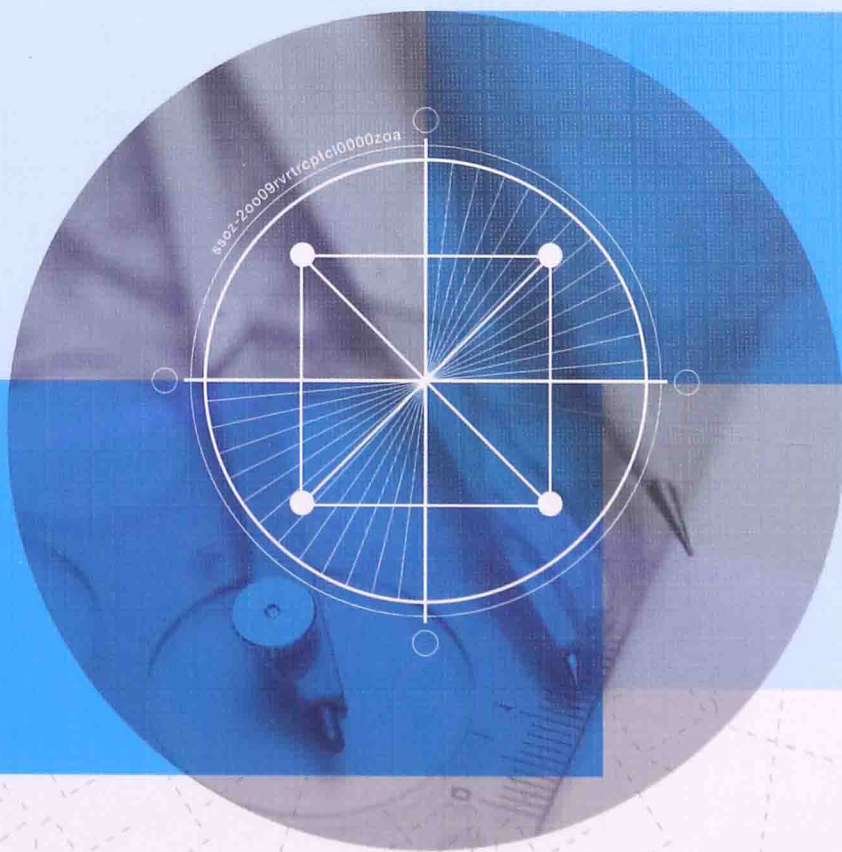




应用技术型高等教育“十二五”规划教材

经济数学—— 微 积 分

主 编 黄玉娟
副主编 张海燕 周玲丽 张 鑫
主 审 尹金生



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十二五”规划教材

经济数学——微积分

主 编 黄玉娟

副主编 张海燕 周玲丽 张 鑫

主 审 尹金生



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书以培养学生的专业素质为目的,充分吸收多年来教学实践和教学改革成果。主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合起来,融经济、管理于数学,培养学生用数学知识和方法解决实际问题的能力。

本书内容主要包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、常微分方程、无穷级数等。

本书内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当,例题丰富,可读性、应用性强,习题足量,难易适度,简化证明,注重数学知识的应用性,可作为普通高等院校经济管理类学科“微积分”课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 微积分 / 黄玉娟主编. -- 北京: 中国水利水电出版社, 2014. 8
应用技术型高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-2102-5

I. ①经… II. ①黄… III. ①经济数学—高等学校—教材②微积分—高等学校—教材 IV. ①F224.0②0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第118006号

策划编辑: 宋俊娥 责任编辑: 李 炎 加工编辑: 田新颖 封面设计: 李 佳

书 名	应用技术型高等教育“十二五”规划教材 经济数学——微积分
作 者	主 编 黄玉娟 副主编 张海燕 周玲丽 张 鑫 主 审 尹金生
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京上元柏昌印刷有限公司
规 格	170mm×227mm 16开本 25.25印张 501千字
版 次	2014年8月第1版 2014年8月第1次印刷
印 数	0001—4000册
定 价	36.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换
版权所有·侵权必究

