工科研究生教材·数学系列

矩阵分析引论

JU ZHEN FEN XI YIN LUN

第五版

罗家洪 方卫东 编著

JU ZHEN FEN XI YIN

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

工科研究生教材·数学系列

矩阵分析引论

（第五版）

罗家洪　方卫东　编著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生教材，全书共分六章：线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的标准形与若干分解形式、矩阵函数及其应用、特征值的估计与广义逆矩阵、非负矩阵。书中着重介绍了工科专业应用较多的矩阵分析基本理论和方法，注重理论和应用的结合，具有工科教材的特点。

本书也可供工科学生、教师及工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析引论/罗家洪，方卫东编著．—5版．—广州：华南理工大学出版社，2013.2
(工科研究生教材·数学系列)
ISBN 978-7-5623-3862-8

Ⅰ．①矩…　Ⅱ．①罗…　②方…　Ⅲ．①矩阵分析-研究生-教材　Ⅳ．①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 015100 号

矩阵分析引论
罗家洪　方卫东　编著

出版发行：华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
http://www.scutpress.com.cn　E-mail：scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
责任编辑：张　颖
印 刷 者：湛江日报社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张**：11.75　**字数**：312 千
版　　次：2013 年 2 月第 5 版　2013 年 2 月第 20 次印刷
定　　价：20.00 元

版权所有　盗版必究　　印装差错　负责调换

前　言

本书是根据工科研究生的教学要求编写的教材。多年来，我国许多院校开设了“矩阵分析”或“矩阵理论”这门研究生公共基础课，而且大多是安排50～60学时，讲授的基本内容大体上就是本书前五章的内容（带＊号者除外），其余少量内容各校选择不一。本书选择了有重要应用价值的非负矩阵（第六章）来做扼要介绍。

“矩阵分析”或“矩阵理论”课程是比较抽象难学的。为了收到较好的教学效果，本书较多地介绍了矩阵理论在线性系统等方面的应用，这样学生学起来就不会感到那么枯燥了。学习抽象数学，如果知道定义、定理的来龙去脉，可能效果会好一些。这些应用性质的内容，并不一定要讲，或仅作简单介绍就可以了。

本书以简短的篇幅扼要地阐述了近代矩阵理论相当广泛而又很基本的内容。掌握了这些知识，学习后继专业课程，或进一步提高矩阵论的知识水平，就比较容易了。

本书自1992年出版以来，被国内许多院校选作教材，已修订了4次，重印了19次，发行于国内外。1993年6月曾获“中南地区大学出版社优秀教材二等奖”。从第2版起增加了习题答案。第5版对向量、矩阵、数集等数学符号作了规范，使用了国家标准，保持与现行大多数线性代数教材数学符号相一致；另外，根据我们在教学过程中的一些体会和读者的建议，增删了一些内容和例题，改正了错漏之处，对前两章基础理论部分补充选编了一些典型例题和详细解答，以便于学习。

感谢王进儒教授在审校本书第1版时的热情指导，感谢使用本教材的老师们的批评和鼓励，感谢本书的责任编辑在编印本书时的出色工作。

作　者

2013年1月于华南理工大学

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1 线性空间与线性变换

本章扼要概述线性空间与线性变换的基本概念和基本理论,这是学习矩阵分析及其应用的入门知识.对于线性代数基础比较好的读者,有些部分粗看一下就可以了.

1.1 线性空间的概念

人们谈论问题,往往都是就一定"范围"来说的,脱离了这个"范围",就难以讲清楚了,甚至只能在某个"范围"内才能提出或研究某种问题.明白了这一点,就较容易理解我们引入数域及线性空间的目的了.

我们知道,由所有有理数组成的集合具有这样的性质:这集合中任意两数的和、差、积、商(除数不为零)仍是该集合中的数,这个集合用$\mathbb{Q}$表示.类似地,由所有实数构成的集合$\mathbb{R}$,以及由所有复数构成的集合$\mathbb{C}$也都具有这一性质.这三个集合的包含关系为

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}.$$

因此我们说"一个复数"时,自然包括这个数可能是有理数或实数这两个特殊情况在内.

