

郑兆翁 编

(下册)

西北电讯工程学院

一九七八年十月

第六章 注入锁相振荡器

- 6.1 连续波注入锁相的基本原理
- 6.2 负阻振荡器的锁定现象与小信号理论
- 6.3 大信号注入锁定的稳定性
- 6.4 注入锁定的动态分析
- 6.5 注入锁相振荡器中的噪声
- 6.6 大信号注入动态分析与多器件振荡器
- 6.7 谐波、分谐波锁定特性
- 6.8 具有非正弦波形振荡器的通用锁定方程

第七章 锁相环路的基本原理

- 7.1 锁相环路的组成
- 7.2 锁相环路的工作过程
- 7.3 锁相环路的基本方程和相位模型
- 7.4 性能分析与线性化概念
- 7.5 线性化锁相环的传递函数
- 7.6 环路的频率响应与捕捉带宽和同步带宽
- 7.7 环路的稳定性
- 7.8 线性跟踪
- 7.9 跟踪的过渡历程
- 7.10 结语

第八章 普通环路锁相振荡器

- 8.1 普通环路锁相微波振荡器方案
- 8.2 单平衡鉴相器平衡度不完善的效应
- 8.3 双平衡鉴相器非理想特性的效应

- 8.4 环路对杂波干扰的滤除能力
- 8.5 环路锁相振荡器的噪声
- 8.6 工作可靠性的保证措施
- 附录 变容管调谐振荡器中的 α 蜕变

第九章 宽频带(直流到微波)取样器

- 9.1 取样器的一般概述
- 9.2 取样器的性能指标
- 9.3 双锥腔取样器与微带取样器
- 9.4 行波门简介

第十章 取样锁相环路振荡器

- 10.1 取样锁相环的组成
- 10.2 窄脉冲形成的原理电路
- 10.3 窄脉冲形成器的实际设计
- 10.4 取样器的谐波鉴相特性与谐波混频特性
- 10.5 当中频不远小于取样脉冲频率时环路的敘定问题
- 10.6 取样窄脉冲泄漏的影响
- 10.7 取样脉冲重复频率的选择考虑

结 语

第六章 注入锁相振荡器

- 6.1 连续波注入锁相的基本原理
- 6.2 负阻振荡器的锁定现象与小信号理论
- 6.3 大信号注入锁定的稳定性
- 6.4 注入锁定的动态分析
- 6.5 注入锁相振荡器中的噪声
- 6.6 大信号注入动态分析与多器件振荡器
- 6.7 谐波、分谐波锁定特性
- 6.8 具有非正弦波形振荡器的通用锁定方程

第七章 锁相环路的基本原理

- 7.1 锁相环路的组成
- 7.2 锁相环路的工作过程
- 7.3 锁相环路的基本方程和相位模型
- 7.4 性能分析与线性化概念
- 7.5 线性化锁相环的传递函数
- 7.6 环路的频率响应与捕捉带宽和同步带宽
- 7.7 环路的稳定性
- 7.8 线性跟踪
- 7.9 跟踪的过渡历程
- 7.10 结语

第八章 普通环路锁相振荡器

- 8.1 普通环路锁相微波振荡器方案
- 8.2 单平衡鉴相器平衡度不完善的效应
- 8.3 双平衡鉴相器非理想特性的效应

- 8.4 环路对杂波干扰的滤除能力
- 8.5 环路锁相振荡器的噪声
- 8.6 工作可靠性的保证措施
- 附录 变容管调谐振荡器中的 α 蜕变

第九章 宽频带(直流到微波)取样器

- 9.1 取样器的一般概述
- 9.2 取样器的性能指标
- 9.3 双锥腔取样器与微带取样器
- 9.4 行波门简介
- 附录 行波门电路

第十章 取样锁相环路振荡器

- 10.1 取样锁相环的组成
- 10.2 窄脉冲形成的原理电路
- 10.3 窄脉冲形成器的实际设计
- 10.4 取样器的谐波鉴相特性与谐波混频特性
- 10.5 当中频不远小于取样脉冲频率时环路的敘定问题
- 10.6 取样窄脉冲泄漏的影响
- 10.7 取样脉冲重复频率的选择考虑

