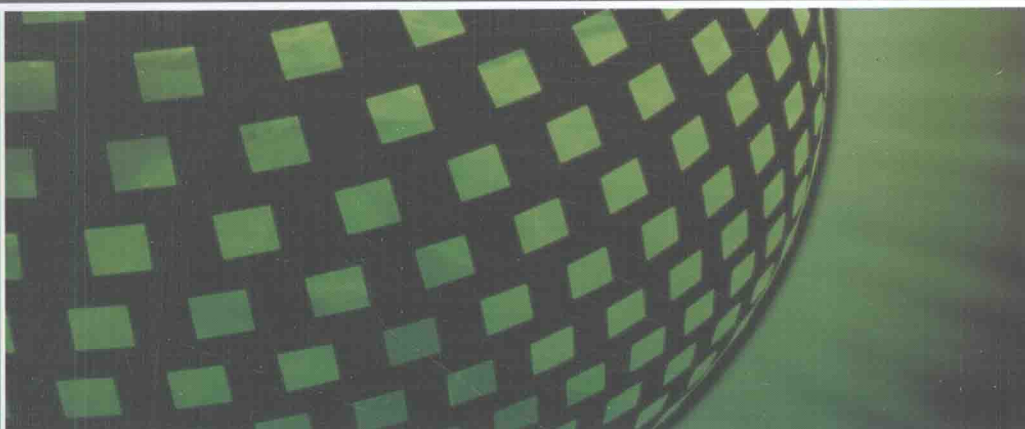


高职高专电类专业基础课规划教材



DIANCICHENG YU DIANCIBO



电磁场与电磁波

赵昌友 主 编

杨清志 方玉龙 副主编



化学工业出版社

高职高专电类专业基础课规划教材

电磁场与电磁波

赵昌友 主编

杨清志 方玉龙 副主编



化学工业出版社

· 北京 ·

本教材内容包括电场和磁场的基本概念和基本定律,以及电场与磁场在实际生活中的运用,保持了电磁场与电磁波知识的系统性和完整性,从基础着手,对专业课有适度的认识,有利于学生自学。

书中配有典型例题。每章后都有习题,习题参考答案可在 www.cipedu.com.cn 免费下载。

本书可作为高职高专电子信息、通信工程、电子科学与技术等相关专业的教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波/赵昌友主编. —北京:化学工业出版社,
2010.10

高职高专电类专业基础课规划教材

ISBN 978-7-122-09341-7

I. 电… II. 赵… III. ①电磁场-高等学校:技术学校-教材
②电磁波-高等学校:技术学校-教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 160665 号

责任编辑:刘哲
责任校对:顾淑云

装帧设计:王晓宇

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)

印 装:大厂聚鑫印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张11 字数228千字 2010年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:21.00元

版权所有 违者必究

前 言

FOREWORD

为了进一步落实《国务院关于大力发展职业教育的决定》的精神，加大课程建设与改革的力度，增强学生实习、实训和社会实践，减少理论课时的能力，本书把《大学物理》中的电磁学、电磁场与电磁波中的部分内容作了整编，既包括有基础内容，又对专业课有适度的认识，可满足高职高专院校的需要。

电磁场是研究电磁场运动规律的科学，它具有较完整的理论和较高的实用价值。它不仅是微波、天线、电波传播等工程技术的理论基础，而且在科学技术的各个领域中得到日益广泛的应用。

本书保持了电磁场与电磁波知识的系统性和完整性，依据认识的规律，使教学内容深入浅出，从基础着手，有利于学生自学。本教材的基本内容包括电场和磁场的概念和基本定律，以及电场与磁场在实际生活中的运用。对电信、通信专业学生来说这些内容是适度和够用的。带*的内容较深，可根据情况取舍。

本书在编写过程中考虑到高职高专教学的特点，力图做到基本概念清楚，理论联系实际。书中配有典型例题，每章都有习题，部分习题参考答案可在 www.cipedu.com.cn 免费下载。本课程教学建议 72 学时，其中理论教学 60 学时，实践教学 12 学时。