在引入线性空间这一重要概念之前,首先要给出数域的概念.

如果复数的一个非空集合$\mathbb{P}$含有非零的数,且其中任意两数的和、差、积、商(除数不为零)仍属于该集合,则称数集$\mathbb{P}$为一个**数域**.于是上述集合$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$都是数域,分别称为**有理数域**、**实数数域**及**复数域**.又如集合

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

也构成一数域,请读者加以验证.但是,由所有整数组成的集合$\mathbb{Z}$是不构成数域的.

数域有一个简单性质,即所有的数域都包含有理数域作为它的一部分.特别地,每个数域都包含整数0和1.现在我们可以给出线性空间的定义了.

定义 1-1 设V是一个非空集合,$\mathbb{P}$是一数域.如果

(1) 在集合V上定义了一个二元运算(通常称为**加法**),即是说,V中任意两个元素$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$经过这个运算后所得到的结果,仍是集合V中的唯一确定的元素,这元素称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**和**,并记作$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;

(2) 在数域$\mathbb{P}$与集合V的元素之间还定义了一种运算,叫做**数量乘法**,即对于$\mathbb{P}$中任意数k与V中任意元素$\boldsymbol{\alpha}$,经这一运算后所得的结果仍为V中一个唯一确定的元素,称为k与$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积**,记作$k\boldsymbol{\alpha}$;

(3) 上述两个运算满足下列八条规则:

(i) 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$, $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(iii) V中存在一个零元素,记作$\mathbf{0}$,对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,都有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(iv) 任一$\boldsymbol{\alpha}\in V$,都有$\boldsymbol{\beta}\in V$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,元素$\boldsymbol{\beta}$称为$\boldsymbol{\alpha}$的负元素,记作$-\boldsymbol{\alpha}$;

(ⅴ) 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,都有 $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(ⅵ) 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V,k,l\in\mathbb{P},k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(ⅶ) 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V,k,l\in\mathbb{P},(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(ⅷ) 对任一 $k\in\mathbb{P},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$,

则集合 V 称为**数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间或向量空间**. V 中的元素常称为向量. V 中的零元素称为零向量. 当$\mathbb{P}$ 是实数域时, V 叫实线性空间;当$\mathbb{P}$ 是复数域时, V 叫复线性空间. 数域$\mathbb{P}$ 上的线性空间有时简称为线性空间.

由定义可以证明:

线性空间 V 中的零向量是唯一的; V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素也是唯一的;并且有

$$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\quad k\,\mathbf{0}=\mathbf{0},\quad (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},$$

这里 $k\in\mathbb{P},\boldsymbol{\alpha}\in V$. 又 V 中元素的减法可以定义为(对任何 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$)

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

下面是一些常见的线性空间的例子.

例 1-1 若 $\mathbb{P}$ 是数域, V 是分量属于 $\mathbb{P}$ 的 n 元有序数组的集合

$$V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\forall x_i\in\mathbb{P}\},$$

若对 V 中任两元素

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

及每个 $k\in\mathbb{P}$(记作 $\forall k\in\mathbb{P}$),定义加法及数量乘法为

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\quad k\boldsymbol{X}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),$$

则容易验证,集合 V 构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间. 这个线性空间记为$\mathbb{P}^n$.

例 1-2 所有元素属于数域 $\mathbb{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵组成的集合,按通常定义的矩阵加法及数与矩阵的数量乘法,也构成数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间,并把它记为$\mathbb{P}^{m\times n}$.

例 1-3 若 n 为正整数, $\mathbb{P}$ 是数域,则系数属于$\mathbb{P}$ 而未定元为 t 的所有次数小于n 的多项式的集合. 这个集合连同零多项式在内,按通常多项式的加法及数与多项式的乘法构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间. 我们用 $\mathbb{P}[t]_n$ 代表这个空间. 若把"次数小于 n 的"这一限制取消,则也得到一个线性空间,并记为 $\mathbb{P}[t]$.

