东北师范大学物理函授教材

量子力学
习题解答

张林芝 王曙光 高振金 编

东北师范大学函授教育处

1983年6月长春

东北师范大学物理函授教材

量子力学

习题解答与附录

东北师范大学函授教育处

目　　录

第一章　量子力学发展简况

※1、利用普朗克能量分布函数证明辐射的总能量和绝对温度的四次方成正比，并求出比例系数。

【解】普朗克公式

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^{\nu^3}}{c^3}\cdot\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

表示绝对黑体单位体积中频率在（ν，$\nu+d\nu$）间的辐射能量，单位体积辐射的总能量（即辐射频率在 $0\to\infty$ 中）为

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

做变量代换。令 $x = \dfrac{h\nu}{KT}$，则

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\cdot\left(\frac{KT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \left[\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}\right]T^4 = \sigma T^4$$

$\therefore E\propto T^4$.

式中　$$\sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

为比例系数。完成积分即可求得 σ 的数值。

$$\sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$

$$= \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty x^3e^{-x}\left(1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots\right)dx =$$

$$=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty x^3\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}dx$$

令 $y=nx$。则

$$\sigma=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}\int_0^\infty y^3e^{-y}dy$$

用分部积分法求积分

$$\int_0^\infty y^3e^{-y}dy=-y^3e^{-y}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty 3y^2e^{-y}dy=-3y^2e^{-y}\Big|_0^\infty+$$

$$+3\int_0^\infty 2ye^{-y}dy$$

$$=-6ye^{-y}\Big|_0^\infty+6\int_0^\infty e^{-y}dy=-6e^{-y}\Big|_0^\infty=6$$

又 $\because\ \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

$$\therefore\ \sigma=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}\int_0^\infty y^3e^{-y}dy=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\pi^4}{90}\cdot 6=\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi^5k^4}{c^3h^3}$$

$=7.56\times10^{-15}$尔格/厘米·度^4

($h=6.626\times10^{-27}$尔格·秒；$k=1.3805\times10^{-16}$尔格度$^{-1}$)

2、钾和钨的光电效应的红限分别为 600 毫微米和 270 毫微米，求脱出功。

〔解〕：$\because\ \omega=\frac{2\pi c}{\lambda}$，$1\,eV=1.602\times10^{-12}$尔格

$\therefore$脱出功 $A=\hbar\omega_{红}=\frac{\hbar 2\pi c}{\lambda_{红}}\cdot\frac{1}{1.6\times10^{-12}}eV$

$$\therefore\qquad A_{钾}=\frac{1.05\times10^{-27}\times6.28\times3\times10^{10}}{600\times10^{-7}\times1.6\times10^{-12}}\doteq2.06eV$$

$$A_{钨}=\frac{1.05\times10^{-27}\times6.28\times3\times10^{10}}{270\times10^{-7}\times1.6\times10^{-12}}\doteq4.58eV$$

3. 计算当 $\theta=90^{\circ}$时对于可见光（$\lambda=5000\dot{A}$）和具有 $\lambda=0.050\dot{A}$的γ射线的康普顿位移。

〔解〕： ∵ $\theta=90^{\circ}$，$\lambda_c=\dfrac{h}{m_e c}\doteq 2.43\times10^{-2}\dot{A}$

∴康普顿位移

$$\triangle\lambda=\lambda'-\lambda=\lambda_c\ (1-\cos\theta)\ =\lambda_c=2.43\times10^{-2}\dot{A}$$

显见康普顿位移$\triangle\lambda$ 与散射光的波长无关。但散射光的相对改变确与波长有关：

$$\frac{\triangle\lambda}{\lambda_{可见}}=\frac{2.43\times10^{-2}}{5000}\doteq 4.86\times10^{-6}$$

$$\frac{\triangle\lambda}{\lambda_\gamma}=\frac{2.43\times10^{-2}}{0.050}=4.86\times10^{-1}$$