全书由赵昌友主编并统稿。第 1 章、第 5 章、第 6 章由赵昌友编写，第 2 章、第 4 章由杨清志编写，方玉龙编写了第 3 章，中国矿业大学张胜审阅大纲目录并编写了第 7 章，第 8 章由孙式运编写。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免会有一些不足，衷心希望广大读者批评指正，提出宝贵的意见和建议。

编 者

2010 年 6 月

目 录

CONTENTS

第 1 章 矢量分析	1
1.1 矢量代数	1
1.1.1 矢量与标量	1
1.1.2 矢量的代数运算	2
1.2 矢量的通量与散度	4
1.2.1 矢量的通量	4
1.2.2 矢量的散度	5
1.3 矢量的旋度	7
1.3.1 旋度	7
1.3.2 斯托克斯定理	9
1.4 标量场的梯度	12
1.5 亥姆霍兹定理	13
习题 1	15
第 2 章 静电场	17
2.1 电荷与库仑定律	17
2.1.1 电荷	17
2.1.2 电荷守恒定律	18
2.1.3 库仑定律	19
2.1.4 连续带电体的电荷分布描述	21
2.2 电场与电场强度	22
2.2.1 电场	22
2.2.2 电场强度	23
2.2.3 电场线	24
2.2.4 电场强度通量	25
2.3 电场强度的计算	26
2.3.1 点电荷的电场强度	26
2.3.2 电场强度叠加原理	26
2.3.3 电荷连续分布带电体的电场强度	29
2.3.4 高斯定理	31
2.4 电势与电势差	34

2.4.1	静电场力做功与静电场环路定理	34
2.4.2	电势	36
2.4.3	电势的计算	36
2.4.4	电势差	38
2.4.5	等势面	39
2.4.6	电势梯度	40
2.5	静电场中的导体	41
2.5.1	导体的静电平衡	41
2.5.2	导体表面电荷分布	43
2.5.3	静电屏蔽	44
2.6	电容器的电容	45
2.6.1	孤立导体的电容	45
2.6.2	电容器的电容	46
2.6.3	电容器的串并联	47
2.6.4	电容器中储存的能量	48
2.7	静电场中的电介质	49
2.7.1	介质的电结构及其分类	49
2.7.2	电介质的极化	50
2.7.3	电极化强度	51
2.7.4	介质中的静电场	52
2.7.5	介质中的高斯定理	53
2.7.6	静电场的能量	54
习题 2		54
第 3 章	恒定电场	58
3.1	电流与电流密度	58
3.1.1	电流	58
3.1.2	电流密度	58
3.2	电流的连续性方程	60
3.3	欧姆定律与焦耳定律	60
3.3.1	欧姆定律	60
3.3.2	焦耳定律	61
3.4	恒定电流的基本方程	62
3.5	恒定电场与静电场的比拟	63
3.6	电导与接地电阻	64
习题 3		66

第 4 章 稳恒电流的磁场	67
4.1 基本磁现象	67
4.1.1 基本磁现象	67
4.1.2 磁感应强度	68
4.1.3 磁感应线和磁通量	69
4.2 毕奥-萨伐尔定律	70
4.2.1 毕奥-萨伐尔定律	70
4.2.2 毕奥-萨伐尔定律的应用	71
4.3 稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理	73
4.3.1 稳恒磁场的高斯定理	74
4.3.2 安培环路定理	74
4.3.3 安培环路定理的应用	75
4.4 带电粒子在匀强磁场中的运动	78
4.4.1 洛伦兹力	78
4.4.2 带电粒子在匀强磁场中的运动	79
4.4.3 霍尔效应	80
4.5 磁场对载流导线和载流线圈的作用	81
4.5.1 安培定律	81
4.5.2 磁场对载流线圈的作用	82
4.6 磁介质及磁介质中的安培环路定理	84
4.6.1 磁介质的磁化	84
4.6.2 磁化电流	85
4.6.3 磁介质中的安培环路定理	86
4.7 电感	88
4.7.1 自感	88
4.7.2 互感	89
4.7.3 磁场的能量	90
习题 4	91
第 5 章 时变电磁场	95
5.1 电磁感应现象	95
5.2 楞次定律	96
5.3 法拉第电磁感应定律	97
5.4 位移电流	99
5.5 麦克斯韦方程	100
5.6 时变电磁场的边界条件	101