结 语

第六章

注入锁相振荡器

一个振荡器能锁定到注入振荡器中的外加信号上，只要外加信号的频率近于自激振荡频率，并有足够的振幅，当外信号加上振荡频率立即趋于注入信号频率，一定时间之后，振荡频率就等于注入信号频率。

早在1946年爱德勒从电子管振荡器的模型出发，建立了注入锁相振荡器的基本理论。这一理论给出了锁定带宽，增益和锁定优值等基本特性间的关系，作为应用于电子真空器件的实践的理论基础。1966年三极管和转移电子器件等固体振荡器获得了迅速发展。这些器件因噪声大或长期稳定性差，功率小等一些固有的缺点，限制了其应用。于是人们就自然地指望用锁相的方法来降低其噪声并把各别振荡器的功率迭加起来。

随着固体微波器件的发展，对其锁定模式的各種特性进行了越来越深入的研究。首先发现用低噪声流来锁定固体振荡器，可以使调频噪声大大降低。利用固体振荡器的非线性，可以注入谐波或分谐波频率下的信号，通过器件变频作用变换到基频而使振荡信号锁定，从而获得良好的变频增益。把各振荡器的输出用相互锁定的方法迭加起来，可以增大输出功率和降低噪声。

6.1 连续波注入锁相的基本原理

三极管振荡器的模型图示于图6.1-1，用它可以获得锁定方程。在此图中振荡器包括一个放大器，谐振回路和反馈途径，它包括一个加法器以注入锁定信号。

考虑当振荡器工作在无注入信号时，假定由谐振回路确定振荡频率 ω_0 ，反馈信号 E_0 与 E_g 同相。

当一个频率稍不同于 ω_0 的注入信号 E_i 加在振荡器上，注

6-4

入位号 E_i 与反馈位号 E_o 组合产生 E_g 。在 E_g 与 E_o 之间要有一个相移以使振荡维持在注入位号频率上，所需相移 φ_z 由谐振电路产生。一个谐振电路在频率 ω 产生的相移的近似表示式为

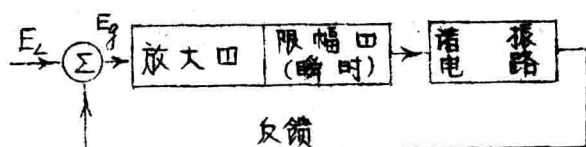


图 6.1-1 振荡口模型

$$\varphi_z = \tan^{-1} \frac{2Q_z(\omega - \omega_0)}{\omega_0} \quad (6.1-1)$$

其中 φ_z 为跨过硬路电压与通过硬路的电流间的相角， Q_z 为品质因数， $\omega - \omega_0$ 为角频率差额。图 6.1-2 是电压矢量图， E_i 对观察者说来可考虑成静止的；如此在图中的静止矢量都有角频率 ω ，即注入位号的角频率，一个矢量以角速度 $d\varphi/dt$ 反时针旋转，则角频率为 $\omega_i + d\varphi/dt$ 。矢量图与谐振电路产生的相移一起，将用来导出锁定方程。

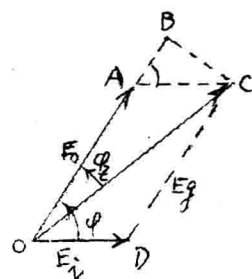


图 6.1-2 振荡口矢量图

从锁定方程能推出锁定时间，锁定带宽，要求的位号电平，和锁定后的状态相位。

为与暂态电路的“时常数”定义相比拟，锁定时间定义为 E_o 与 E_i 之相位角 φ 达到稳定相位差 φ_0 的 $1/e$ 所需的时间。若注入位号起始施于与 E_o 反相，而注入位号频率 ω_i 与自激振荡频率 ω_0 的差额很小，锁定时间则是振荡位号达到相差 $180^\circ/e$ 的时间。在某种情况下，相位暂态近于指数关系，如此前述锁定时间定义，相似于暂态电路的时常数。