4. 试用量子化条件求一维谐振子的能量。

〔解〕：量子化条件：$\oint p dq=nh$

谐振子能量：$E=\dfrac{p^2}{2\mu}+\dfrac{1}{2}\mu\omega^2x^2$

解法一：令 $x=x_0\sin\omega t$，则 $\dot{x}=x_0\omega\cos\omega t$

$$\therefore\quad E=\frac{(\mu\dot{x})^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\omega\omega^2(x_0\sin\omega t)^2=\frac{1}{2}\mu\omega^2x_0^2\cos^2\omega t+$$

$$+\frac{1}{2}\mu\omega^2x_0^2\sin^2\omega t=\frac{1}{2}\mu\omega^2x_0^2$$

∵ $q\sim x$，$p\sim\mu\dot{x}$

$$\therefore\oint pdq=\oint\mu\omega x_0\cos\omega t\,d(x_0\sin\omega t)=\mu\omega^2x_0^2\int_0^T\cos^2\omega t\,dt$$

$$(T=\frac{2\pi}{\omega}=\mu\omega^2x_0^2\int_0^T\frac{1}{2}(1+\cos2\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\mu\omega^2 x_0^2 T + \frac{1}{4}\mu\omega x_0^2 \sin 2\omega t \Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\mu\omega^2 x_0^2 \frac{2\pi}{\omega} = E\frac{2\pi}{\omega} = nh$$

$$\therefore E = nh \cdot \frac{\omega}{2\pi} = nh\omega$$

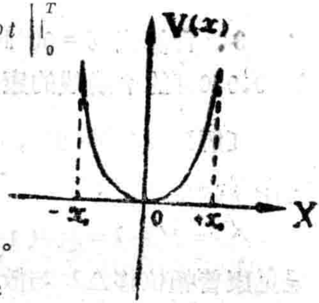

图 1 — 1

可见一维谐振子的能量是量化子的。

解法二：$\because E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$

$$\therefore p = \sqrt{2\mu(E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2)}$$

在 $x = -x_0, x_0$ 点，$E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x_0^2$ $\therefore p = \mu\omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$

$$\therefore \oint p dq = \oint p dx = 2\int_{-x_0}^{+x_0} \mu\omega\sqrt{x_0^2 - x^2}\,dx = 2\mu\omega\left[\frac{x}{2}\sqrt{x_0^2 - x^2} + \frac{x_0^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{x_0}\right]_{-x_0}^{+x_0}$$

$$= 2\mu\omega\frac{x_0^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \mu\omega\pi x_0^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = nh$$

$$\therefore E = nh \cdot \frac{\omega}{2\pi} = n\hbar\omega$$

※5 平面平面转子的转动惯量为 I，求它的能量允许值。

〔解〕：量子化条件：$\oint p dq = nh$

平面转子能量：$E = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2$

式中 ω 为转子角速度，则转子角动量为 $J = \mathrm{I}\omega$

$\because p \sim J$，$q \sim \theta$

$$\therefore \oint p dq = \int_0^{2\pi} J d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{I}\omega d\theta = 2\pi \mathrm{I}\omega = nh$$

$$\therefore \omega = \frac{nh}{2\pi \mathrm{I}}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{n^2h^2}{4\pi^2 \mathrm{I}^2} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\frac{n^2\hbar^2}{I^2} = \frac{n^2\hbar^2}{2\mathrm{I}}$$

可见平面转子的能量也是量子化的。

※6．一带电 q 的粒子在与均匀磁场 $\vec{B}$ 垂直的平面内运动，求粒子轨道的可能半径和能量允许值。

〔解〕：由电磁学知，一荷电粒子在与均匀磁场垂直的方向运动时必做园轨道运动，因而粒子只有切向速度 $\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 径向速度 $\dot{r} = 0$，因而粒子所受的罗伦兹力即是粒子做园运动的向心力。另外，该粒子的能量除动能 T 外，还包括园运动的带电粒子所产生的磁矩与外磁场的相互作用能 U。如此，可由量子化条件得所求。

（1）可能半径：

$$\because \frac{mv^2}{r} = \frac{q}{c}vB \quad \therefore v = \frac{qrB}{mc}, \quad r = \frac{mcv}{qB}$$

对园运动，取转角 θ 为广义坐标（$\omega = \dot{\theta}$），则角动量为广义动量 $p_\theta = J$，体系的哈密顿函数为

$$H = T + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

$$\therefore \quad p_\theta = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega = mvr$$

$$\therefore\quad \oint p_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} mr^2\omega d\theta = 2\pi mr^2\omega = 2\pi mvr = 2\pi m\frac{qrB}{mc}r$$
$$= nh$$

$$\therefore\quad r^2 = \frac{nhmc}{2\pi mqB} = \frac{n\hbar c}{qB} \qquad \therefore\quad r = \sqrt{\frac{n\hbar c}{qB}}$$