5.6.1	H 的边界条件	101
5.6.2	E 的边界条件	102
5.6.3	B 的边界条件	102
5.6.4	D 的边界条件	103
5.7	坡印廷定理	106
	习题 5	107
第 6 章 平面电磁波		110
6.1	波动方程	110
6.2	平面电磁波	111
6.3	均匀平面波的传播特性	113
6.3.1	理想介质中传播的均匀平面波的基本性质	113
6.3.2	导电媒质中的平面波	115
6.4	电磁波的极化	117
6.5	平面分界面的垂直入射	120
6.5.1	理想导体平面分界面的垂直入射	120
6.5.2	对理想介质平面分界面的垂直入射	122
* 6.6	平面电磁波向平面边界的斜入射	124
6.6.1	波矢量 k	124
6.6.2	平行极化波对理想导体平面的斜入射	125
6.6.3	垂直极化波对理想导体平面的斜入射	125
6.6.4	理想介质表面的斜入射	126
6.6.5	垂直极化波对理想介质分界面的斜入射	127
6.6.6	全反射和全折射	128
6.7	电磁波的色散和群速度	128
6.7.1	电磁波的色散	128
6.7.2	电磁波的群速度	129
	习题 6	131
第 7 章 电磁波辐射与天线		133
7.1	电磁振荡	133
7.2	电磁波的产生和传播	134
* 7.3	滞后位	136
* 7.4	电偶极子的辐射	137
* 7.5	天线的基本概念和技术参数	139
* 7.6	接收天线	141
	习题 7	142

第 8 章 电磁场与电磁波的应用	144
8.1 示波管	144
8.1.1 电子枪	144
8.1.2 偏转系统	145
8.1.3 荧光屏	145
8.1.4 示波管的电源要求	145
8.2 喷墨打印机	146
8.3 静电复印机	147
8.4 质谱仪	149
8.5 回旋加速器	151
8.6 电磁炉	152
8.7 电磁波谱及应用	153
8.7.1 电磁波谱的分类	153
8.7.2 电磁波谱的传播	154
8.8 通信	157
8.8.1 微波通信	157
8.8.2 卫星通信	158
8.8.3 移动通信	159
8.9 电磁干扰	160
8.9.1 电磁干扰的种类	160
8.9.2 电磁干扰三要素	160
8.9.3 干扰源分类	161
8.9.4 电磁干扰传播途径	161
8.9.5 电磁干扰的抑制	162
习题 8	163
附录	164
附录 1 圆柱坐标系	164
附录 2 球坐标系	165
附录 3 有关物理常数	166
参考文献	167

第 1 章

矢量分析

1.1 矢量代数

1.1.1 矢量与标量

只有大小，没有方向的物理量叫做标量，如时间、温度、能量、长度、质量等。标量所描述的场称为标量场。既有大小，又有方向的物理量称为矢量，也称作向量，如力、速度、加速度、电场强度等。电磁场中的许多物理量，如电场强度、磁场强度、电流密度等，都是矢量。由矢量所描述的场称为矢量场。

在许多书籍和文献中，常常使用黑体字母来表示矢量，如 \mathbf{A} ；但在手写矢量时，一般是在该物理量的上方用箭头标注，

如 \vec{A} 。矢量的大小称为矢量的模，表示为 $|\mathbf{A}|$ 或 A ，矢量的方向可用单位矢量表示，如 \mathbf{e}_a 。单位矢量是模为 1 个单位的矢量，所以可用它表示方向。在几何描述上，一般用一个带箭头的有向线段来表示矢量，如图 1-1 所示，线段长度代表矢量的大小（模），线段的方向表示矢量的方向。