例 1-4 所有定义在区间$[a,b](a\leqslant b)$上的实值连续函数构成的集合,按照函数的加法及数与函数的乘法,显然构成实数域上一个线性空间,记为 $\mathbb{R}[a,b]$.

在讨论线性空间的问题时,下面几个概念是必须熟知的.

定义 1-2 设 V 是数域$\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是V 的一组向量,如果 $\mathbb{P}$ 中有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},\tag{1-1}$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**;若等式(1-1)当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才成立,则称这组向量是**线性无关**的.

由定义得知,如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,则使得式(1-1)成立的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有一个不等于零,比如 $k_1\neq0$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

这时,我们说向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.或者说,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性表示(表出)**.

一般地说,一组向量(含有限个向量)线性相关时,则其中至少有一个向量可由这组中其它向量线性表出;反过来,如果这组向量具有这一性质,则这组向量必定线性相关.但不难推知,线性无关的一组向量,其任一向量都不可能由这组中其余向量线性表出.

定义 1-3　设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间,如果 V 中存在一组向量,满足

(1) 向量组线性无关;

(2) V 中任一向量可由向量组线性表示,

则称该组向量构成 V 的**一个基**.

若 V 的一个基中向量个数为 n,称 n 为 V 的**维数**,记为 $\dim V=n$;若基中向量个数不是有限数时,称 V 是无限维向量空间.本书主要讨论有限维线性空间.

在 n 维线性空间中,其任意的 n 个线性无关向量都构成它的一个基.由线性空间维数定义可知,在有限维线性空间中,基是存在的,但不是唯一的.因为,当维数是 n 时,空间里的任何 n 个线性无关的向量都可以作它的一个基.

定理 1-1　设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基,则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以表示为这个基的线性组合,且表示式是唯一的.

证明　由定义 1-3 知

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \tag{1-2}$$

如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 还有另一表示

$$\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n, \tag{1-3}$$

则由式(1-2)、式(1-3)即得

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n-l_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

因基向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以

$$k_1-l_1=k_2-l_2=\cdots=k_n-l_n=0,$$

从而有 $k_i=l_i(i=1,2,\cdots,n)$.这证明了表示式的唯一性.证毕.

表示式(1-2)中的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**.此定理说明,取定一个基后,每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这个基下的坐标是唯一确定的.$\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个坐标 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

我们再来看看前述几个例子中线性空间 $\mathbb{P}^n,\mathbb{P}^{m\times n},\mathbb{P}[t]_n$ 的维数.

首先,容易证明

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,\cdots,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,\cdots,0),\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=(0,0,\cdots,1)$$

是线性空间 $\mathbb{P}^n$ 的 n 个线性无关向量,又显然 $\mathbb{P}^n$ 中任一向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$$

都可由这 n 个线性无关向量线性表出,有

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

从而得知 $\mathbb{P}^n$ 是 n 维线性空间.今后用得较多的是 $\mathbb{R}^n$ 及 $\mathbb{C}^n$.

再考察线性空间 $\mathbb{P}^{m\times n}$,若用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行、第 j 列上的元素等于 1 而其它元素均等于零的 $m\times n$ 矩阵,则下列的 mn 个矩阵 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{ij},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,$

$\cdots,n$)构成$\mathbb{P}^{m\times n}$的一个基,故$\mathbb{P}^{m\times n}$是mn维线性空间.今后用得较多的是$\mathbb{R}^{m\times n}$及$\mathbb{C}^{m\times n}$,包括它们当$m=n$时的特殊情况.

最后,由于$1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$是$\mathbb{P}[t]_n$的一个基,故$\mathbb{P}[t]_n$是n维线性空间.

$\mathbb{P}[t]$和$\mathbb{R}[a,b]$则为无限维线性空间.

1.2 基变换与坐标变换

设V是数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$的两个基.假设这两个基的关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}\tag{1-4}$$

写成矩阵形式记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.\tag{1-5}$$

那么,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的**过渡矩阵**.