可见粒子轨道半径 r 是量子化的，此即园轨道的可能半径。

（2）允许能量：

动能：$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qrB}{mc}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2}{mc^2}\frac{n\hbar c}{qB} = \frac{qB}{2mc}n\hbar$

荷电粒子做园运动相当于磁矩

$$M = \frac{q}{2mc}J = \frac{q}{2mc}p_\theta = \frac{q}{2mc}mvr = \frac{q}{2mc}\cdot\frac{qrB}{mc}r =$$
$$= \frac{q^2B}{2mc^2}\cdot\frac{n\hbar c}{qB} = \frac{q}{2mc} = \frac{q}{2mc}n\hbar$$

$\therefore$ 该磁矩与磁场 B 的相互作用能大小为

$$U = M\cdot B = \frac{qB}{2mc}n\hbar$$

可见，动能和势能都是量子化的。这是自然的，因为 r 是量子化的，而 T，U 都是 r 的函数。$\therefore$ 总能量的允许值为

$$E = T + U = \frac{qB}{2mc}n\hbar + \frac{qB}{2mc}n\hbar = \frac{qB}{mc}n\hbar.$$

※7．用量子化条件求限制在箱内运动的粒子的能量。箱的长宽高分别为 a,b,c。

〔解〕：粒子被限制在箱内运动，其物理描写是：

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x > a, x < 0); \end{cases} \qquad U(y) = \begin{cases} 0 & (0 < y < b) \\ \infty & (y > b, y < 0) \end{cases}$$

$$U(z)=\begin{cases}0 & (0<z<c)\\ \infty & (z>c, z<0)\end{cases}$$

由于粒子在箱内运动是自由的，

$\therefore \vec{U}=$ 常量　$E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$

为简单计，我们讨论粒子沿 x 方向运动。

有　$q=x$，$p_x=m\dot{x}=p=$ 常量。代入量子化条件

有　$\oint p dq=\oint p_x dx=m\int_0^a v_x dx+m\int_a^0(-v_x)dx=$

$$=mv_x x\Big|_0^a-mv_x x\Big|_a^0$$

$$=mv_x a+mv_x a=2mv_x a=n_x h$$

$\therefore\quad v_x=\frac{n_x h}{2ma}$。同理有 $v_y=\frac{n_y h}{2mb}$，　$v_z=\frac{n_z h}{2mc}$

$\therefore\quad E=\frac{1}{2}m\ (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\ =\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$

也可用驻波条件处理：

先讨论 x 方向运动。$\because$ 粒子束缚在箱内运动，$\therefore$ 束缚态的驻波条件为

$$2a=n_x\lambda_x\qquad\qquad \therefore \lambda_x=\frac{2a}{n_x}.$$

而 $\because\ \lambda=\frac{h}{p}$。　$\therefore \frac{h}{p_x}=\frac{2a}{n_x}$　　$\therefore p_x=n_x h/2a$

$\therefore$ 在 $0<x<a$ 范围内粒子的自由运动能量为

$$E_x=\frac{p_x^2}{2m}=\frac{1}{2m}\cdot\frac{n_x^2h^2}{4a^2}=\frac{n_x^2h^2}{8ma^2}$$