对于每一个振荡口，注入位号与振荡口位号之间起始（或称为固有）频差不超过某最大值才能发生锁定，此最大频差称为锁
必须。

定带宽 B_L , 它是 E_i , Q_L , ω_0 的函数。

当注入信号与振荡器信号之间的相位差被定下来, 振荡器就锁定了, 这也是瞬时频差为零的另一种说法。只有在起始频差为零时, 注入信号 E_i 与振荡反馈信号 E_o 间相位差 φ_0 才能为零。如果起始频差存在, 则均存在稳态相位差 φ_0 。

一. 锁相方程

锁定方程能从图 6.1-2 和式 (6.1-1) 得到。从图 6.1-2

$$\tan \varphi_2 = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{OA+AB} = \frac{E_i \sin \varphi}{E_o + E_i \cos \varphi} \quad (6.1-2)$$

由 (6.1-1) 与 (6.1-2) 可得

$$\frac{2Q_L}{\omega_0} [(\omega - \omega_i) - (\omega_0 - \omega_i)] = \frac{E_i \sin \varphi}{E_o + E_i \cos \varphi} \quad (6.1-3)$$

式中 $(\omega_0 - \omega_i)$ 是起始 (固有) 角频率差 $\Delta \omega_0$, 而 $(\omega - \omega_i)$ 是瞬时角频率差 $d\varphi/dt$, 用此替换并移项后得锁相方程

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta \omega_0 - \left(\frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_o} \right) \frac{\sin \varphi}{1 + (E_i/E_o) \cos \varphi} \quad (6.1-4)$$

在注入信号 E_i 远小于反馈信号 E_o 的情况下, 上式简化为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta \omega_0 - \left(\frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_o} \right) \sin \varphi. \quad (6.1-4)$$

二. 锁定带宽 B_L

若 (6.1-4) 式中 $d\varphi/dt$ 等于 0, 得

$$\Delta \omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_o} \frac{\sin \varphi_0}{1 + (E_i/E_o) \cos \varphi_0} \quad (6.1-5)$$

将 $\Delta \omega_0$ 对 φ_0 微分后等于 0 能找出锁定范围 $\Delta \omega_0|_{\max} = B_L$ 。它发生在 $\cos \varphi_0 = E_i/E_o$ 时, 如此

$$\Delta \omega_0|_{\max} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_o} \left(1 - \frac{E_i^2}{E_o^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

6-6

$$\beta_L = \Delta \omega_0 \Big|_{\max} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_0} \left(1 - \frac{E_i^2}{E_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.1-6)$$

在 E_i 远小于 E_0 的情况下，上式简化为

$$\beta_L = \frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_0} \quad (6.1-6')$$

锁定带宽 β_L 是当注入信号频率固定时，允许被锁振荡器的最大角频率变化范围。当被锁振荡器的角频率在 β_L 所限定的范围内变化时，则被锁振荡器与注入信号同步，故 β_L 又称为同步带宽。

三. 锁定后的稳态相差 φ_0

由 $d\varphi/dt$ 等于 0 达到稳态可得稳态相差

$$\varphi_0 = \sin^{-1} \left\{ \frac{E_0}{E_i} \frac{K}{\sqrt{1+K^2}} \right\} \quad (6.1-7)$$

其中 $K = 2Q_L \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}$

对于 $\Delta \omega_0$ 和 E_i/E_0 都很小时，上式简化成

$$\varphi_0 = \sin^{-1} \left(K \frac{E_0}{E_i} \right) = \sin^{-1} \left(2Q_L \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \frac{E_0}{E_i} \right) \quad (6.1-7')$$

四. 必需的注入信号电平

参照 $E_i/E_0 \ll 1$ 时，锁定范围的表示式，要求注入信号为

$$\frac{E_i}{E_0} \geq 2Q_L \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \quad (6.1-8)$$

用功率表示为

$$\frac{P_i}{P_0} \geq (2Q_L)^2 \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \quad \text{或} \quad \sqrt{\frac{P_i}{P_0}} > 2Q_L \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \quad (6.1-9)$$