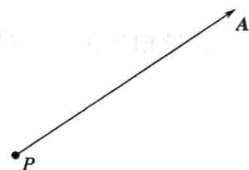


图 1-1 矢量的表示

矢量在一维坐标系中表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_a A$$

A 为 \mathbf{A} 的大小，即 $A = |\mathbf{A}|$ ，称为矢量 \mathbf{A} 的模； \mathbf{e}_a 为单位矢量，其模为 1，方向则为 \mathbf{A} 的方向。

在二维坐标系中，矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y$$

式中， \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 分别为 x 轴和 y 轴方向上的单位矢量。

在三维坐标系中，矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$$

其模为

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

式中， \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 分别为直角坐标系 x 、 y 、 z 轴三个方向上的单位矢量； A_x 、 A_y 、

A_x 分别为矢量 \mathbf{A} 的直角坐标系 x 、 y 、 z 轴三个方向上的分量，也可以说是矢量函数 \mathbf{A} 的三个分量函数。

1.1.2 矢量的代数运算

(1) 矢量的加法和减法

矢量加法是矢量之和，两个矢量之和服从平行四边形规则，如图 1-2(a) 所示。从代数运算的角度来看，两个矢量之和是两矢量的对应坐标分量的和，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{e}_x + (A_y + B_y)\mathbf{e}_y + (A_z + B_z)\mathbf{e}_z \quad (1-1)$$

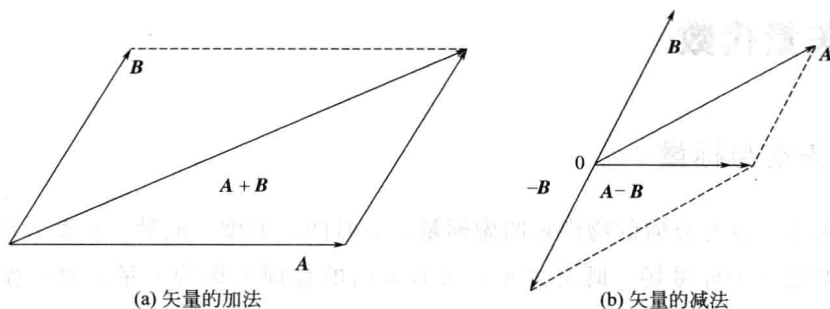


图 1-2 矢量的加法和减法

矢量相加满足交换律与结合律，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1-2)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{结合律}) \quad (1-3)$$

矢量减法是矢量加法的特例，如

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

通常 $(-\mathbf{B})$ 称为矢量 \mathbf{B} 的逆矢量，它的大小与矢量 \mathbf{B} 相等，如图 1-2(b) 所示。从代数运算的角度来看，两矢量相减等于两矢量的对应坐标分量之差，即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{e}_x + (A_y - B_y)\mathbf{e}_y + (A_z - B_z)\mathbf{e}_z \quad (1-4)$$

(2) 标量与矢量相乘

标量 λ 乘以矢量 \mathbf{A} ，其积仍为矢量，记作 $\lambda\mathbf{A}$ 。当 $\lambda > 0$ 时，它与 \mathbf{A} 同向；当 $\lambda < 0$ 时，它与 \mathbf{A} 反向。 $\lambda\mathbf{A}$ 的模是 \mathbf{A} 的 λ 倍，即 $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$ 矢量的数乘遵循下列运算规律：

$$\textcircled{1} \quad \lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A} = \mu(\lambda)\mathbf{A} \quad (1-5)$$

$$\textcircled{2} \quad (\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \quad (1-6)$$

$$\textcircled{3} \quad \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \quad (1-7)$$

式中， λ 、 μ 为任意实数， \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为任意矢量。

两矢量相乘，其积有两种情况：一种积为标量，称为标积 (scalar product)；另一种其积仍为矢量，称为矢积 (vector product)。

(3) 矢量的标积

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 因此, 标积也称作点积或点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦, 也等于两矢量的对应直角坐标分量积之和, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-8)$$

