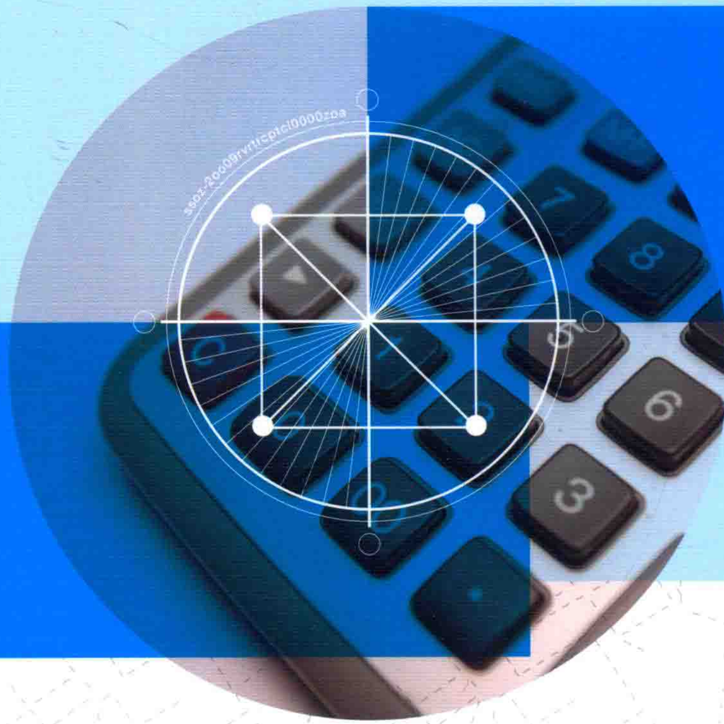
应用技术型高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　杨振起　史　昱
副主编　李宗强　陈凤欣　崔兆诚　李海霞



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　杨振起　史　昱

副主编　李宗强　陈凤欣　崔兆诚　李海霞

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书共6章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间和线性变换、Mathematica．将矩阵的初等变换作为统领本书内容的重要工具，使课程更具系统性、科学性与实用性．注重抽象概念的背景与应用背景的介绍，以便使学习者更好地理解线性代数理论并会用线性代数的思维与方法解决问题．每章配有适量的习题，书末配有习题答案，以便使学习者进行自我评价．

本书内容深入浅出，叙述详尽，例题较多，较为实用，既便于教又便于学．可作为高等院校的教材，也可作为相关专业教师及工程技术人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 杨振起，史昱主编．-- 北京 ：中国水利水电出版社，2014.8
应用技术型高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-2135-3

Ⅰ．①线… Ⅱ．①杨… ②史… Ⅲ．①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第128879号

策划编辑：宋俊娥　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　名	应用技术型高等教育“十二五”规划教材 线性代数
作　者	主　编　杨振起　史　昱 副主编　李宗强　陈凤欣　崔兆诚　李海霞
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　9.75印张　193千字
版　次	2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
印　数	0001—9000册
定　价	18.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

“应用型人才培养基础课系列教材”
编审委员会

前　　言

线性代数的主要内容是研究代数学中的线性关系．由于线性关系是变量之间比较简单的一种关系，而线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，并且一些非线性问题在一定条件下，可以转化或近似转化为线性问题，因此线性代数所介绍的思想方法已成为从事科学研究和工程应用的必不可少的工具．尤其在计算机高速发展和日益普及的今天，线性代数作为高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课，其地位和作用更显得愈发重要．

本书根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的《工科类本科数学基础课教学基水要求》（修订稿）的精神和原则，结合多年学习、研究和教学工作中的一些感悟与经验，面向工科类本科各专业大学生编写了本书．内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间和线性变换、Mathematica．

本书由杨振起、史昱主编，杨振起教授负责总体方案设计，史昱负责统稿，孟艳双主审．各章的具体分工如下：第 1 章由杨振起编写，第 2 章由史昱编写，第 3 章由李宗强编写，第 4 章由陈凤欣编写，第 5、6 章由崔兆诚编写，李海霞老师负责部分章节的编写及资料整理工作．

