2015考研数学权威专家辅导系列

2015考研数学

命题人

历届真题权威解析

数学一

刘德荫　童　武/主编

考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威

- 全方位、多角度详解2014－1987年历届考研数学一试题
- 深挖命题规律，让考生全面了解历年试题的命题依据和解题技法
- 超值赠送：北京大学研究生考研数学高分复习秘籍
- 超值赠送：国家考研数学理工类命题组原组长2套命题密押试卷与精解

中国致公出版社

2 家辅导系列

2015考研数学

命题人

历届真题权威解析

数学一

刘德荫　童　武/主编

考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威

- 全方位、多角度详解2014－1987年历届考研数学一试题
- 深挖命题规律，让考生全面了解历年试题的命题依据和解题技法
- **超值赠送：北京大 复习秘籍**
- **超值赠送：国家 组长2套命题密押试卷与精解**

中国数公出版社

图书在版编目(CIP)数据

2015 考研数学命题人历届真题权威解析. 数学一/刘德荫, 童武主编. —北京: 中国致公出版社, 2014

ISBN 978-7-5145-0719-5

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①刘… ②童… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ① 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026201 号

2015 考研数学命题人历届真题权威解析. 数学一　刘德荫, 童　武　主编

责任编辑: 董拯民　董　亮
责任印刷: 岳　珍

出版发行: 中国致公出版社
地　　址: 北京市朝阳区八里庄西里 100 号住邦 2000 商务中心 1 号楼东区 15 层
邮　　编: 100025
电　　话: 010-82259658(总编室)　62082811(编辑部)
　　　　　010-85869872(发行部)
经　　销: 全国新华书店
印　　刷: 北京温林源印刷有限公司
开　　本: 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张: 22
字　　数: 388 千字
版　　次: 2014 年 4 月第 1 版　　　2014 年 4 月第 1 次印刷

定　　价: 36.80 元

前言 Foreword

中国已经走上了国际化的道路，改革开放已经在向纵深方向发展，与国外进行经济、贸易、科学、教育、管理和军事等领域的合作也更加紧密，对我国人才的知识水平也提出了更高的要求，对硕士研究生等高层次人才的需求不断增加，这方面的教育也在稳步发展，考生人数也在迅猛增加。考试竞争非常激烈，而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，则是广大准备考研同学的期盼。自1987年全国工学、经济学硕士研究生入学考试实行统一以来，时至今日，已有28载。这些试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家的智慧结晶。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写。本书对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解消化和掌握历年试题，便能发现数学考试试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性。考生也可以发现命题特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

本书的特点：

一、系统、全面、权威

本书囊括1987—2014年的完整的真题，旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和题型规律。

二、精辟阐明解题思路，详细解析历年真题的易丢分点、重点和难点

本书对每道试题不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给重要的、易丢分的题目做了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体题

目，分析考生常犯的错误，让考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料，其中的每一道试题，既反映了考研《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

“宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏，源于自信。

我们深信，考生仔细研读本书后，必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者　于清华园

目录 Contents

2014—1987 年考研数学一试题和解析

考研数学超值赠送宝典　数学一

2014—1987 年
考研数学一试题和解析

2014 年考研数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)下列曲线有渐近线的是 (　　)

(A)$y=x+\sin x$　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　(D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

(2)设函数$f(x)$具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上 (　　)

(A)当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(B)当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(D)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(3)设$f(x)$是连续函数,则$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ (　　)

(A)$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(B)$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

(D)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$

(4)若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$,则$a_1\cos x+b_1\sin x=$ (　　)

(A)$2\sin x$　　(B)$2\cos x$　　(C)$2\pi\sin x$　　(D)$2\pi\cos x$

(5)行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ (　　)

(A)$(ad-bc)^2$　　(B)$-(ad-bc)^2$　　(C)$a^2d^2-b^2c^2$　　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

(6)设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是 3 维向量,则对任意常数$k,l$,向量$\boldsymbol{a}_1+k\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2+l\boldsymbol{a}_3$线性无关是向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性无关的

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

(7)设随机事件A与B相互独立,且$P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$,则$P(B-A)=$ (　　)

(A)0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

(8)设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则　　(　　)

(A)$E(Y_1)>E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$　　(B)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)=D(Y_2)$

(C)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)<D(Y_2)$　　(D)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为是________.

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$________.

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲面积分 $\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是________.