同理有 $E_y = \dfrac{n_y^2 h^2}{8mb^2}$， $E_z = \dfrac{n_z^2 h^2}{8mc^2}$

$$\therefore\quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

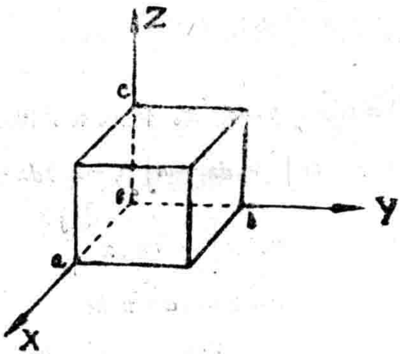

图 1—2

第二章 波函数与薛定谔方程

1、求下列各粒子相应的德布洛意波长：

（1）被100V电压加速的电子；

（2）被100V电压加速的质子；

（3）能量为100eV、质量为1克的质点；

（4）温度$T=1K$时具有动能$E=\frac{3}{2}KT$的氦原子。

〔解〕：解这类问题，主要是正确运用爱因斯坦——德布洛意关系。

即 $\lambda=\frac{h}{p}=h/\sqrt{2mE}$（∵上列各题给出的能量很小，此处用了非相对论公式 $E=\frac{p^2}{2m}$）

（1）∵ 电子获得的能量为

$E_1=100eV=100\times1.6\times10^{-12}$尔格$=1.6\times10^{-10}$尔格，

$m_1=9\times10^{-28}$克.

$$\therefore \lambda_1=\frac{h}{\sqrt{2m_1E_1}}=\frac{6.62\times10^{-27}}{\sqrt{2\times9\times10^{-28}\times1.6\times10^{-10}}}$$

$$\doteq1.23\times10^{-8}cm=1.23\dot{A}$$

（2）∵质子获得的能量为

$E_2=100eV=1.6\times10^{-10}$尔格

$m_2=1840m_1=1840\times9\times0^{-28}$克

有$\lambda_2=\dfrac{h}{\sqrt{2m_2E_2}}=\dfrac{6.62\times10^{-27}}{\sqrt{2\times1840\times9\times10^{-28}\times1.6\times10^{-10}}}$

$=\dfrac{\lambda_1}{42.9}\doteq0.29\times10^{-1}\dot{A}$

（3） $E_3=1.6\times10^{-10}$尔格

$m_3=1$ 克

有 $\lambda_3=\dfrac{h}{\sqrt{2m_3E_3}}=\dfrac{E_1}{\sqrt{\dfrac{1}{9}\times10^{28}}}$

$=\dfrac{3\lambda_1}{10^{14}}=3.69\times10^{-14}\dot{A}$

（4） $E_4=\dfrac{3}{2}KT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-16}\times1$

$=2.07\times10^{-16}$尔格

$m_4=4\times1840\times9\times10^{-28}=4\times1.66\times10^{-24}$克

有$\lambda_4=\dfrac{h}{\sqrt{2m_4E_4}}=\dfrac{6.62\times10^{-27}}{\sqrt{2\times4\times1.66\times10^{-24}\times2.07\times10^{-16}}}$

$=12.6\times10^{-8}cm=12.6\dot{A}$

2、若电子和中子的德布洛意波长都等于1 $\dot{A}$，求它们的速度和动能。

〔解〕：由德布洛意关系 $\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{mv}$

有 $v=\dfrac{h}{m\lambda}$ $T=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{h^2}{2\lambda^2m}$

（1）电子的速度和动能：

$$v=\frac{h}{m\lambda}=\frac{6.62\times10^{-27}}{9\times10^{-28}\times10^{-8}}=0.74\times10^{9}(cm/s)$$

$$T=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{(6.62)^{2}\times10^{-54}}{2\times9\times10^{-28}\times10^{-16}}$$

$$=2.47\times10^{-10}\ (\text{尔格})$$

（2）中子的速度和动能：

$$v=\frac{h}{m\lambda}=\frac{6.62\times10^{-27}}{1840\times9\times10^{-28}\times10^{-8}}=\frac{0.74\times10^{9}}{1840}$$

$$=0.40\times10^{6}(cm/s)$$

$$T=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{(6.62)^{2}\times10^{-54}}{2\times1840\times9\times10^{-28}\times10^{-16}}$$

$$=\frac{2.47\times10^{-10}}{1840}=1.34\times10^{-13}\ (\text{尔格})$$

3、一个具有5 MeV能量的α粒子穿过原子时，可否用经典力学来处理？设枪弹质量为20克，飞行速度为1000米/秒，求其德布洛意波长，并讨论有无必要用波动力学来处理。