在编写过程中，参阅了大量国内外同类教材，受到不少启发和教益，在此谨向有关作者表示诚挚的谢意！同时，山东交通学院教务处、理学院的有关领导及同仁对本书的编写给予了热情的支持和指导，在此一并致谢．

与一些常见的教材相比，本书部分内容做了较大修改，这是改革教学内容与教学方法的一种探索和尝试．虽然作者尽了最大努力，但一些改动和叙述未必臻于完善，甚或多有不妥之处．同时，由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请批评指正，以便不断改进．

编写组

2014 年 4 月

目　　录

前言
第 1 章　行列式 1
1.1　二阶和三阶行列式 1
1.1.1　二阶行列式 1
1.1.2　三阶行列式 2
1.1.3　二阶与三阶行列式的关系 3
1.2　n 阶行列式 5
1.2.1　n 阶行列式的定义 5
1.2.2　n 阶行列式展开定理 6
1.3　行列式的性质 7
1.4　行列式的计算 10
1.5　克拉默法则 15
习题 1 18
第 2 章　矩阵 22
2.1　矩阵的概念 22
2.1.1　矩阵的定义 23
2.1.2　一些特殊的矩阵 24
2.2　矩阵的运算 24
2.2.1　矩阵的线性运算 24
2.2.2　矩阵的乘法 26
2.2.3　方阵的幂 29
2.2.4　矩阵的转置 30
2.2.5　方阵的行列式 32
2.3　逆矩阵 34
2.3.1　逆矩阵的概念 34
2.3.2　矩阵可逆的充分必要条件 34
2.3.3　可逆矩阵的性质 37
2.4　矩阵分块 38
2.4.1　分块矩阵的基本运算 38
2.4.2　分块对角矩阵 39
2.4.3　按行分块矩阵和按列分块矩阵 41
2.4.4　线性方程组的两种等价记法 43

2.5 矩阵的初等变换 44
2.5.1 矩阵的初等变换 45
2.5.2 行阶梯形矩阵和行最简形矩阵 46
2.5.3 用初等变换求逆矩阵 48
2.5.4 用初等变换求解矩阵方程 49
2.6 矩阵的秩 51
习题 2 55
第 3 章 线性方程组 59
3.1 线性方程组的解 59
3.1.1 线性方程组的概念 59
3.1.2 线性方程组有解的判别法 60
3.2 n 维向量及向量组的线性组合 65
3.2.1 向量组与矩阵 65
3.2.2 线性组合与线性表示 66
3.2.3 向量组的等价 69
3.3 向量组的线性相关性 70
3.3.1 线性相关性概念 70
3.3.2 线性相关性的判定 72
3.4 向量组的秩 74
3.4.1 向量组的最大线性无关组 74
3.4.2 向量组的最大线性无关组的求法 75
3.5 向量空间 78
3.5.1 向量空间与子空间 78
3.5.2 向量空间的基与维数 80
3.6 齐次线性方程组解的结构 81
3.6.1 齐次线性方程组解的性质 81
3.6.2 齐次线性方程组解的结构 81
3.7 非齐次线性方程组解的结构 88
3.7.1 非齐次线性方程组解的性质 88
3.7.2 非齐次线性方程组解的结构 88
习题 3 90
第 4 章 相似矩阵与二次型 93
4.1 正交矩阵 93
4.1.1 向量的内积 93
4.1.2 n 维向量的长度和夹角 94
4.1.3 向量组的正交性 94
4.1.4 正交矩阵与正交变换 97

4.2 矩阵的特征值与特征向量 98
4.2.1 特征值与特征向量 99
4.2.2 特征值和特征向量的性质 101
4.3 相似矩阵 103
4.3.1 相似矩阵的概念与性质 103
4.3.2 方阵的对角化 104
4.3.3 实对称矩阵的对角化 106
4.4 二次型 109
4.4.1 二次型的概念及其矩阵 109
4.4.2 化二次型为标准形 111
4.5 正定二次型 114
4.5.1 正定二次型的定义 114
4.5.2 正定二次型的判别 114
习题 4 116
第 5 章 线性空间与线性变换 118
5.1 线性空间 118
5.1.1 线性空间的定义和例子 118
5.1.2 线性空间的简单性质 119
5.1.3 子空间 120
5.2 基、维数与坐标 120
5.2.1 线性空间的基与维数 120
5.2.2 坐标 121
5.2.3 同构 122
5.3 基变换与坐标变换公式 122
5.3.1 基变换与过渡矩阵 122
5.3.2 坐标变换 123
5.4 线性变换及其矩阵 125
5.4.1 线性变换及其性质 125
5.4.2 线性变换的矩阵表示 126
习题 5 130
第 6 章 线性代数与 Mathematica 132
参考答案 137
参考文献 146

