三阶行列式来解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 D 称为方程组（1-3）的系数行列式，D_j 是以常数项 b_1，b_2，b_3 分别替换系数行列式中的 a_{1j}，a_{2j}，a_{3j}（未知数 x_j 的系数）所得的行列式．于是当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

上述用行列式解线性方程组的方法称为**克莱姆（Cramer）法则**，以后还会介绍 n 元线性方程组的克莱姆法则．

【例 1.4】 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases}$$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=2\neq0$

所以方程组有唯一解，又

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=2$$

于是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

1.1.2 二阶和三阶行列式的关系

由二阶和三阶行列式的定义，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

从上式可以看到，三阶行列式等于它的第一行的每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和．为了进一步说明这些二阶行列式与原来三阶行列式的关系，下面引入余子式和代数余子式的概念．

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素，剩下的元素按原来位置顺序组成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}．即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是指：在 D 中划去元素 a_{12} 所在的第一行和第二列所有元素，剩下的元素按它们在 D 中原来位置顺序组成的二阶行列式，即

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用代数余子式，三阶行列式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

这表明：三阶行列式等于它的第一行的每一个元素与其对应的代数余子式的乘积的和．

对三阶行列式所含的 6 项做另外的组合，还可把三阶行列式写成

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

或

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$$

综合之，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$$
$$=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik},\ (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1-4}$$

式（1-4）表明：三阶行列式等于它的任一行的三个元素与其对应的代数余子式乘

积的和．

式（1-4）称为三阶行列式按第 i 行展开的展开式．类似地，容易验证三阶行列式按列展开式为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj},\ (j=1,2,3) \tag{1-5}$$

式（1-5）表明：三阶行列式也等于它的任一列的三个元素与其对应的代数余子式乘积的和．

如果规定一阶行列式 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$（注意与数 a_{11} 的绝对值的区别），并记二阶行列式中 a_{ij}（i，$j=1$，2）的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}|a_{12}|=-a_{12},\quad A_{22}=(-1)^{2+2}|a_{11}|=a_{11}$$

于是二阶行列式也有类似的按行展开式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}=\sum_{k=1}^{2}a_{ik}A_{ik},\ (i=1,2)$$

以及按列展开式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}=\sum_{k=1}^{2}a_{kj}A_{kj},\ (j=1,2)$$

【例 1.5】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 0\end{vmatrix}$$

解 由于第三行中有两个元素为零，故按第三行展开较简便．

$$D=7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-21$$

或者按第一列展开也可以．

1.1.3 *n* 阶行列式

类似二阶和三阶行列式的关系，用归纳法给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.2 设有 $n\times n=n^2$ 个数排成 n 行 n 列的数表，定义 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{cases}a_{11}, & n=1\\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & n>1\end{cases}$$

其中 A_{1j} 是元素 a_{1j} 的代数余子式（$j=1$，2，…，n）．

一般地，n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的 $n-1$ 阶行列式即为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在余子式 M_{ij} 前面加符号 $(-1)^{i+j}$，即为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

同三阶行列式类似，n 阶行列式按行（列）展开定理如下.

定理 1.1 n 阶行列式等于它任一行（列）的 n 个元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n)$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}(j=1,2,\cdots,n)$$

证明 略.

【例 1.6】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由于第四行的零元素较多，所以按第四行展开较简便.

$$D=1\times(-1)^{4+2}\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

再按第一行展开，得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1+2\times(-4)=-7$$

【例 1.7】 证明

(1)主对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ \iddots & & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

注：以上未写出的元素均为零．

证明 只证(3)和(4)．

(3) 按第一行展开

$$D = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1}\ (-1)^{1+1}\left| a_{nn} \right| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 按第一行展开

$$D = a_1\ (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} & a_2 \\ \iddots & \\ a_n & \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_1a_2\ (-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} & a_3 \\ \iddots & \\ a_n & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}\ (-1)^{1+(n-1)} \cdots\ (-1)^{1+2} a_1a_2\cdots a_{n-1} \left| a_n \right|$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_1a_2\cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

上述例子在实际计算中经常用到，较为复杂的行列式往往选择等于零的元素较多的一行（列）展开，再加上利用行列式的性质，在行列式中化出尽可能多的零，或化成以上的特殊行列式，使计算更加快捷简便．

习题 1-1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$

2. 解方程

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -5 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$

3. 解方程组

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ 3x_1-2x_2=12 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=-5 \end{cases}$

4. 计算下列行列式第三行元素的代数余子式，并求出各行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ a & b & c & d \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

5. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ y & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

6. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

1.2　行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式的阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是较为繁琐的．下面介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算．

将行列式 D 的各行与同序号的列互换，所得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等．

证明 用数学归纳法证明．当 $n=1$ 时，结论显然成立．

假设对 $n-1$ 阶行列式上述结论正确，即 $n-1$ 阶行列式与它的转置行列式相等．现证明对上述的 n 阶行列式也正确．将 D 按第一列展开，得到

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

再将 D 的转置行列式 D^{T} 按第一行展开，注意 D^T 中第一行的元素就是 D 中第一列的元素，得到

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}\widetilde{A}_{11}+a_{21}\widetilde{A}_{12}+\cdots+a_{n1}\widetilde{A}_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}\widetilde{A}_{1k}$$

其中 $\widetilde{A}_{1k}=(-1)^{1+k}\widetilde{M}_{1k}$，由于 $\widetilde{M}_{1k}$ 是 M_{k1} 的转置，且 M_{k1} 是 $n-1$ 阶行列式，由归纳假设，$\widetilde{M}_{1k}=M_{k1}$，故 $\widetilde{A}_{1k}=(-1)^{1+k}\widetilde{M}_{1k}=(-1)^{k+1}M_{k1}=A_{k1}$，由此证得

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}=D^T$$

性质 1.1 说明了在行列式中行与列有相同的地位，后面对行所有的性质，对于列也成立，反过来也是对的．

性质 1.2 对换行列式的两行（列），行列式变号（对换行列式的第 i 行与第 j 行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；对换第 i 列与第 j 列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$）．

证明 先证对换行列式相邻两行的情形，设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \leftarrow 第\ i+1\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

对换第 i 和第 $i+1$ 两行后

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \leftarrow 第\ i+1\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$