〔解〕：（1）仅当α粒子的波长$\lambda\ll a$时（为原子半径）方可用经典力学处理（∵这时量子力学效应很小）所以解此问题，只要求出α粒子德布洛意波长λ，与原子半径$a\sim10^{-8}$ cm比较即可了。

$$\because\ m_{\alpha}=4\times1840\times9\times10^{-28}=4\times1.67\times10^{-24}$$

$$=6.69\times10^{-24}\ (\text{克})$$

$$E_\alpha = 5MeV = 5\times10^6\times1.6\times10^{-12}$$
$$=8.01\times10^{-6}\ (尔格)$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}=\frac{6.62\times10^{-27}}{\sqrt{2\times6.69\times10^{-24}\times8.01\times10^{-6}}}$$
$$=0.62\times10^{-12}cm.$$

可见　$\lambda \ll a\sim10^{-8}cm$.　　　∴可用经典力学处理。

（2）枪弹波长

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{6.62\times10^{-27}}{20\times10^5}=3.31\times10^{-33}cm$$

可见 λ 极短，在宏观尺度内是微不足道的，∴不必用波动力学，而用经典力学处理即可了。

4．粒子在一维无限深势阱中运动

$$\psi(x)=A\sin\frac{\pi}{a}x\quad(0<x<a)$$

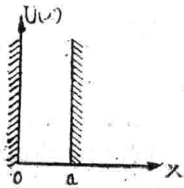

图2.1

求：（1）在何处找到粒子的几率密度为零？何处几率密度最大？并求出归一化常数A.

（2）$\overline{x}=?$　$\overline{\hat{p}}=?$

〔解〕：（1）按照波函数的统计解释，若描写体系状态的波函数是归一化的，则波函数 $\psi(x)$ 的模平方代表粒子出现在 x 点的几率密度，即

$$w(x)=|\psi(x)|^2$$

所以几率密度为零的点的位置可如下求得：

$\because \quad w(x)=|A|^2\sin^2\frac{\pi}{a}x=0$ 要求$\frac{\pi}{a}x=n\pi$,

$\therefore x=na$, $\quad\because 0<x<a$, $\quad\therefore n=0,1$

$\therefore x=0$，a时几率密度为零。

求几率密度最大点的位置:

$$\frac{dw(x)}{dx}=2A^2\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{a}x\cdot\frac{\pi}{a}=0$$

故只能有 $\sin\frac{\pi}{a}=0$ 或 $\cos\frac{\pi}{a}x=0$

但因 $\sin\frac{\pi}{a}\pi=0$ 时恒有$w(x)=0$，不满足要求，

$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{a}x=0$， 即 $\frac{\pi}{a}x=\frac{1}{2}(2n+1)\pi=(n+\frac{1}{2})\pi$

$\therefore \quad x=(n+\frac{1}{2})a$，显然只有 $n=0$，即 $x=\frac{1}{2}a$时

$$w(\frac{a}{2})=|A|^2\text{最大}$$

求归一化系数A:

$$\int_0^a|\psi(x)|^2dx=\int_0^a A^2\sin^2\frac{\pi}{a}xdx=\int_0^a\frac{1}{2}A^2(1-\cos\frac{2\pi}{a}x)dx$$

$$=\frac{1}{2}A^2\left(a-\frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x\Big|_0^a\right)=\frac{1}{2}A^2(a-0)=\frac{a}{2}A^2=1$$

$\therefore \quad A=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

（2）$\overline{x} = \int_0^a \psi^*(x) x \psi(x) dx = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2 \frac{\pi}{a} x dx$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \int_0^a (x - x\cos\frac{2\pi}{a}x) dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int_0^a x dx - \int_0^a x\cos\frac{2\pi}{a} x dx\right]$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2\pi} x\sin\frac{2\pi}{a} x \Big|_0^a + \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2\pi}\int_0^a \sin\frac{2\pi}{a} x dx$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{1}{a} \cdot (\frac{a}{2\pi})^2 \cos\frac{2\pi}{a} x \Big|_0^a = \frac{a}{2}$$

$$\overline{\hat{p}} = \int_0^a \psi^*(x) (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) dx$$

$$= -i\hbar\frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{\pi}{a} x\cos\frac{\pi}{a} x dx$$

$$= -i\hbar\frac{2}{a}\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta \qquad (令\theta = \frac{\pi}{a}x)$$

$= 0$　　（正交性）

可见纯虚算符对实函数的平均值为零。

5、一维线性谐振子处在基态

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2 - \frac{i}{2}\omega t}$$

求：（1）归一化系数A；