“应用型人才培养基础课系列教材”

编审委员会

主任委员：刘建忠

委 员：（按姓氏笔画为序）

王 伟 史 昱 伊长虹 刘建忠 邢育红

李宗强 李爱芹 杨振起 孟艳双 林少华

胡庆泉 高曦光 梁志强 黄玉娟 蒋 彤

前 言

本教材充分考虑高等教育大众化教育阶段的现实状况，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，结合经管类研究生入学考试对数学的大纲要求而编写。参加本书编写的人员都是多年担任经济数学——微积分实际教学的教师，包括教授、副教授等专业技术人员，他们都有较深的理论造诣和较丰富的教学经验。在编写时，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识和经济、管理学科中的实际应用有机结合起来，主要有以下几个特点：

(1) 注重体现应用型本科院校特色，根据经济类和管理类的各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系。

(2) 注重内容理论联系实际，在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，采用提出问题—讨论问题—解决问题的思路，逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣；另外在微分学与积分学章节中，重点引入了适当的经济、管理类的实际应用例题和课后练习题，以锻炼学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力。

(3) 本教材结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。由于抽象理论的弱化，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材内容分上、下册，包括函数的极限，一元函数微积分学，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数等内容。

(4) 在每一章的结束部分，附加了历史上在数学上有杰出贡献的伟大数学家的生平简介，通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家追求真理、维护真理的坚忍不拔的科学精神。

(5) 为了能更好的与中学数学衔接，在附录 I 中对三角函数的常用公式做了全面总结，并在附录 II、III、IV 中分别介绍了二阶、三阶行列式、各种类型的不定积分公式、常用的一些平面曲线及其图形，供需要的学生查阅参考。

本教材适合于普通应用型本科院校经济管理类各专业学生使用，也可作为研究生入学考试参考。

参加本教材编写的由黄玉娟（第 1、5 章），张海燕（第 10 章），周玲丽（第 6、7 章），张鑫（第 2 章），李丽（第 3 章），于学光（第 4 章），胡雷（第 8 章），马

彦君（第9章）。全书由黄玉娟统稿并多次修改定稿。最后由尹金生副教授为本教材审稿。在编写过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心支持本书的编写、修改工作的教师表示衷心的感谢。

限于编写水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编 者
2014年3月

目 录

前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 函数	4
习题 1.1	17
1.2 数列的极限	19
1.2.1 引例	19
1.2.2 数列极限的概念	19
1.2.3 收敛数列的性质	22
习题 1.2	24
1.3 函数的极限	25
1.3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限	25
1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限	27
1.3.3 函数极限的性质	30
习题 1.3	30
1.4 无穷小与无穷大	31
1.4.1 无穷小	31
1.4.2 无穷大	33
1.4.3 无穷小与无穷大的关系	34
习题 1.4	34
1.5 极限的运算法则	35
1.5.1 极限的四则运算法则	35
1.5.2 复合函数极限的运算法则	39
习题 1.5	40
1.6 极限存在准则 两个重要极限	40
1.6.1 夹逼准则	40
1.6.2 单调有界收敛准则	42
1.6.3 连续复利	44
习题 1.6	46
1.7 无穷小的比较	46
习题 1.7	49

1.8 函数的连续性与间断点.....	50
1.8.1 函数的连续性.....	50
1.8.2 函数的间断点.....	51
1.8.3 连续函数的运算法则.....	54
1.8.4 初等函数的连续性.....	55
习题 1.8	56
1.9 闭区间上连续函数的性质.....	57
1.9.1 最大值与最小值定理与有界性定理.....	57
1.9.2 零点定理与介值定理.....	59
习题 1.9	60
复习题一	60
数学家简介——刘徽	63
第 2 章 导数与微分	65
2.1 导数的概念	65
2.1.1 引例	65
2.1.2 导数的概念.....	66
2.1.3 导数的几何意义.....	69
2.1.4 可导与连续的关系.....	70
习题 2.1	71
2.2 导数的运算	72
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	72
2.2.2 复合函数的导数.....	74
2.2.3 反函数的求导法则.....	75
2.2.4 初等函数的导数.....	76
习题 2.2	77
2.3 高阶导数	77
习题 2.3	81
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	81
2.4.1 隐函数的导数.....	81
2.4.2 对数求导法.....	83
*2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	84
习题 2.4	84
2.5 函数的微分	85
2.5.1 微分的概念.....	85
2.5.2 微分的几何意义.....	87
2.5.3 微分的基本公式与微分法则.....	87
*2.5.4 微分在近似计算中的应用	90