(14)设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计，则 $c=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(19)(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(Ⅰ)证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(Ⅱ)证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；　(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$,其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数 a,使得对任何 $\varepsilon>0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

2014 年考研数学一试题答案速查

一、选择题

(1)C (2)D (3)D (4)A (5)B (6)A (7)B (8)D

二、填空题

(9)0 (10)1 (11)$x\mathrm{e}^{2x+1}$ (12)π (13)$[-2,2]$ (14)$\frac{2}{5n}$

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$ (16)$y=-2$ (17)$f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u$ (18)-4π

(19)(Ⅰ)因为 $\sum\limits_{n=1}^{n}b_n$ 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,根据极限的夹逼准则可知,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,得证.

(Ⅱ)又因为 $\sum\limits_{n=1}^{n}b_n$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{b_n}{2}$ 收敛,由比较收敛法可知,$\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛,得证.

(20)(Ⅰ)$\xi=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$(其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数).

(21)综上,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同且均可对角化,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,得证.

(22)(Ⅰ)$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \frac{3y}{4}, & 0<y\leqslant 1\\ \frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & 1<y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$ (Ⅱ)$\frac{3}{4}$

(23)(Ⅰ)$EX=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$ $EX^2=\theta$

(Ⅱ)$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

(Ⅲ)由大数定律可知,$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $EX^2=\theta$,存在 $a=\theta$.

2014 年考研数学一试题参考答案与解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考点提示】 曲线的渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$,其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 垂直和水平渐进线分别为 $x=c$ 和 $y=d$,其中 $c=\lim\limits_{y\to\infty}f(x)$,$d=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 四个选项中,

(A) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,c 和 d 也不存在;

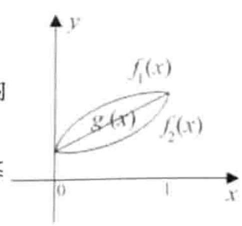
(B) 和 (D) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在,c 和 d 也不存在;

(C) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$,$c$ 和 d 也不存在.

综上,只有选项 C 有斜渐近且为 $y=x$.

2.【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用



【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凸凹性;

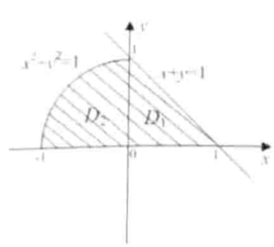
$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$,表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线. 据此考虑作如下图:

根据曲线形状可知,$f_1'(x)\geqslant 0$,$f_2'(x)\geqslant 0$,$f_1''(x)\leqslant 0$,$f_2''(x)\geqslant 0$,$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$ 由此可判断,当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$,正确答案为 D.

3.【答案】

【考点提示】 交换积分次序、积分坐标转换

【解析】 题设积分区域为 $-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y$,$0\leqslant y\leqslant 1$,如图所示.



换成极坐标为

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta};D_2:\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 1$$

故正确答案为 D.

4.【答案】 A

【考点提示】 二元函数的极值和最值

【解析】 令 $f(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$,令

$f_a' = -2\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2a\pi = 0$,解得 $a = 0$;

$f_b' = -2\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)\sin x\mathrm{d}x = 2b\pi - 4\pi = 0$,解得 $b = 2$.

根据极值的唯一性且有最值可知,当 $a_1 = a = 0, b_1 = b = 2$ 时,函数 $f(a,b)$ 取得最小值,故正确答案为 A.

5.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

【解析】

$$原行列式 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 \Leftrightarrow r_1} - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 \Leftrightarrow c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-)^{2\cdot 2}\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = (ad-bc)(bc-ad) = -(ad-bc)^2$$,即正确答案为 B.

6.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 可知,因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是二维向量组,而 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三维向量组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,无法推出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,条件不充分;而当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时,因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,条件充分.

综上,正确答案为 A.

7.【答案】 B

【考点提示】 随机事件概率的运算

【解析】 因为随机事件 A 和 B 相互独立,所以有 $P(AB) = P(A)P(B)$.

又 $P(A-B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[(1-P(B))]$,

代入 $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$ 可得 $P(A) = 0.6$,

则 $P(B-A) = P(B) - P(A)P(B) = 0.5 - 0.6 \cdot 0.5 = 0.2$,正确答案为 B.