式中, θ 为矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 的夹角。由式(1-8)可知, 两矢量进行标积后的结果变成了无方向性的数量值。

如果作用在某一物体上的力为 \mathbf{A} , 当 \mathbf{A} 使该物体发生位移时, 位移矢量为 \mathbf{B} , 则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示力 \mathbf{A} 使物体位移所做的功。由式(1-8)可以看出, 两矢量的标积满足交换律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-9)$$

显而易见, 标积不但与两矢量的大小有关, 还与它们之间的夹角有关。当两矢量相互垂直时, 其标积为零; 当两矢量平行, 即 $\theta=0$ 时, 标积的绝对值最大, 等于两矢量的模之积, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos 0 = AB \quad (1-10)$$

结合律

$$(\mu\mathbf{A})\mathbf{B} = \mu(\mathbf{A}\mathbf{B}), \mathbf{A}(\mu\mathbf{B}) = \mu(\mathbf{A}\mathbf{B})$$

分配律

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{B}$$

下面给出数量积的坐标表示式。

设 $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$, 则由上述运算规律及以下各式: $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$ 得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot (\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1-11)$$

两个向量的点乘等于它们对应坐标乘积之和。

(4) 矢量的矢积

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢积记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 因此矢积也称作叉积或叉乘。两矢量进行矢积后的结果仍是一个矢量, 其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦, 其方向为两矢量所在面的法线方向 (用 \mathbf{e}_n 表示), 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta \quad (1-12)$$

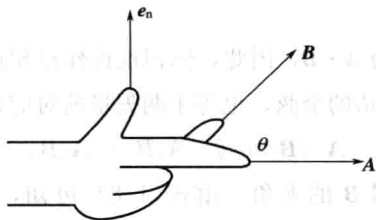
矢积的方向 \mathbf{e}_n 符合右手定则, 即右手四指从 \mathbf{A} 旋转到 \mathbf{B} , 拇指的方向即为 \mathbf{e}_n 的方向, 如图 1-3 所示。

矢积与两矢量的直角坐标分量的关系为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (1-13)$$

通常, 式(1-13)可写成行列式的形式来进行记忆, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-14)$$

图 1-3 A 与 B 的叉乘

矢积的几何意义：以两矢量为邻边所围成的平行四边形的面积为矢积的大小，以两矢量所在面的法线方向为方向。

三矢量的混合积具有如下性质：

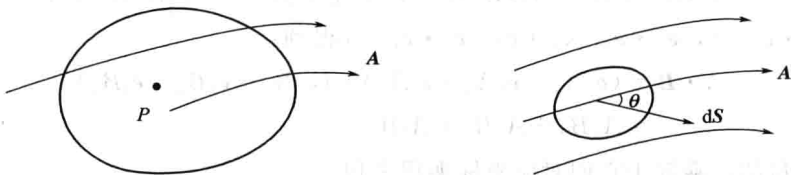
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

1.2 矢量的通量与散度

1.2.1 矢量的通量

设有一矢量场 \mathbf{A} ，在场中任取一面元 $d\mathbf{S}$ ，如图 1-4 所示。

图 1-4 面元 $d\mathbf{S}$

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos\theta dS$$

称为 \mathbf{A} 穿过 $d\mathbf{S}$ 的通量。穿过 S 的通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-15)$$

如图 1-4 所示，在矢量 \mathbf{A} 中，围绕某一点 P 作一闭合曲线 S ，法线方向向外，则 $\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 是矢量 \mathbf{A} 穿过闭合曲面 S 的通量或发散量。若 $\Phi > 0$ ，则流出 S 面的通量大于流入的通量，即通量由 S 面内外扩散，说明 S 面内有正源。若 $\Phi < 0$ ，则流入 S 面的通量大于流出的通量，即通量向 S 面内汇集，说明 S 面内无源。

例如，对于静电场， $\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ ，如果 S 面内的净余电荷为正， $\Phi_E > 0$ ，说明电通量由 S 内向外扩散；如果 S 面内的净余电荷为负， $\Phi_E < 0$ ，说明电通量向 S 面内