习题 2.5	91
2.6 边际与弹性	92
2.6.1 边际分析	92
2.6.2 弹性分析	95
习题 2.6	97
复习题二	98
数学家简介——牛顿	99
第 3 章 中值定理与导数的应用	101
3.1 微分中值定理	101
3.1.1 罗尔 (Rolle) 定理	101
3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	103
习题 3.1	104
3.2 洛必达法则	105
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	105
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	106
习题 3.2	108
3.3 函数的单调性与极值	108
3.3.1 函数的单调性	109
3.3.2 函数的极值	111
习题 3.3	114
3.4 函数的凹凸性与拐点 函数图形的描绘	114
3.4.1 函数的凹凸性	114
3.4.2 函数图形的描绘	116
习题 3.4	118
3.5 函数的最大值与最小值及其在经济上的应用	119
3.5.1 函数的最大值与最小值	119
3.5.2 经济应用问题举例	119
习题 3.5	121
复习题三	122
数学家简介——布鲁克·泰勒	123
第 4 章 不定积分	125
4.1 不定积分的概念与性质	125
4.1.1 原函数与不定积分概念	125
4.1.2 不定积分的几何意义	127
4.1.3 不定积分的性质	128

4.1.4	基本积分公式.....	128
习题 4.1		130
4.2	换元积分法.....	131
4.2.1	第一类换元积分法.....	131
4.2.2	第二类换元积分法.....	136
习题 4.2		142
4.3	分部积分法.....	143
习题 4.3		146
复习题四		147
数学家简介——柯西		148
第 5 章	定积分及其应用.....	151
5.1	定积分的概念与性质.....	151
5.1.1	引例.....	151
5.1.2	定积分的定义.....	153
5.1.3	定积分的几何意义.....	155
5.1.4	定积分的性质.....	156
习题 5.1		158
5.2	微积分基本公式.....	159
5.2.1	积分上限函数及其导数.....	159
5.2.2	牛顿 - 莱布尼茨公式.....	161
习题 5.2		163
5.3	定积分的换元法和分部积分法.....	164
5.3.1	定积分的换元法.....	164
5.3.2	定积分的分部积分法.....	168
习题 5.3		169
5.4	反常积分.....	170
5.4.1	无穷限的反常积分.....	171
5.4.2	无界函数的反常积分.....	172
5.4.3	Γ -函数.....	174
习题 5.4		176
5.5	定积分的元素法及其在几何学上的应用.....	177
5.5.1	定积分的元素法.....	177
5.5.2	定积分在几何学上的应用——平面图形的面积.....	178
5.5.3	定积分在几何学上的应用——体积.....	181
习题 5.5		184
5.6	定积分的经济应用.....	185
5.6.1	由边际函数求原函数.....	185

5.6.2 已知贴现率求现金流量的贴现值	186
习题 5.6	188
复习题五	188
数学家简介——莱布尼茨	191
第 6 章 空间解析几何	193
6.1 空间直角坐标系	193
6.1.1 空间直角坐标系	193
6.1.2 空间两点之间的距离	195
习题 6.1	195
6.2 曲面及其方程	196
6.2.1 曲面方程的概念	196
6.2.2 旋转曲面	196
6.2.3 柱面	200
6.2.4 二次曲面	201
习题 6.2	202
6.3 平面及其方程	202
6.3.1 平面的一般式方程	202
6.3.2 平面的截距式方程	202
习题 6.3	203
复习题六	203
数学家简介——约翰·伯努利	204
第 7 章 多元函数微分学	206
7.1 多元函数的基本概念	206
7.1.1 平面点集	206
7.1.2 二元函数的概念	208
7.1.3 二元函数的极限	208
7.1.4 二元函数的连续性	209
习题 7.1	210
7.2 偏导数	210
7.2.1 偏导数的定义及其计算方法	210
7.2.2 偏导数的几何意义	212
7.2.3 高阶偏导数	213
习题 7.2	214
7.3 全微分	214
7.3.1 全微分	214
7.3.2 全微分在近似计算中的应用	216
习题 7.3	216