关于形式矩阵乘法容易验证有以下性质:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}\\(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{AB})=[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{B}\end{cases},$$

亦即形式矩阵也满足矩阵的运算性质,只不过数与向量的“乘积”是数乘.后面的内积空间也会用到形式矩阵的记号及运算.

现设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$的两个基,$\boldsymbol{\alpha}$为$V$中任一向量,且设$\boldsymbol{\alpha}$在上述两个基下的表示式分别为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\tag{1-6}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}.\tag{1-7}$$

下面研究向量$\boldsymbol{\alpha}$在基变换下,其坐标的变化规律.

由于基向量线性无关，并利用齐次线性方程只有零解的条件，便可证明过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的．由式(1－7)和式(1－5)可得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}. \tag{1-8}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，式(1－6)和式(1－8)右边 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的系数应相等，亦即

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}, \tag{1-9}$$

从而又有

$$\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}. \tag{1-10}$$

式(1－9)和式(1－10)给出了基变换例 1－5 下，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标变换公式．

例 1－5 设线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中有向量：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)$．

(1)求 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

(2)求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵．

解 (1)由线性代数可知，$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下坐标即为线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$的解．因为$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&1&b\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a-b\\0&1&0&b-c\\0&0&1&c\end{array}\right)$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$(a-b,b-c,c)$；

(2)由过渡矩阵定义知，过渡矩阵的第 j 列元素为 $\boldsymbol{\beta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标．

因$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&2\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right)$

三个线性方程组系数矩阵相同，可同时用初等行变换求解，第 4 列为第一个方程组的解，第 5 列为第二个方程组的解，第 6 列为第三个方程组的解．

所以从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

注 很多人利用过渡矩阵定义$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$求$\boldsymbol{A}$时,利用$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$来计算.这种方法只有当$\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j$为$n$维数组向量时结果才成立;当$\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j$不是$n$维数组向量时,上述的逆矩阵都不存在,无法计算.即使可用公式计算的时候,运算量也相当大,例1-5中的算法是最简单的.请读者细心体会.

1.3 子空间与维数定理

线性空间有些性质需用子空间的性质来表达,所以研究线性空间的子空间是必要的.

定义1-4 设V是数域$\mathbb{P}$上的线性空间,W是V的一个非空子集.如果W对于线性空间V所定义的加法运算及数量乘法运算也构成数域$\mathbb{P}$上的线性空间,则称W为V的**线性子空间**,简称**子空间**.

从线性空间的定义很容易找到上述非空子集为V的子空间的充要条件,就是下述定理.

定理1-2 设W是数域$\mathbb{P}$上线性空间V的非空子集,则W是V的线性子空间的充要条件是

(1) 若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$,则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$;

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}\in W,k\in\mathbb{P}$,则$k\boldsymbol{\alpha}\in W$.

换言之,线性空间V的非空子集W是子空间的充要条件是:W关于V中定义的两个运算是“封闭”的.

证明 条件的必要性是显然的,因为当W为V的子空间时,由定义1-4即知条件(1)与(2)自然是满足的.反过来,若定理1-2的两个条件已满足,则可推出零向量$\mathbf{0}\in W$(取$k=0$并利用条件(2));又当$\boldsymbol{\alpha}\in W$时,取$k=-1$便可以从条件(2)推出$-\boldsymbol{\alpha}\in W$.至于线性空间定义中的其它运算“规则”,由于对$V$中所有元素都成立,当然对子集$W$中的元素也能成立,所以定理中的条件也是充分的.证毕.

在线性空间V中,由单个零向量组成的子集$\{\mathbf{0}\}$是V的一个子空间,称为**零子空间**,而线性空间V本身也是V的一个子空间.这两个子空间称为**平凡子空间**.零空间的维数定义为零.

例1-6 在n维线性空间$\mathbb{P}^n$中,子集

$$W=\{X\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0,\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{P}^n\}$$

构成$\mathbb{P}^n$的一个$n-r$维子空间,r是$\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$的秩.子集$M=\{X\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\neq 0,\boldsymbol{X}\in\mathbb{P}^n\}$则不能构成子空间.