五. 入锁的暂态过程

积分 (6.1-4) 得

$$\frac{\omega_0}{2Q_L} (1+K^2)t = K(u - u_i) - \log \frac{\frac{K}{1+K^2} \frac{E_0}{E_i} + \sin u}{\frac{K}{1+K^2} \frac{E_0}{E_i} + \sin u_i} + \frac{\frac{E_0}{E_i} \log A}{\left[1 + K \left(1 - \frac{E_0^2}{E_i^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.1-10)$$

$$\text{其中 } A = \frac{\sqrt{1+K^2} + \frac{E_0}{E_i} K \sin u + \left[1+K^2 \left(1 - \frac{E_0^2}{E_i^2}\right) \cos u\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+K^2} + \frac{E_0}{E_i} K \sin u_i + \left[1+K^2 \left(1 - \frac{E_0^2}{E_i^2}\right) \cos u_i\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{K \frac{E_0}{E_i} + \sqrt{1+K^2} \sin u_i}{K \frac{E_0}{E_i} + \sqrt{1+K^2} \sin u}$$

$$K = 2Q_L \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}$$

$$u = \varphi + \varphi_z$$

$$u_i = \varphi_i + \varphi_z \quad \varphi_i \text{ 为起始相差}$$

在某些特殊情况下研究上式结果也是有用的，假定起始频差 $\Delta \omega_0$ (如此 K) 很小，因此 $u = \varphi$ ，则上式成为

$$\tan \frac{\varphi}{2} (\sin \varphi)^C = \tan \frac{\varphi_i}{2} (\sin \varphi_i)^{C-Bt}$$

$$\text{其中 } C = \frac{E_i}{E_0} \ll 1; \quad B = \frac{\omega_0}{2Q_L} \frac{E_i}{E_0} \quad \text{得}$$

$$\varphi = 2 \tan^{-1} \left[\left(\tan \frac{\varphi_i}{2} \right) e^{-Bt} \right] \quad (6.1-11)$$

当起始相角 φ_i 很小时，成为

$$\varphi \simeq \varphi_i e^{-Bt} \quad (6.1-12)$$

即振荡讯号与锁定讯号之间相位差 φ 指数地趋于 0，其速率由 B 确定。

六 小注入讯号时的锁定带宽，增益平方根乘积

锁定增益定义为 $P_0 : P_i$ ， P_0 为振荡讯号功率， P_i 为注入功率。当小注入讯号时即 $E_i/E_0 \ll 1$ ，由 (6.1-6) 得

$$\frac{E_i}{E_0} \frac{\Delta \omega_0 |_{\max}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_L} \quad (6.1-13a)$$

$$\text{即 } \sqrt{\frac{P_i}{P_0}} B = \frac{1}{2Q_L} \quad (6.1-13b)$$

可见要得到大的 $B \sqrt{P_i/P_0}$ 需降低谐振电路的 Q_L 值。

6-8

七 爱德勤公式

在锁定状态下 $d\varphi/dt = 0$ 即振荡频率和锁定频率相同，于是由 (6.1-4) 得

$$\frac{\sin \varphi_0}{1 + \frac{E_i}{E_0} \cos \varphi_0} = \Delta \omega_0 \frac{2Q_L}{\omega_0} \frac{E_0}{E_i}$$

当注入信号很小时即 $\frac{E_i}{E_0} \ll 1$ ，于是近似有

$$\sin \varphi_0 = 2Q_L \frac{E_0}{E_i} \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \quad (6.1-14)$$

上式就是著名的爱德勤公式。

八 相位模型图

如果我们选定 $\omega_0 t$ 为参考点，并设 φ_1 为注入信号的相位， φ_2 为振荡回路输出信号的相位，则 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 且有

$$\Delta \omega_0 = \omega_i - \omega_0 = \frac{d}{dt} \varphi_1$$

则注入锁定方程可以写成

$$\frac{d}{dt} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{d}{dt} \varphi_1 - \beta \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.1-15)$$

$$\text{即} \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \beta \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.1-16)$$

用符号 S 代替 $\frac{d}{dt}$ ，则上式可变为

$$\varphi_2 = \frac{1}{S} \cdot \beta \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.1-17)$$