汇集。由此可以证明电力线是从正电荷发出，终止于负电荷。对于磁场， $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，说明 S 面内无源，所以 \mathbf{B} 线是闭合曲线。

1.2.2 矢量的散度

通量是一个大范围面积上的积分量，并不能说明体积内每一点的性质。为了研究矢量场 $\mathbf{A}(r)$ 在一个点附近的通量特性，这里把闭合面收缩，使包含这个点在内的体积元 $\Delta\tau \rightarrow 0$ ，取如下的极限：

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau}$$

称此极限式为 $\mathbf{A}(r)$ 该点的散度，并记为 $\text{div}\mathbf{A}(r)$ ，即散度的定义式为

$$\text{div}\mathbf{A}(r) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left\{ \left[\oiint_S \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S}(r) \right] / \Delta\tau \right\} \quad (1-16)$$

它表示从该点单位体积内散发出来的 $\mathbf{A}(r)$ 通量。

矢量的散度是一个标量场。下面以在直角坐标系中为例推导散度的表达式，如图 1-5 所示。在矢量场 \mathbf{A} 中作一平行六面体，边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz ，分别计算三对表面穿出的通量，左右一对表面穿出的净通量等于

$$\begin{aligned} \iint_{\text{左右}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= -A_y(y) \Delta z \Delta x + \left[A_y(y) + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right] \Delta z \Delta x \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

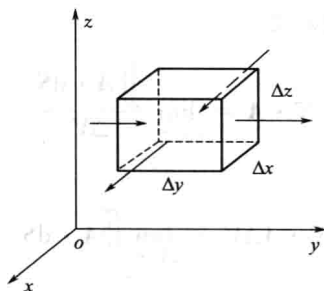


图 1-5 直角坐标内计算 $\text{div}\mathbf{A}$

从上下一对底面穿出净余通量为

$$\begin{aligned} \iint_{\text{上下}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= -A_z(x) \Delta y \Delta z + \left[A_z(z) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right] \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (1-17)$$

从前后一对侧面穿出的净余通量为

$$\iint_{\text{前后}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -A_x(x) \Delta y \Delta z + \left[A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1-18)$$

而 $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ ，代入散度定义式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-19)$$

所以在直角坐标系中 \mathbf{A} 的散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-20)$$

在直角坐标系中哈密顿算符可以写为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-21)$$

所以 \mathbf{A} 的散度也可以写为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-22)$$

矢量分析中的一个重要的定理是

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-23)$$

上式称为散度定理。利用散度定理，可以把面积分变为体积分，也可以把体积分变为面积分。证明这个定理时，可将闭合面 S 包围的体积 V 分割成许多个小体积元 ΔV_1 、 ΔV_2 、 ΔV_3 、 \dots ，根据散度定理定义：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

将其变形：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

对于每一个体积元有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 = \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \oiint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2 = \lim_{\Delta V_2 \rightarrow 0} \oiint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

\vdots

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_n = \lim_{\Delta V_n \rightarrow 0} \oiint_{S_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

将上式叠加得：

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 + \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2 + \cdots + \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_n \\ &= \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \oiint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \lim_{\Delta V_2 \rightarrow 0} \oiint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \cdots + \lim_{\Delta V_n \rightarrow 0} \oiint_{S_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

等号左边各项之和为 $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$, 右边各项之和为 $\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, 即 $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。

这样就证明了散度定理。

【例题 1-1】 已知矢量 $\mathbf{A} = e_x x^2 + e_y x^2 y^2 + e_z 24x^2 y^2 z^3$, 对中心在原点的一个单位立方体验证散度定理。