例1-7 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是数域$\mathbb{P}$上线性空间$V$的$m$个向量,则这组向量的所有形如

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\quad(k_i\in\mathbb{P})$$

的线性组合构成的集合非空,且对V中的加法及数量乘法皆封闭,故形成V的一个子空间,称为由这组向量生成的子空间,并记为$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

例1-7提供了构作已知线性空间的子空间的一种方法.下面两个定理也给出了获得新的子空间的方法.

定理1-3 设V_1,V_2是数域$\mathbb{P}$上线性空间V的两个子空间,则它们的交$W=V_1\cap V_2$

也是 V 的子空间.

证明 由于每个子空间都包含零向量,所以零向量必定属于这两个子空间的交,即 W 不会是空集.

现任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$,则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_i$,而 V_i 是子空间,所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_i\,(i=1,2)$,从而

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W.$$

又对任一 $k\in\mathbb{P}$ 及任一 $\boldsymbol{\alpha}\in W$,又有

$$k\boldsymbol{\alpha}\in V_i\quad(i=1,2)$$

从而 $k\boldsymbol{\alpha}\in W$.证毕.

定理 1-4 设 V_1,V_2 是数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 的两个子空间,则它们的和

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\ \boldsymbol{\beta}\in V_2\}$$

也是 V 的子空间.

证明 首先,V_1+V_2 不是空集,因为零向量属于 V_1 及 V_2,且 $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}\in V_1+V_2$.其次,如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 V_1+V_2 中任两向量,且设

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\quad\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2.$$

这里 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in V_2$.由于 V_1,V_2 是子空间,故

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1,\quad\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\in V_2,$$

从而

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\in V_1+V_2.$$

同样地,对任一 $k\in\mathbb{P}$,则有

$$k\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\beta}_1\in V_1+V_2,$$

即 V_1+V_2 是 V 的子空间.证毕.

关于子空间的交与和的求法可参考附录 2 例六和例七.

由于子空间的交与和都满足交换律及结合律,所以还可以定义有限个子空间的交与和,并把上述两个定理推广到有限多个子空间的情形,兹不赘述.

例 1-8 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

下面讨论子空间的交与和的维数.

定理 1-5(维数公式) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$上的 n 维线性空间,V_1,V_2 是它的两个子空间,则有维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

或写作

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

证明 假设 $\dim V_1=r,\quad\dim V_2=s,\quad\dim(V_1+V_2)=k,\quad\dim(V_1\cap V_2)=t$.

在 $V_1\cap V_2$ 中选取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$,并扩充它,使 r 个线性无关向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\alpha}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$$

成为 V_1 的一个基;同样地,使 s 个线性无关向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$$

成为 V_2 的一个基.

如能证明

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\alpha}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s \tag{1-11}$$

为 V_1+V_2 的一个基,那就有

$$\dim(V_1+V_2)=r+s-t,$$

从而定理得证.

要证明式(1-11)为 V_1+V_2 的一个基,只要说明两点:一是 V_1+V_2 中任一向量可由式(1-11)线性表出;二是向量组(1-11)线性无关.第一点比较容易,请读者自己证明,下面证明向量组(1-11)线性无关.

事实上,如果有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t+k_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1}+\cdots+l_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0},$$

则可得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t+k_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=-l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1}-\cdots-l_s\boldsymbol{\beta}_s \tag{1-12}$$

此等式左边确定了一个属于 V_1 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$,而由右边又可见 $\boldsymbol{\alpha}$ 亦属于 V_2,从而 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $V_1\cap V_2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表出,即

$$\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t. \tag{1-13}$$

由式(1-12)和式(1-13)得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t+l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1}+\cdots+l_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 V_2 的基得

$$l_1=l_2=\cdots=l_t=l_{t+1}=\cdots=l_s=0,$$

代入式(1-13)即得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.再应用式(1-12),且因基向量线性无关,于是又得

$$k_1=k_2=\cdots=k_t=k_{t+1}=\cdots=k_r=0.$$

这就证明了向量组(1-11)线性无关,于是定理得证.

推论 若 n 维线性空间 V 的两个子空间的维数之和大于 n,则 $V_1\cap V_2$ 必含非零向量.