上式画成相位模型图如图 6.1-3 所示。图中虚线方框的 $\sin$ 表示注入锁定振荡器的相位关系具有正弦性质。

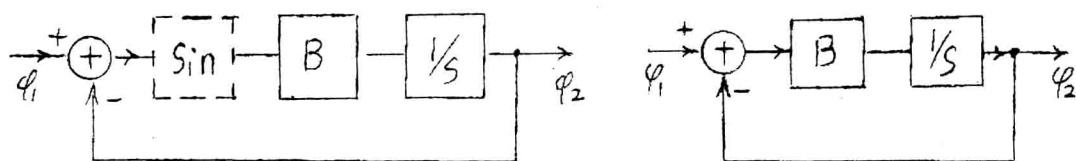


图 6.1-3 注入锁相的相位模型

当 $\phi = \phi_1 - \phi_2 \ll 1$ 时, 式 (6.1-17) 可进一步简化

$$\phi_2 = B(\phi_1 - \phi_2) \frac{1}{s} \quad (6.1-18)$$

从上面可以看出注入锁相相当于一阶锁相环路。

6.2 负阻振荡器的锁定现象与小信号理论

一、固体负阻振荡器的锁定现象

现在的注入锁相负阻振荡器几乎都采用环形回耦合电路, 注入信号由环形回 1 端输入, 经 2 端进至被锁定振荡器, 然后振荡器输出从 3 端耦合出来。

图 6.2-2 所示受激振荡器的典型频谱照片。振荡器使用锑砷二极管, 其自激振荡频率为 $f_0 = 11.372 \text{ GHz}$, 输入的注入信号频率为 $f_1 = 11.307 \text{ GHz}$ 。

当注入信号低于振荡功率 50 dB 时, 在自激振荡器谱线的每一边, 产生一边带, 边带功率大于注入

信号。注入信号功率增大时, 自激振荡谱线被牵引移向注入信号一边, 同时注入频率下的输出增大, 即产生了锁定增益。当注入信号达到低于振荡信号 30 dB 时, 振荡器进入锁定状态, 即振荡器输出被锁定在注入信号频率上。

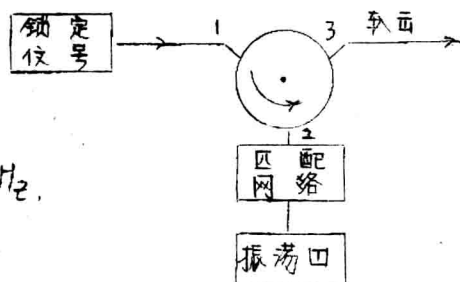


图 6.2-1 注入锁相负阻振荡器

二、小信号注入锁定的似稳态分析

参看图 6.2-1, 从四件看去的电路阻抗保持原来那样, 则锁定振荡方程给为

$$[Z_C(\omega_1) - Z_D(A)]I = E \quad (6.2-1)$$

其中 E 表示由四件看去的注入信号电压, ω_1 为注入频率, 本节的讨论只限于小信号注入, 因而射频电流振幅近似等于自由工作时的振幅 A_0 , 因此从上式得

$$Z_C(\omega_1) = Z_D(A) + \frac{|E|}{A_0} e^{j\varphi} \quad (6.2-2)$$

其中 φ 是 I 与 E 之间的相位差, 式 (6.2-1) 指出在锁定条件下, 从 $Z_D(A)$ 到 $Z_C(\omega_1)$ 的距离由 $|E|/A_0$ 给出, 一般说来四件线上有两个点满足此条件, 对应的矢量关系由图 6.2-3 中的实矢和虚矢表示。虚矢对应为一个不稳定条件 (下面将详细再作分析), 所以只

