数学

会考·高考成功的捷径

知识出版社

成功的捷径 会考·高考 成功的捷径 会考·高考 成功的捷径

会考高考成功的捷径

——数　学

王文杰　闫祝[illegible]　等　编写

（京）新登字 188 号

会考高考成功的捷径
——数学
王文杰　闫祝三　等编写
知识出版社出版发行
（北京阜成门北大街 17 号）

新华书店首都发行所经销　门头沟区印刷厂印刷
开本 1092×787　　印张 10.7　字数 20 万字
1993 年 4 月第 1 版　1993 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—8000

ISBN 7-5015-0990-5/G·372
定价：5.70 元

内 容 提 要

在学习高中数学的过程中，面对千变万化的数学问题，很多同学倍感困难，为此我们编写了这本小册子。本册第一章总体介绍了学习高中数学几种必备的思维方法。第二章到第八章，针对高中数学的七个主要部分，具体阐述了解决常见数学问题的思维方法，并对某些知识加以深化与拓宽。在第九章中介绍了如何在会考与高考中加强应试能力。在每一章后面都配备了一定量的练习题。通过这本小册子，会对同学们解决数学问题有较大的帮助。

参加本书编写的还有：马华、张迟、常建思、纪宁、肖文、罗新清。

丛书主编：焦　平　翁豪英
副 主 编：马文志

目　录

第一章　高中数学思维方法

第一节　要掌握解决基本问题的常用方法

为数颇多的高中学生，常常在解决数学问题时，想不出解题的对策。这往往由于同学们虽然粗通了与问题有关的数学概念，但是没有掌握解决这类问题的常用方法(从第二章我们将按照知识体系详细探讨这个问题。)本节以解决“最值”问题为例强调掌握常用方法的重要性，并研究如何总结这些常用方法，尤其是学会运用这些常用方法。

这里所说的常用方法应该是解决某类常见问题的通法，而不是那些只适用于特定条件下的技巧。从这个观点出发，让我们来看看解决“最值”问题有哪些常用方法。以中学数学知识为背景，我们在学习函数这部分知识时会研究函数的最值；在学习不等式的性质时会利用不等式求最值；我们还会利用几何图形来观察一些最值。于是我们可以得出解决“最值”问题的三种常用方法：1. 将问题转化成函数问题，利用函数的性质求最值；2. 将问题转化成不等式问题，利用不等式的知识求最值；3. 把问题转化成几何图形的问题，利用几何性质求最值。通过下面例题我们来讨论如何运用这些常用方法。

［**例 1**］　在抛物线 $y=4x^2$ 上求一点，使该点到直线 $y=4x-5$

的距离为最短，并求出这个最短距离。

解：设抛物线上任一点的坐标为(x,y)，它到直线$y=4x-5$的距离为$d=\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{17}}$，由于抛物线上的点的坐标满足$y=4x^2$，将它代入距离表达式中就把这个问题转化成求函数$d=\frac{\sqrt{17}}{17}|4x^2-4x+5|$的最值问题了。显然当$x=\frac{1}{2}$时，$|4x^2-4x+5|$有最小值4，也就是说抛物线上的点$\left(\frac{1}{2},1\right)$到直线$y=4x-5$的距离最短，这个最短距离为$\frac{4}{17}\sqrt{17}$。

［**例 2**］　求函数$y=x^2(1-3x)(0<x<\frac{1}{3})$的最大值。

解：这是个三次函数，我们不了解它的函数性质，当注意到条件$0<x<\frac{1}{3}$，函数的表达式可以看成三个正数的乘积$x\cdot x\cdot(1-3x)$，由于$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)=1$，于是问题就可以转化成不等式问题，由不等式的性质可得$x^2(1-3x)=\frac{4}{9}\left[\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot(1-3x)\right]\leqslant\frac{4}{9}\left[\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)}{3}\right]^3=\frac{4}{243}$，$x=\frac{2}{9}$即$\frac{3}{2}x=1-3x$是等号成立的充要条件。于是得到当$x=\frac{2}{9}$时函数有最大值$\frac{4}{243}$。