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_S (e_x x^2 + e_y x^2 y^2 + e_z 24x^2 y^2 z^3) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{x=0.5} x^2 dydz - \iint_{x=-0.5} x^2 dydz + \iint_{y=0.5} x^2 y^2 dx dz - \\ &\quad \iint_{y=-0.5} x^2 y^2 dx dz + \iint_{z=0.5} 24x^2 y^2 z^3 dx dy - \iint_{z=-0.5} 24x^2 y^2 z^3 dx dy = \frac{1}{24} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2x + 2x^2 y + 72x^2 y^2 z^3 \\ \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} (2x + 2x^2 y + 72x^2 y^2 z^3) dx dy dz = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

则

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

1.3 矢量的旋度

1.3.1 旋度

矢量 \mathbf{A} 沿闭合回路 l 的线积分称为环流 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 。

矢量的环流和矢量穿过闭合面的通量一样都是描绘矢量场 $\mathbf{A}(r)$ 性质的重要量。以流体的速度矢量场为例, $\mathbf{v}(r)$ 可能有两种特性: 一是其环流量为零, 即 $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 这是无漩涡的流动情况; 另一是 $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, 是流体沿闭合回路作漩涡状流动的情况。

从矢量场分析的要求来看, 希望知道每个点附近的环流状态。为此, 把闭合路径收

缩, 使它包围的面积元 ΔS 趋近于零, 并求其极限值 $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$ 。

此极限值的意义是环流面密度而不是环流。因为闭合路径收缩及其面元 ΔS 趋近于零完全是任意的, 为此规定面元矢量与闭合路径 C 存在右螺旋关系。不难看出, 上述

的极限与面元的方向有关。通常称此极限值为 \mathbf{A} 的旋度，记为 $\text{rot}\mathbf{A}$ 。因此有关系式

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \mathbf{A} \quad (1-24)$$

式中， $\text{rot}_n \mathbf{A}$ 为矢量 $\text{rot}\mathbf{A}$ 在面元矢量（用 n 表示其方向）上的投影，如图 1-6 所示。

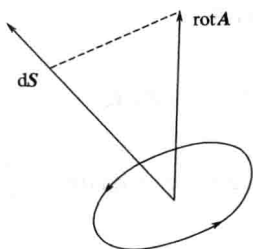


图 1-6 $\text{rot}\mathbf{A}$

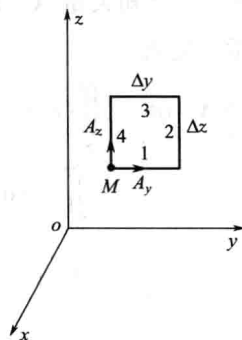


图 1-7 推导直角坐标系 $\text{rot}\mathbf{A}$ 的表达式

矢量场的旋度和散度均用来描绘矢量场 \mathbf{A} 在空间变化的特点。下面来推导直角坐标系内 $\text{rot}\mathbf{A}$ 的表达式。由旋度的定义可以看出，式(1-24)中的极限值与所取面元的形状无关。以研究的点 M 为顶点，取一个平行于 yz 面的矩形面元（图 1-7），则面元矢量与 x 轴平行，其模用 ΔS_x 表示。 $M(x, y, z)$ 点的 $\mathbf{A}(r) = \mathbf{e}_x A_x(r) + \mathbf{e}_y A_y(r) + \mathbf{e}_z A_z(r)$ ， \mathbf{A} 沿回路 1234 的积分为

$$\begin{aligned} \oint_{1234} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_z \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (1-25)$$

$$\text{故} \quad \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{1234} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \text{rot}_x \mathbf{A} \quad (1-26)$$

根据上述，此极限是 $\text{rot}\mathbf{A}$ 在 ΔS_x 上的投影 $\text{rot}_x \mathbf{A}$ 。

同理，取面元 ΔS_y 、 ΔS_z 分别平行于 y 轴和 z 轴，通过与上面相同的推导可得到

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \text{rot}_y \mathbf{A} \quad (1-27)$$

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \text{rot}_z \mathbf{A} \quad (1-28)$$

因此，得到

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \text{rot}_x \mathbf{A} + \mathbf{e}_y \text{rot}_y \mathbf{A} + \mathbf{e}_z \text{rot}_z \mathbf{A}$$