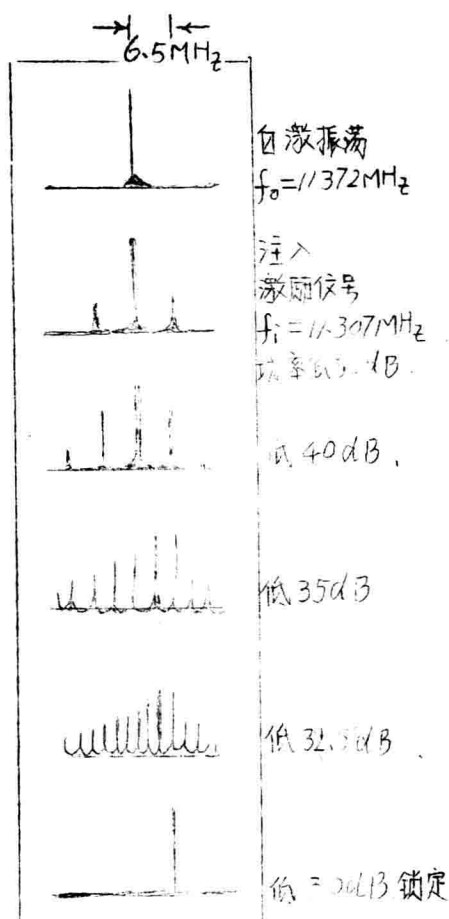
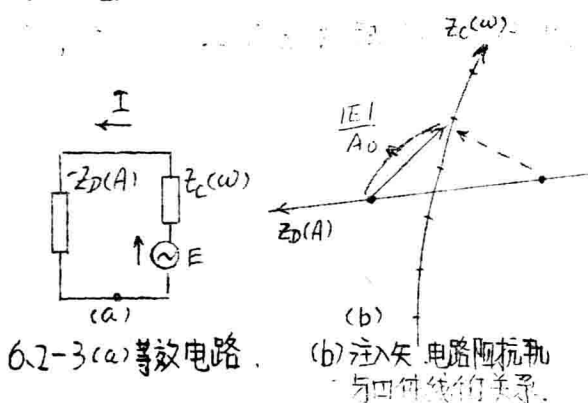
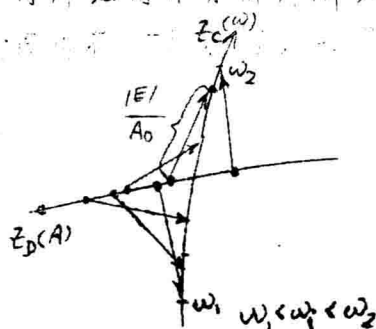


图 6.2-2 注入振荡四件面谱示例。垂直轴取对数坐标。



考虑实矢，此矢称为注入矢。若改变 ω 而保持 $|E|$ 不变，矢端会像图6.2-4所示那样移动。注意： $|E|$ 不变意味着注入功率近似不变，当电路阻抗轨迹近似平行于虚轴时，电路效率变化也很小。当角频率 ω 低于 ω_1 或高于 ω_2 时，从 $z_c(\omega)$ 到四件线的距离变得比 $|E|/A_0$ 长。矢端关系(6.2-2)不再能满足，表示这些条件下没有锁定的可能，从 ω_1 到 ω_2 φ 变化约 180°

