积分几何与几何概率

〔西班牙〕L·A·Santaló 著

吴大任 译

南开大学出版社

积分几何与几何概率

积分几何与几何概率

〔西班牙〕L.A.Santaló 著

吴大任 译

南开大学出版社

内 容 提 要

本书详尽、系 统 地讲述了积分几何与几何概率这一富有魅力的数学分支，包括：平面积分几何，一般积分几何，E_n 里的积分几何，常曲率空 间 积分几何等内容。

本书完备而博洽，它也反复否定了那种认为实用性与优美性不可调和的流行信念。最重要的是，本书提醒我们，概率论是测度论加上一个灵魂，而提供灵魂的，不是物理，随机对策，经济学，而是一切数学学科中最古老而高贵的一员，即几何学。

本书可供高等院校数学系高年级学生，研究生，教师及科技工作者 学 习参考。

积分几何与几何概率
〔西班牙〕L·A·Santalò著
吴大任　译

南 开 大 学 出 版 社 出 版
（天津八里台南开大学校内）
邮政编码300071　电话349318
新华书店天津发行所发行
天 津 宝 坻 印 刷 厂 印 刷

1991年10月第1版　1991年10月第1次印刷
开本：850×1168　1/32　印张：17.25
字数：430千　印数：1—2000
ISBN7—310—00203—2/O·35　定价：8.20元

前　言

这是本丛书关于概率论方面的计划中的第一册。

尽管"积分几何"这个标题在这方面的计划中似乎不那么协调，它却是颇为适当的，因为积分几何是从原先称为"几何概率"的领域中生长出来的。

按照传说，几何概率起源于比丰(Buffon)投针问题(这个问题的优美性和吸引力历时两世纪并没有丧失多少)，但却遇到困难，其顶点是贝特朗(Bertrand)悖论，它使得这个幼弱的领域受到被排斥于数学家庭之外的威胁。为了挽救它使它免于那样的命运，庞加莱(Poincaré)指出，这些悖论产生于概率定义的不确定性，而这是可以避免的；为此，只须把概率定义和一定的几何变换群更紧密地联系起来，在该群下，概率成为不变量。

这种的概念结合就产生了积分几何。

大约40年以来，概率论异军突起，在数学中地位显赫，而积分几何则不幸停留在它的边缘上。只是在最近一段时间里，概率论专家中才有人对这个美丽而富有魅力的数学分支重新发生兴趣。多年来，桑塔洛(Santaló)教授在积分几何领域中是无可争辩的主将，他这本书正是在这样的最恰当时机出版了。

本书完备而博洽，它也反复地否定了那种认为实用性与优美性不可调和的流行信念。

最重要的是，本书提醒我们，概率论是测度论加上一个"灵魂"，而在这里，提供灵魂的，不是物理，不是随机对策，不是经济学，而是一切数学学科中最古老而高贵的一员，即几何学。

Mark Kac

概率组主编

序

在1935—1939年间，汉堡大学数学系勃拉施克(W.Blaschke)和他的学派在"积分几何"的总标题下开始发表了一系列论文。他们所处理的问题大多数扎根于经典的几何概率论，其主要目的之一是要探究这些概率观念能否用以获得具有几何意义的丰硕成果，特别是在凸体和整体微分几何方面。这些早期的工作包含在勃拉施克的书《积分几何讲义》[51]里。

为了把概率观念应用于随机的几何对象(例如点，直线，短程线，全等集合，运动或仿射变换)，必须先对这些元素集合的测度给出定义。这样，对于具体集合，测度的计算有时就导致值得重视的纯几何性的结果，而在其中，概率观念却变成附带的了。这些测度的定义与所涉及的几何有关。按照克莱因(Klein)的著名埃尔朗根(Erlangen)纲领(1872)，区别不同几何的标准是其中的公设在哪一个变换群下保持正确。因此，为了积分几何的目的，所选取的测度自然就要在相应的变换群下不变。这一系列的基本数学概念——概率，测度，群和几何——构成积分几何的基础。

初期的工作几乎完全限于度量(包括欧氏与非欧)几何，所涉及的概率观念也只是上一世纪由克罗夫顿(Crofton)[132,133]和Czuber[134]所提出的经典几何概率中的观念。1940年后，微分几何和群论新方法的出现使人们可以把积分几何中的若干问题加以统一和推广，从而引出这个领域中的新问题，导致它的重大发展。在考虑一个可微流形(以代替欧氏空间)以及在它上面作用的一个可迁变换群时，导致了齐性空间积分几何的出现，而局部紧致群及其不变测度就照耀着整个理论。把积分几何方法纳入齐性空间理论结构是A.Weil[710,711]和陈省身(S.S.Chern)[105]的成果。但是一般地，积分几何还是局限于变换李群——更确切些，限于方阵李群。原因有二：第一，从几何角度看，它们最重要；第

二，它们导致较便于计算的成果。此外，阐述中的简化也弥补了普遍性的损失。

关于积分几何的主要参考书，除 Blaschke[51]外，可以举出作者较早的引论[568]和M.I. Stoka 的书[646,647]。与此有密切联系的，有Hadwiger 的书[270,274]。关于几何概率的，有 Deltheil 的书[144]和 M.G. Kendall 与 A.P.Moran 的有趣的小册子[335]，后者把不同领域中的大量应用都收集在一起了。本书的目的在于对积分几何的主要课题，包括它们的来源和应用，提供一个梗概，着眼于显示几何，群论和概率之间的相互作用对所有这些领域有着多么富有成果的影响。

晚近，主要是通过R.E.Miles 的工作[410,411,414,418]，随机过程观念和方法的引用，丰富了积分几何的内容。1969年6月，在 Oberwolfach(德国)举行的积分几何与几何概率讨论会上，D.G.Kendall，K.Krickeberg 和 R.E.Miles建议用“随机几何”这一名词来确切地表示在一定意义下联系着随机过程的那部分几何和群论的内容。这至少从几何角度看是一个有前景的领域，对此，本书可以作为入门（见[294]以及G.Matheron 的新书[401a]，后者利用了深刻的拓扑概念，对随机集合的理论以及对实际问题的应用都作了详细的处理）.