8.【答案】 D

【考点提示】 随机变量的数学期望与方差

【解析】 $E(Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[(E(X_1) + E(X_2)]$;

$$E(Y_2) = E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \frac{1}{2}\quad[E(X_1) + E(X_2)] = E(Y_1);$$

$$E(Y_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y^2\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[E(X_1^2) + E(X_2^2)]$$

$$DY_1 = \frac{1}{2}[E(X_1^2) + E(X_2^2)] - \frac{1}{4}[E(X_1) + E(X_2)]^2$$

$$= \frac{1}{4}\{E(X_1^2) - [E(X_1)]^2\} + \frac{1}{4}\{E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 + \frac{1}{4}[E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2)]$$

$$=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{4}[E(X_1)-E(X_2)]^2$$

$$DY_2=D\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{4}[D(X_1)+D(X_2)]\leqslant DY_1.$$

综上,正确答案为 D.

二、填空题

9.**【答案】** $2x-y-z-1=0$

【考点提示】 曲面的切平面方程

【解析】 题设曲面方程求偏导数可得

$Z_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x, Z_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x)$,

则在点$(1,0,1)$处,$Z_x\big|_{(1,0,1)}=2, Z_y\big|_{(1,0,1)}=-1$

切平面方程为$2(x-1)+(-1)\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-1)=0$,即$2x-y-z-1=0$.

10.**【答案】** 1

【考点提示】 函数的周期性,奇偶性

【解析】 因为$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,

所以$f(7)=f(2\cdot 4-1)=f(-1)=-f(1)$, 且$f(0)=0$.

由$f'(x)=2(x-1)$可得$f'(x)=x^2-2x+c$,

又$f(0)=0$,则$c=0$,即$f(x)=x^2-2x$且$f(1)=-1$,

则$f(7)=-f(1)=1$.

11.**【答案】** $y=xe^{2x+1}$

【考点提示】 微分方程的解

【解析】 微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$两边同时除以x可得$y'-\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=0$,

令$u=\frac{y}{x}$,则$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入上式可得$u+x\frac{du}{dx}-u\ln u=0$

经整理得$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$,

两边积分得$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$,即$\int\frac{d(\ln u-1)}{\ln u-1}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln u-1=cx$

从而$u=e^{cx+1}$,即$y=xe^{cx+1}$,

将$y(1)=e^3$代入上式可得$c=2$,故$y=xe^{2x+1}$.

12.**【答案】** π

【考点提示】 曲面积分

【解析】 根据柱面和平面方程可令

$x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=-y=-\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$

则$\int_L z dx+y dz=\int_0^{2\pi}[-\sin\theta(\sin\theta)+\sin\theta(-\cos\theta)]d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1-\cos 2\theta-\sin 2\theta]d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{4\pi}[1-\cos t-\sin t]dt=\pi$$

13.**【答案】** $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,设其三个特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$,$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为1,所以有且只有一个特征值为负值,不妨设$\lambda_1<0$,则$\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$,从而有$|A|=a^2-4\leqslant0$,即$-2\leqslant a\leqslant2$.

当$|A|=a^2-4=0$,即$a=\pm2$时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则$\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,满足题意.故综上有,$-2\leqslant a\leqslant2$.

14.【答案】 $\dfrac{2}{5n}$

【考点提示】 无偏估计量

【解析】 $EX^2=\int_\theta^{2\theta}\dfrac{2X}{3\theta^2}\cdot x^2\mathrm{d}\theta=\dfrac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3\mathrm{d}\theta=\dfrac{x^4}{6\theta^2}\Big|_\theta^{2\theta}=\dfrac{5}{2}\theta^2$,

则$E(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=cE(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=c\cdot n\cdot\dfrac{5}{2}\theta^2=\theta^2$,$c=\dfrac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 求函数的极值

【解析】 函数$f(x)$两边分别对x,y求偏导数可得

$3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0$,则$y'=-\dfrac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}$;

令$y'=-\dfrac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}=0$,则得$y=-2x$,代入原方程可得$x=1,y=-2$;

又$y''=-\dfrac{(2y\cdot y'+2y+2x\cdot y')(3y^2+2xy+x^2)-(y^2+2xy)(6y\cdot y'+2y+2x\cdot y'+2x)}{(3y^2+2xy+x^2)^2}$,

则代入$x=1,y=-2$可得$y''=\dfrac{4}{9}>0$,故$x=1$为极小值点,极小值为$y=-2$.

17.【考点提示】 解微分方程

【解析】 由$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot\mathrm{e}^x\sin y$