［**例 3**］　如果实数(x,y)满足等式$(x-2)^2+y^2=3$，求$\frac{y}{x}$的最大值。

解：如果注意到$(x-2)^2+y^2=3$是圆的方程，那么$\frac{y}{x}$就表示圆

上的点(x,y)与圆所在的坐标系的原点连线的斜率，如图 1-1 可见当连线在圆上方与圆相切时$\frac{y}{x}$的值最大。这样就把问题转化为几何图形问题了，由几何性质可知连线与圆如图位置相切时连线的斜率为$\sqrt{3}$，即$\frac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$。

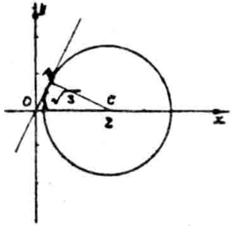

图 1-1

［**例 4**］ 已知实数(x,y)满足$x^2-xy+y^2=1$，求x^2-y^2的最小值。

解法一：如果令$u=x^2-y^2$，则得$y^2=x^2-u$，代入已知式中得$2x^2-u-1=xy$，两边平方后再把$y^2=x^2-u$代入可得$3x^4-(3u+4)x^2+u^2+2u+1=0$，这是字母系数中只含$u$的关于$x$的方程，由于$x^2$是实数，故应$\triangle=(3u+4)^2-12(u^2+2u+1)\geqslant 0$，解得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant u\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$。这里我们没法构造出上述方程，使其符合使用判别式法的条件，得到关于u的不等式，从而解出x^2-y^2的最小值是$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

解法二：如果注意到已知式是关于x、y的对称式，可令$x=l+t$，$y=l-t$，代入已知式得$l^2+3t^2=1$。又将其代入所求最值的式子x^2-y^2中得$x^2-y^2=4lt$。若设$l=\cos\theta$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，它满足$l^2+3t^2=\cos^2\theta+3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=1$。这时$x^2-y^2=4lt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta$，可得其最小值为$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$。这里又把问题转化成三角函数$\sin 2\theta$的最小值问题了。

纵观这几个例题，它的解决方法都不外乎前面所述的三个常用方法。学会解决各类基本问题的常用方法，面对未曾谋面的数学题，一般能较快地确定解题的策略，因此希望同学们能够重视这个问题，在学好基本概念的基础上要掌握解决基本问题的常用方法。

第二节　几个常用的数学思维观点

要学好高中数学，不但要掌握解决基本问题的常用方法，还应掌握一些常用的数学思维的基本观点。这里我们着重讨论三个非常重要的观点，即函数的观点、方程的观点和参数的观点。

（一）**函数的观点**：当一个变量仅依另一个变量的变化且单值变化时，就建立了这两个变量之间的函数关系，利用研究函数的方法分析它们之间的相互依存关系，这种思维方法就是函数的观点。建立函数的观点可以提高分析和解决问题的能力，让我们来看下面例题。

［**例 1**］　试讨论直线随其倾斜角的不同，直线斜率的变化情况。

许多同学见到这个问题，仅从图形上去考虑，但不容易立刻得出正确的结论。我们知道直线的斜率 K 与倾斜角 α 有这样的关系，当 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $k=\mathrm{tg}\alpha$，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，K 不存在。于是可由正切函数的性质得出结论。

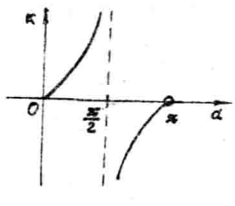

图 1-2

解：考察函数 $K=\mathrm{tg}\alpha$ $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，见图 1-2 由函数

的图象可知$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$和$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$分别是函数的两个增函数区间。由此可知当$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时$K>0$且$K$是$\alpha$的增函数，当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时$K$不存在，当$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时$K<0$且$K$也是$\alpha$的增函数。

［**例 2**］　已知$a<b$，比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小。

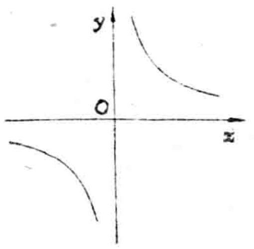

图 1-3

解：当然这个问题可以由不等式的性质得出结论。但如果我们认为$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$是函数$y=\frac{1}{x}$当x取a和b时的两个函数值，如图 1-3，由函数$y=\frac{1}{x}$的增减性容易得出：当$0<a<b$时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；当$a<b<0$时，也有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；当$a<0$而$b>0$时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