第 1 章　行列式

行列式实质上是由一些数排列成的数表按一定法则计算得到的一个数，即是一种特定的算式．行列式在解析几何以及数学的其他分支中都扮演着很重要的角色．特别是在本课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量的线性相关性的一种重要工具．

1.1　二阶和三阶行列式

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学数学课程中已经涉及，本节通过二元、三元线性方程组的解来定义二阶、三阶行列式，它们是我们学习和讨论更高阶行列式的基础．

1.1.1　二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}（$i=1,2$; $j=1,2$）是未知量 x_j（$j=1,2$）的**系数**，b_i（$i=1,2$）是**常数项**.

在方程（1.1.1）的第一个方程和第二个方程的两边分别乘以 a_{22} 和 a_{12}，然后两式相减，消去 x_2 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

用同样的方法消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可求得方程组（1.1.1）的唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在（1.1.2）式中分子、分母都是两对数的乘积之差，其中分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，它是由方程组（1.1.1）的系数确定的．那么规定**二阶行列式**为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

数 a_{ij}（$i=1,2$; $j=1,2$）称为这个行列式的**元素**．(横的称为**行**，纵的称为**列**)，它的第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于行列式的第 i 行；它的第二个下标 j 称

为**列标**，表示该元素位于行列式的第 j 列．那么式（1.1.3）恰是行列式中**主对角线**（左上角至右下角的对角线）上两个数的乘积与**副对角线**（右上角至左下角的对角线）上两个数的乘积之差．

由二阶行列式的定义，将式（1.1.2）中的的分子分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$．则可以把线性方程组（1.1.1）的唯一解（1.1.2）式写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

其中 $D \neq 0$．

这个结论很容易记忆：x_1，x_2 的分母 D 是由方程组（1.1.1）的系数在方程组的一般形式下保持原来的相对位置不变所构成的二阶行列式（称为**系数行列式**），x_1 的分子 D_1 是方程组（1.1.1）的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1.1.1　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases}$$

解　因为线性方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解．

又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 16 = -11, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{7}.$$

1.1.2　三阶行列式

类似地，可定义三阶行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} .$$

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 由三阶行列式的定义，可得

$$\begin{aligned} D &= 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times1\times3 - 1\times(-4)\times5 - 2\times3\times2 \\ &= 30+2-24-6+20-12 \\ &= 10. \end{aligned}$$

1.1.3 二阶与三阶行列式的关系

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式的定义为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (1.1.5)$$

由此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的**代数和**. 同时也看到三阶行列式的计算可以转化为二阶行列式的计算. 那么一个重要的问题是 n 阶行列式的计算能否转化为 $n-1$ 阶或更低阶行列式的计算呢？

为了进一步了解这三个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系，下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 a_{ij}（$i=1,2,3$; $j=1,2,3$）所在的第 i 行与第 j 列划去，剩下的元素保持原来的相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} . 记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是在 D 中划去元素 a_{12} 所在的第 1 行与第 2 列后剩下的元素所构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

而元素a_{12}的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的概念，（1.1.5）式可以写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和. 这个表达式通常称为：**行列式按第一行展开的展开式**.

例 1.1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 7\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=1\times16-0+5\times(-4)=-4.$$

行列式按第一行展开的结果还可以进一步推广为如下**展开定理：**

定理 1.1.1 三阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,3),\tag{1.1.6}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,3).\tag{1.1.7}$$

证明 现证（1.1.7）式中$j=2$的情况，其他情况可类似证明.

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\
&=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{13}a_{21}\\
&=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})\\
&=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\
&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.\end{aligned}$$

展开式（1.1.6）称为**按第i行展开的展开公式**，展开式（1.1.7）称为**按第j列展开的展开公式**.