7.4	多元复合函数的求导法则.....	217
7.4.1	中间变量均为一元函数.....	217
7.4.2	中间变量均为多元函数.....	218
7.4.3	中间变量既有一元函数也有多元函数.....	219
7.4.4	全微分形式不变性.....	220
	习题 7.4.....	221
7.5	隐函数求导法.....	221
	习题 7.5.....	223
7.6	多元函数的极值及其应用.....	223
7.6.1	二元函数的极值.....	223
7.6.2	二元函数的最大值与最小值.....	226
7.6.3	条件极值 拉格朗日乘数法.....	227
	习题 7.6.....	230
	复习题七.....	231
	数学家简介——笛卡尔.....	232
第 8 章	二重积分.....	234
8.1	二重积分的概念与性质.....	234
8.1.1	二重积分的概念.....	234
8.1.2	二重积分的性质.....	237
	习题 8.1.....	238
8.2	二重积分的计算.....	239
8.2.1	利用直角坐标系计算二重积分.....	239
8.2.2	利用极坐标系计算二重积分.....	248
	习题 8.2.....	256
	复习题八.....	256
	数学家简介——罗尔.....	257
第 9 章	微分方程与差分方程.....	259
9.1	微分方程的基本概念.....	259
9.1.1	引例.....	259
9.1.2	微分方程的概念.....	260
	习题 9.1.....	262
9.2	一阶微分方程.....	262
9.2.1	可分离变量的微分方程.....	263
9.2.2	齐次方程.....	264
9.2.3	一阶线性微分方程.....	266
	习题 9.2.....	269
9.3	可降阶的二阶微分方程.....	270

9.3.1	$y'' = f(x)$ 型的微分方程	270
9.3.2	$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	271
9.3.3	$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	273
	习题 9.3	274
9.4	二阶常系数线性微分方程	274
9.4.1	二阶常系数齐次线性微分方程	274
9.4.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	278
	习题 9.4	282
9.5	差分方程	283
9.5.1	差分的概念	284
9.5.2	差分方程的概念	285
9.5.3	一阶常系数线性差分方程	286
	习题 9.5	289
9.6	微分方程和差分方程的简单经济应用	290
	习题 9.6	294
	复习题九	295
	数学家简介——格林	296
第 10 章	无穷级数	298
10.1	常数项级数的概念和性质	298
10.1.1	常数项级数的概念	298
10.1.2	无穷级数的基本性质	303
	习题 10.1	307
10.2	正项级数及其审敛法	308
	习题 10.2	316
10.3	任意项级数的绝对收敛与条件收敛	317
10.3.1	交错级数及其审敛法	317
10.3.2	绝对收敛与条件收敛	319
	习题 10.3	322
10.4	幂级数	323
10.4.1	函数项级数的概念	323
10.4.2	幂级数及其收敛域	323
10.4.3	幂级数的运算及其性质	328
	习题 10.4	332
10.5	函数展开成幂级数	333
10.5.1	泰勒级数与麦克劳林级数	333
10.5.2	直接展开与间接展开	335
	习题 10.5	339

复习题十	340
数学家简介——阿贝尔	341
附录 I 常见三角函数公式	344
附录 II 二阶和三阶行列式简介	345
附录 III 几种常见的曲线	348
附录 IV 积分表	352
习题答案	362
参考文献	390

第 1 章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数的概念以及极限的概念、性质、计算方法，并在此基础上讨论函数的连续性。