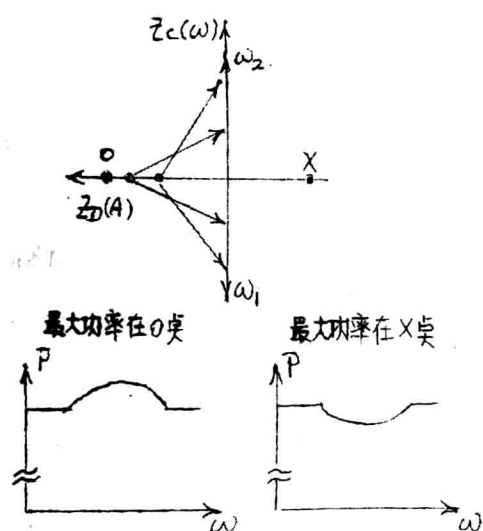


图6.2-5. 注入频率从 ω_1 变到 ω_2 时功率的波动

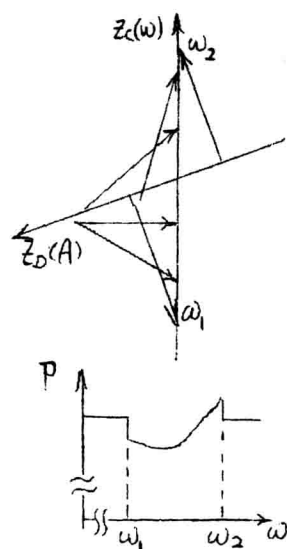


图6.2-6当四件线倾斜时，典型的功率波动。

当四件线与阻抗线正交，功率的变化示于图6.2-5，功率比自由振荡时加大还是减少与最大功率点位于交叉的左边或右边有关，因为这决定了工作点是趋向或者更离开最大功率点。注意下列情况是有趣的，当自由振荡工作位于最大功率点，一阶变动成为零，此情况下，锁定的振荡器的性能像一个良好的放大限幅器。若两轨迹不正交，功率波动就复杂了，变为图6.2-6所示。一旦锁定在 ω_1 建立，功率就降低，最大功率点位于交叉的右边， ω_1 至 ω_2 之间，功率平滑地变化，超过 ω_2 后振荡器立

即失锁，功率回到自由振荡时的数值。实际上未锁定振荡的符号与注入符号相互作用会产生一个拍频，这个差拍频率常常在超过锁定范围之外可以清楚地观察到。方法是将轨迹接到示波器，即可显示出差拍图形。

三、锁定带宽

单调谐振荡器的锁定范围不难计算，因为阻抗轨迹上对应于 $\omega_0 + \Delta\omega$ 与 ω_0 两点之间的距离由 (1.3-20) 给出为 $2\Delta\omega L$ ，所以在锁定带宽的边缘满足关系

$$|2\Delta\omega_M L \cos\theta| = |E|/A_0 \quad (6.2-3)$$

其中 θ 为电路轨迹与元件线交角减 90° ，如图 6.2-7 所示，此关系能用自由振荡功率 P_0 、注入功率 P_i 、谐振电路外界品质因数 Q_e 重写，由代入

$$\frac{1}{2} R_L A_0^2 = P_0$$

$$\frac{\frac{1}{2} |E|^2}{4 R_L} = P_i$$

$$\frac{\omega_0 L}{R_L} = Q_e$$

结果为

$$\Delta\omega_M = \frac{\omega_0}{Q_e} \sqrt{\frac{P_i}{P_0}} \frac{1}{\cos\theta} \quad (6.2-4)$$

注意：上式中的 Q 不是负载 Q ，而是谐振电路的外界 Q ，总锁定带宽 $2\Delta\omega_M$ 反比于此外界 Q ，而正比于注入功率的平方根。当元件线垂直于阻抗轨迹 $\cos\theta = 1$ ，公式变成没有 $\cos\theta$ 的著名的爱德勒公式。

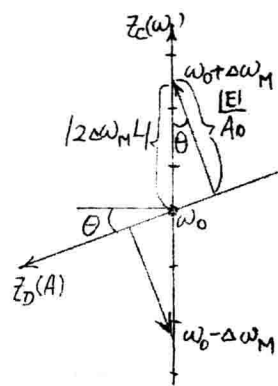


图 6.2-7 锁定带宽的计算。

四. 调频放大

因为注入功率可以比振荡功率低很多，而振荡频率由注入信号的频率确定，所以锁定振荡器用来放大调频信号。此情况下，注入频率随时间变化，而振荡频率紧紧地跟随着它。为了调频放大，锁定范围必须做得比注入信号的频偏大一些，以保持噪声不超过允许的数值，这就要求一个低 Q_c 电路，由于放大引入的相位畸变，亦会随 Q_c 的降低而改进。

6.3 大信号注入锁定的稳定性

在上节的讨论中，我们假定 $|E|$ 小，振荡电流幅度 A 近似等于 A_0 。若需更分析得更精确些，则注入信号的长度需随工作点移动而变化，但是只要 A 对 A_0 的变化百分比很小，此修改不会给讨论带来任何基本的变化。但若小 $|E|$ 的假定不成立了，振荡电流幅度 A 可能与自由振荡值差别很大，则 A 必须由 (6.2-1) 确定，两边取绝对值给以

$$A|Z_c(\omega_i) - Z_D(A)| = |E| \quad (6.3-1)$$

即 A 的可能值由 A 乘以 $Z_D(A)$ 到 $Z_c(\omega_i)$ 的距离（表为 A 的函数）等

于 $|E|$ 得到，如图 6.3-1 所示。

$A|Z_c(\omega_i) - Z_D(A)|$ 的最小值发生在 $Z_D(A)$ 轨迹上件线上最接近 $Z_c(\omega_i)$ 的那点之前。若 $|E|$ 足够大，