如果定义一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| - a_{12}\,|a_{21}|.$$

例 1.1.4 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 把D按第二行展开，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$=20-12-12=-4.$$

例 1.1.5 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零，故按第二列展开较简便，即

$$D=4\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\times(-5) = -20.$$

1.2 n 阶行列式

二阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和；三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和．我们可以按照这个思路给出n阶行列式的定义．

1.2.1 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 由n^2个数a_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,n$）组成的n阶行列式记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

当$n=1$时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

当$n\geqslant 2$时，$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$，（1.2.1）其中$A_{1j}$为$D$

的元素 a_{1j} 的代数余子式.

1.2.2 n 阶行列式展开定理

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

一般来说，低阶行列式比高阶行列式的计算要简单，根据上述定理，能够把 n 阶行列式用 $n-1$ 阶行列式来表示，从而将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式的计算.

例 1.2.1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零，故按第二列展开较简便

$$D=1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2&4\\3&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}$$
$$=37+46=83.$$

例 1.2.2 计算对角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

其中行列式除主对角线上的元素外其余元素均为零.

解 根据 n 阶行列式的定义有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&&&\\&a_{33}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&&\\&\ddots&\\&&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots$$
$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.3 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中行列式主对角线以下的元素均为零.

解 根据定理 1.2.1，考虑到 D 的第一列除元素 a_{11} 外均为零，所以按第一列展开得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同样，对上式右端的 $n-1$ 阶行列式按第一列展开得到

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3 行列式的性质

为了使行列式的计算更加简便，我们引进行列式的初等变换概念.

定义 1.3.1 行列式的初等行变换是指:

（1）用一个非零常数 k 遍乘行列式的某一行;

（2）互换行列式任意两行的位置;

（3）将行列式某一行加上另一行的 k 倍.

将定义 1.3.1 中的“行”换成“列”，即得行列式的初等列变换的定义.

行列式的初等行变换与初等列变换统称为**行列式的初等变换**.

由上节给出的几个例题可以看出，在行列式的计算过程中，为了计算简便，可选择含零元素较多的那一行（列）展开. 本节将介绍行列式的性质，利用这些性质可以将一个行列式中某行（列）的元素尽可能多的化为零，以使行列式的计算变得简单.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将行列式 D 的相应的行变为相应的列，得到的新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T} .

行列式基本性质　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

由此性质可知，行列式的行与列具有相同的地位，也就是对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

例 1.3.1　计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中主对角线以上的元素均为零.

解　由行列式的基本性质及例 1.2.3 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.3.1　互换行列式的两行（列），行列式变号.

推论 1.3.1　若行列式中有两行（列）相同，则行列式等于零.

证明　设行列式 D 中有两行相同，把这两行互换得到行列式 D ，由此推得 $D=-D$ ，即 $2D=0$ ，故 $D=0$.

性质 1.3.2　行列式的某一行（列）乘以数 k ，所得到的行列式等于原行列式的 k 倍. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　将上式左端的行列式按第 i 行展开，显然上式两端行列式第 i 行元素的代数余子式是相同的，故有

$$\text{左边}=a_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\text{右边}.$$

由性质 1.3.2，当 $k=0$ 时，可得下面的性质：

推论 1.3.2 若行列式中某一行（列）的元素全为零，则行列式等于零.

由性质 1.3.2 和推论 1.3.1 可得.

推论 1.3.3 若行列式中有两行（列）对应成比例，则行列式等于零.

性质 1.3.3 行列式某一行（列）加上另一行（列）的 λ 倍，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

证明 对右端的行列式按第 i 行展开有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda a_{kj})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})+\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{kj}A_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})+\lambda\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij}),$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

由推论 1.3.1 有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0.$$

因此性质得证.

这个性质的证明用到从行列式的展开式中找出原行列式的技巧，应用这个性质的证明方法，还可以得出下述行列式的性质.

推论 1.3.4 若行列式 D 中某一行（列）的每个元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和，则行列式 D 可分解成两个行列式 D_1 与 D_2 之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以上我们得到了行列式的主要性质. 行列式的这三个性质说明三种初等变换对行列式的值的影响. 我们可以应用这三个性质，将行列式，特别是数字行列式