本书只假定读者学过关于高等微积分的基础课，但微分几何、群论和概率论的一些初等知识也是需要的。必要时，我们总是介绍可以找到必不可少的材料的著作）。

第一编是关于欧氏平面积分几何的，其处理方法是初等的。大多数问题是用特定技巧处理的，主要结果都分别直接而独立地加以证明。我们认为，这部分是基本的，因为它显示所用方法的有力及其作用的广泛。第一到第四章在几何概率论中是经典的。我们运用了关于平面上点和直线集合测度的通行概念，包括一些较新的结果，以说明其应用范围的宽广程度。第五章讨论了带的集合作为直线集合的直接推广。第六和第七章详细论述了平面运

动测度，以强调群上的测度可以怎样应用于严格的几何问题。这几章为第九和第十章的一般理论准备了基础。第八章讨论了运动群的一些离散子群以及它们从积分几何观点来看的意义。

第二篇概述了李群和齐性空间理论，以便获得在这些空间里的不变测度及其性质。对这个一般理论，我们通过仿射群（第十一章）和欧氏空间运动群(第十二章)的例作了说明。讨论了若干例。例如，证明了同一个凸体联系着的平面集合的不变测度可以用来对凸体的不同特性之间的一些不等式作出几何解释（第十一章，第 2 和第 3 ）节。这是积分几何的一个典型结果。

第三编是关于 n 维欧氏空间积分几何的。第十三章概述了关于 n 维空间里凸体的主要结果。第十四章专门讨论了和一个凸集（或者更一般地，一个嵌入欧氏空间的紧致流形）相交的线性空间的测度，获得了若干积分公式，叙述了对几何概率的一些应用。第十五章是关于所谓的运动基本公式的，它包括了欧氏积分几何中大多数公式为其特款或极限款。在第十六章里，我们把一般理论详细地应用于三维欧氏空间，特别是应用于嵌入一个凸体的粒子的量分布问题(当我们只能获得其二维截痕的时候)。这个问题在好几个领域里有应用，近年引起了一定的重视，产生了所谓的立体度测学[166]。

最后，第四编讨论了常曲率空间积分几何(非欧空间几何)，特别是球面积分几何，以及积分几何的一些新动向(叶层空间积分几何，复空间积分几何，辛积分几何，以及Gelfand与Helgasan意义下的积分几何)。我们概述了这些新动向，完全略去了证明，但开列了详细文献。

每章最后都有一节的注记或注记和练习，包括一些参考材料和不加证明的定理，其中强调了应用。这些注记丰富了所涉及材料的数量，再加上广泛的文献目录，使本书具有了百科全书性质。

Luis A. Santaló

目　录

第一篇　平面积分几何

第二篇　一般积分几何

第三篇 E_n 里的积分几何

第四篇 常曲率空间积分几何

第 一 篇

平面积分几何

第一章　平面里的凸集

1. 引言

在积分几何里，凸集起重要作用。因此，我们在这里综述它们的主要性质，特别是在下面各节中需用的那些性质。在本章里，我们讨论平面里的凸集。关于 n 维欧氏空间里的凸集，可看第十三章，至于较详尽的论述，可参考 Blaschke[50]和 Bonnesen 与 Fenchel[63]的经典著作，或较现代的作品：Benson[27]，Eggleston[162]，Grünbaum[247]，Jaglom 与 Boltjanski[320]，Hadwiger[270]，Hadwiger 与其合作者[282]，Valentine[683]。

已给平面里的一个点集 K，若对于每一对点 $A\in K$，$B\in K$，总有 $AB\subset K$，其中 AB 是联结 A 和 B 的线段，则 K 叫做**凸集**。为方便起见，我们将始终假定凸集是有界闭集。

若一条具有端点 P,Q 的曲线，连同线段 PQ，包围一个凸集，则这曲线叫做**凸(曲)线**。若一个凸集有界而且有内点，则 K 的边界叫做**闭凸(曲)线**。集 K 的边界将总用 ∂K 表示。若 K 的一切点属于 ∂K，则 K 是一个线段。

可以证明：(a) 一切凸线都是分段可微导的(即它们是可数多个弧的并集，而且每个弧都有连续地转动的切线)；换句话说，凸线至多有可数集的隅角；(b) 一切有界凸线是有长的。一个凸集 K 的边界的长叫做 K 的**周长**。

2. 直线族的包络

一个含一个参数 λ 的曲线族 $F(x,y,\lambda)=0$ 的包络是指一条曲线，它的每一点是它和该族中一条曲线的切点。我们知道，包络的方程可以从方程 $F=0$ 和 $\partial F/\partial\lambda=0$ 消去 λ 得到。下面我们把这个