1.1 函数

1.1.1 集合

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念。一般地，具有某种特定性质的事物的全体称为集合（简称集），组成这个集合的每一个事物称为该集合的元素（简称元）。通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ，如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记为 $a \notin A$ 。一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。

表示集合的方法一般有以下两种：一种是列举法，就是把集合中的所有元素一一列举出来。例如，由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A ，可表示为

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

另一种方法是描述法，是指将集合中元素的共同特征描述出来，可表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征} \}.$$

例如方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的所有根组成的集合 A 可表示为

$$A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

2. 集合之间的关系

设 A, B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ （读作 A 包含于 B ）或 $B \supseteq A$ （读作 B 包含 A ）。

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$ （读作 A 真包含于 B ）。不含任何元素的集合称为空集，记为 $\emptyset$ ，规定空集是任何集合的子集。

若集合的元素都是数，则称其为数集，常用的数集有

(1) 全体自然数 (或非负整数集) 的集合记作 N , 即

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

(2) 全体正整数的集合记作 N^+ , 即

$$N^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

(3) 全体整数的集合记作 Z , 即

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

(4) 全体有理数的集合记作 Q , 即

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in N^+, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}.$$

(5) 全体实数的集合记作 R , R^* 表示排除 0 的实数集, R^+ 表示全体正实数的集合.

显然

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

3. 集合的运算

集合有三种基本运算, 即并、交、差.

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**并集** (简称**并**), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**交集** (简称**交**), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**差集** (简称**差**), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时, 我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 这时, 我们称集合 I 为**全集**, 称 $I \setminus A$ 为 A 的**余集**或**补集**, 记作 A^C . 例如, 若全集为实数集 R , 则集合 $A = \{x | 0 \leq x < 1\}$ 的余集就是

$$A^C = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}.$$

4. 区间与邻域

设 a, b 都是实数, 且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

类似地可说明

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}; \quad (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间, a, b 称为区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度. 从几何图形上看, 这些区间是指数轴上介于两个点之间的一条线段, 可用图 1.1 表示出来.

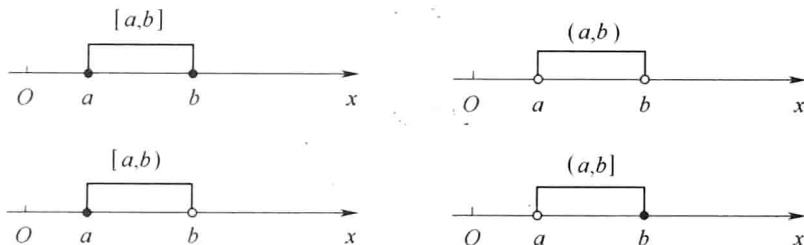


图 1.1

此外引入记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 可定义无限区间. 无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x | x < b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

前四个区间在数轴上的表示如图 1.2 所示, 而 $(-\infty, +\infty)$ 是整个实数轴.

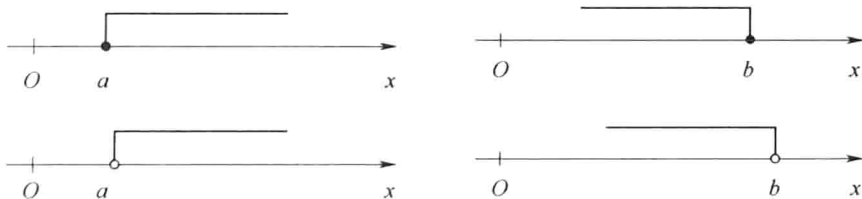


图 1.2

如果不需要特别强调区间是开区间还是闭区间, 是有限区间还是无限区间, 则简单的称之为区间, 通常用 I 表示.

邻域也是高等数学中经常用到的一个概念. 设 a 与 δ 是实数且 $\delta > 0$, 则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = \{x | |x - a| < \delta\},$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. $U(a, \delta)$ 可以在数轴上表示为图 1.3.

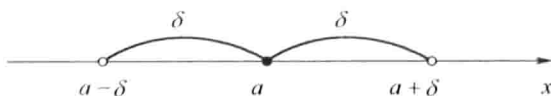


图 1.3