证明 由所设条件,有 $\dim V_1+\dim V_2>n$,又 $\dim(V_1+V_2)\leqslant n$ 显然成立,故由维数公式即得

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)>0,$$

所以 $V_1\cap V_2$ 含有非零向量.证毕.

若 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$,则维数公式便成为

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2,$$

即和的维数等于维数的和.

定理 1-4 给出了两个子空间的和 V_1+V_2 的定义.在子空间的和中,有一个情形特别重要,这就是下面定义的子空间的直和.

定义 1-5 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间,如果这两个子空间的和 $W=V_1+V_2$ 具有性质:对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in W$,分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad(\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in V_2)$$

是唯一的,则称子空间 V_1 与 V_2 的和 $W=V_1+V_2$ 为**直和**,并记为 $W=V_1\oplus V_2$.

例 1-9 设有四维线性空间 $\mathbb{R}^4$ 的三个子空间:

$$V_1 = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(0, 0, c, 0) \mid c \in \mathbb{R}\},$$
$$V_3 = \{(0, d, e, 0) \mid d, e \in \mathbb{R}\},$$

则 $T = V_1 + V_3$ 不是直和,因为 T 中有向量(1,1,1,0),分解式不唯一:

$$(1, 1, 1, 0) = (1, 2, 0, 0) + (0, -1, 1, 0),$$
$$(1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0) + (0, 1, 1, 0).$$

但 $S = V_1 + V_2$ 则是直和,因为当 $\boldsymbol{\alpha} \in S$,则有

$$\boldsymbol{\alpha} = (a, b, 0, 0) + (0, 0, c, 0) = (a, b, c, 0).$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 还有另一表示

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, b_1, 0, 0) = (0, 0, c_1, 0) = (a_1, b_1, c_1, 0),$$

显然,$a_1 = a$,$b_1 = b$,$c_1 = c$.故 S 中每个向量的分解式唯一,从而 S 是直和.

关于子空间的直和,有下述主要定理:

定理 1-6 关于子空间的直和,下列命题是等价的:

(1) $V_1 + V_2$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式是唯一的;

(2) $V_1 + V_2$ 中的 $\mathbf{0}$ 向量的分解式是唯一的;

(3) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

证明 (1)⇒(2),取 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,显然.

(2)⇒(3),若 $V_1 \cap V_2$ 含有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,则有

$$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}.$$

推知零向量 $\mathbf{0}$ 有两种不同的分解式,所以 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(3)⇒(1),我们来证其中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式是唯一的.

对 $V_1 + V_2$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,设有分解式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \quad (\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2) \\ \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \quad (\boldsymbol{\beta}_1 \in V_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in V_2) \end{aligned}\right\},$$

则由上两式相减即得

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) = \mathbf{0},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1 = -(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2);$$

但是

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1 \in V_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2 \in V_2, \quad -(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \in V_2,$$

所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1) = -(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \in V_1 \cap V_2.$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2.$$

亦即 $V_1 + V_2$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式是唯一的.

定理 1-7 若 V_1 与 V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间,又 V_1+V_2 是直和,则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2,$$

这是显然的.此等式亦可写成

$$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

子空间直和的概念可以推广到有限多个子空间的情形.而定理 1-7 的结果可以推广为

$$\dim(V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_s.$$

其证明从略.

1.4 线性空间的同构

我们会遇到一些看起来不太相同的线性空间,比如 $\mathbb{P}^n$ 及 $\mathbb{P}[t]_n$,前者的一般元素为 n 元数组

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(x_i\in\mathbb{P}).$$

后者的一般元素为多项式

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}\quad(a_i\in\mathbb{P}).$$

那么这两个线性空间有无"本质"的区别呢?

在线性空间的定义里,决定集合 V 能否构成数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间,主要是看它是否定义了"加法"运算及"数量乘法"运算,以及这两个运算是否满足 8 条"规则".而这两个运算的具体定义及集合 V 的元素是什么,在我们的讨论中是可以不考虑的.代数是关于运算规则的科学,具有相同运算规则的系统,在某种意义上就认为是相同的,可以不加区别的.确切地说,我们有下述定义.