(6.3-1) 只有一个解，通常代表一个稳定锁定。对于较小的 $|E|$

一般有三个解，但只有具有最大 A 的解给以稳定锁定，另外的两个通常不稳定，下面我们就来讨论锁定稳定性问题。

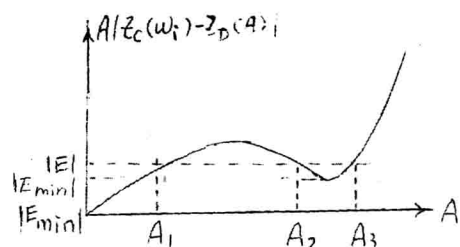


图 6.3-1
大信号注入下可能工作点的确定

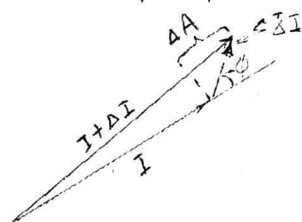


图 6.3-2 $I \pm \Delta I$ 的矢角关系

假定锁定已建立，稳态电流 I 在 ω 对应的方程为

$$[Z_c(\omega_i) - Z_D(A)] I = E \quad (6.3-2)$$

再假定 I 被一小量 ΔI 干扰，那么 ΔI 随时间衰减与否呢？若衰减这样的工作点是稳定的，若不衰减则那样的工作点是不稳定的。为分辨 ΔI 究竟是否衰减，令 I 和 ΔI 表为

$$\left. \begin{aligned} I &= A e^{j\omega_i t} \\ \Delta I &= \Delta I / e^{j(\omega_p t + \phi_0)} = \Delta I / e^{j(\omega_p t + \phi_0 - \omega_i t)} e^{j\omega_i t} \end{aligned} \right\} (6.3-3)$$

其中 $(\omega_p - \omega_i) \ll \omega_i$ ， ΔI 是比射频周期变化快得多的函数， I 与 ΔI 之间的角度给为

$$\phi = \omega_p t + \phi_0 - \omega_i t \quad (6.3-4)$$

因为 ΔI 的幅度乘 $\cos \phi$ 是射频电流幅度的增量 ΔA ，如图 6.3-2 所示，扰动后的方程成为

$$\left\{ Z_c(\omega) - \left[Z_D(A) - \frac{\partial Z_D(A)}{\partial A} \Delta A \right] \right\} (I + \Delta I) = E \quad (6.3-5)$$

方括号中的项是 $Z_D(A + \Delta A)$ 的泰勒展开的前两项。使用上式时需加注：当 $Z_c(\omega)$ 应用到 I ，它为 $Z_c(\omega_i)$ ；当 $Z_c(\omega)$ 应用到 ΔI ， ω 取适应于 ΔI 的适当值，此情况下它是一个复数，其实部为 ω_p ，虚部将决定 ΔI 是衰减或者增长。忽略上式中的二阶项，给出

$$\frac{\partial Z_D(A)}{\partial A} \Delta A / \Delta I + [Z_c(\omega) - Z_D(A)] \Delta I = 0 \quad (6.3-6)$$

其中， $[Z_c(\omega) - Z_D(A)] I$ 与 E 相消了。左手边的第一项包含的 $\Delta I / I \cos \phi$ ，可以由 (6.3-3) 和 (6.3-4) 计算。

$$\begin{aligned} |\Delta I| I \cos \phi &= \Delta I / A e^{j\omega_i t} \frac{1}{2} [e^{j(\omega_p t + \phi_0 - \omega_i t)} + e^{-j(\omega_p t + \phi_0 - \omega_i t)}] \\ &= \frac{1}{2} \Delta I / A e^{j(\omega_p t + \phi_0)} [1 + e^{-j2(\omega_p t + \phi_0 - \omega_i t)}] \\ &= \frac{1}{2} \Delta I \cdot A [1 + e^{-j2(\omega_p t + \phi_0 - \omega_i t)}] \end{aligned} \quad (6.3-7)$$