定义 1-6 数域 $\mathbb{P}$ 上的两个线性空间 V 与 V' 称为是**同构的**,如果 V 与 V' 之间有一个一一对应 σ,使得对任何 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 及 $k\in\mathbb{P}$ 均满足

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,

σ 就称为从 V 到 V' 的**同构映射**.

我们也可以这样说,线性空间 V 与 V' 称为是同构的,如果两者之间能建立起元素(向量)间的一一对应,并且这个对应保持 V 中的加法运算及数量乘法运算,即在这个对应下,V 中向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 对应着 V' 中的 $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\beta}'$;而且 V 中的数量乘积 $k\boldsymbol{\alpha}$ 对应于 V' 中的数量乘积 $k\boldsymbol{\alpha}'$(在这里我们设 V 中的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 对应于 V' 中的 $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$),亦即,若 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}'$,$\boldsymbol{\beta}\to\boldsymbol{\beta}'$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\to\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\beta}'$,$k\boldsymbol{\alpha}\to k\boldsymbol{\alpha}'$.

现在来讨论数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 与线性空间 $\mathbb{P}^n$ 的关系.在 V 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,又 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 V 中任两向量,k 为 $\mathbb{P}$ 中任意数,则有

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,\quad\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(kk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(kk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(kk_n)\boldsymbol{\alpha}_n.$$

设 σ 为 V 到 $\mathbb{P}^n$ 的一个映射,它使任何 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 按下面方式同 $\mathbb{P}^n$ 中的元素对应起来:

$$\boldsymbol{\alpha}\to(k_1,k_2,\cdots,k_n),\quad\boldsymbol{\beta}\to(l_1,l_2,\cdots,l_n),$$

则容易证明这个对应是 V 到 $\mathbb{P}^n$ 的一一对应,并且有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\to(k_1+l_1,k_2+l_2,\cdots,k_n+l_n),$$
$$k\boldsymbol{\alpha}\to(kk_1,kk_2,\cdots,kk_n).$$

因此,σ 是同构映射.于是,我们得到下述结论:

数域 $\mathbb{P}$ 上每个 n 维线性空间 V,取定一个基后,V 与 $\mathbb{P}^n$ 之间存在同构映射.

由定义 1-6 看出,同构映射 $\sigma: V\to V'$ 具有下列基本性质:

(1)$\sigma(\mathbf{0})=0$, $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $\sigma\left(\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$;

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 V 中线性无关向量组,则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 在 V' 中线性无关;反之亦成立.即在同构对应下,线性无关向量组对应线性无关向量组.

证明 设有
$$\sum_{i=1}^{m}k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0},$$
则得
$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\mathbf{0},$$
但由(1)已知 $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,而 σ 是个一一对应,故只能有
$$\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0},$$
因为但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以得知
$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0.$$

这就证明了向量组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$线性无关.反之,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中任意 m 个向量,但如果 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$是 V' 中一线性无关向量组,则可以证明原来的 m 个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 在 V 中也一定是线性无关的.事实上,设有
$$\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0},\tag{1-14}$$
则由 $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,及(2)便可推知
$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\mathbf{0}.$$
但由假设,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$线性无关,故由此式即得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,联系到式(1-14)便知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(4)同构的有限维线性空间,其维数相同.

证明 有限维线性空间的维数就是它的最大线性无关组所含向量的个数.设 V 与 V' 是两个同构的有限维线性空间,V 到 V' 的同构映射为 σ.又设 V 是 n 维的,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个最大线性无关组,由性质(3)知 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$是 V' 的 n 个线性无关向量.假如它还不是 V' 的最大线性无关组,则把它扩充成最大线性无关组
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{n+k}).$$
(因为 σ 是 V 到 V' 的映射,故 V' 中的任一向量$\boldsymbol{\alpha}'$在 V 中都有原象$\boldsymbol{\alpha}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}'=\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.)而由性质(3)推出向量组
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+k}$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com