［**例 3**］　解不等式$\sqrt{2x+5}>x+1$。

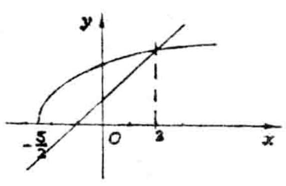

图 1-4

解：我们可以引入函数$y=\sqrt{2x+5}$和$y=x+1$，如图 1-4 对于相同的自变量x，当函数$y=\sqrt{2x+5}$的图象上的点高于$y=x+1$的图象上的点时，这样的自变量x的集合就是不等式的解。容易解出两曲线交点横坐标为 2，于是得出不等式的解集为

$\{x|-\frac{5}{2}\leqslant x<2\}$。

由以上例子可以看出，利用函数的观点，可以使我们对这些问题的分析更深刻、更透彻。

（二）**方程的观点**：从分析已知量与未知量构成的等量关系入手，用数学表达式将其表达出来，再通过解方程的手段使问题获解的思维方法称为方程的观点。通过下面的例子让我们来体会如何运用方程的观点解题。

［**例 4**］ 已知 $\lg 24=a$，$\lg 18=b$，用 a、b 表示 $\log_5 1.5$

解：考虑到 $\log_5 1.5=\frac{\lg 1.5}{\lg 5}=\frac{\lg 3-\lg 2}{1-\lg 2}$，而 $\lg 24=3\lg 2+\lg 3$，$\lg 18=\lg 2+2\lg 3$，将其联立得 $\begin{cases}3\lg 2+\lg 3=a\\ \lg 2+2\lg 3=b\end{cases}$，可以解得 $\lg 2=\frac{2a-b}{5}$，$\lg 3=\frac{3b-a}{5}$。于是可得 $\log_5 1.5=\frac{4b-3a}{5-2a+b}$。

从这道题的解题过程中可以看出，由于可以将 $\log_5 1.5$ 用 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 表示，又从已知条件中得出关于 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 为未知数的方程组，这样把 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 解出来，使问题得以解决。

［**例 5**］ 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，定义域都是 $\{x|x\in R$ 且 $x\neq\pm 1\}$ 又 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析表达式。

解：显然又有 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，由 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数又得 $f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}$ 于是可得

$\begin{cases}f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}\\ f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$，这就建立了以 $f(x)$、$g(x)$ 为未知数的二

元一次方程组，于是可以解得 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$。

［**例 6**］ 求点(1，2)关于直线 $x+y+1=0$ 对称的点的坐标。

解：设所求点的坐标为(x_0,y_0)，要解出 x_0，y_0 两个字母，把它们看成两个未知数，就要两个独立的条件，建立一个二元方程组。由这个想法和“对称”的几何意义可得$\dfrac{y_0-2}{x_0-1}=1$，即两点连线与直线 $x+y+1=0$ 垂直。又(1，2)与(x_0,y_0)的中点$\left(\dfrac{x_0+1}{2},\dfrac{y_0+2}{2}\right)$在直线 $x+y+1=0$ 上可得$\dfrac{x_0+1}{2}+\dfrac{y_0+2}{2}+1=0$。将它们整理后联立可得二元一次方程组$\begin{cases}x_0-y_0+1=0\\x_0+y_0+5=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=-3\\y_0=-2\end{cases}$，即所求点坐标为(－3，－2)。

（三）**参数的观点**：为了揭示所研究的变量之间的内在联系，利用参数为媒介、揭示变量之间的联系和变化规律的思维方法称为参数的观点。看下面例题。

［**例 7**］ 已知过点 $P(3,2)$的直线与 x、y 轴的正半轴都相交，求直线与坐标轴所围成的三角形面积的最小值。

解： 如图 1-5 设$\angle OAB=\theta$为参数，则有$|OA|=|OM|+|MA|=3+\dfrac{2}{\mathrm{tg}\theta}$，$|OB|=|ON|+|NB|=2+3\mathrm{tg}\theta$，于是三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\dfrac{1}{2}\left(12+9\mathrm{tg}\theta+\dfrac{4}{\mathrm{tg}\theta}\right)$，注意到 θ 是锐角，有 $9\mathrm{tg}\theta+\dfrac{4}{\mathrm{tg}\theta}\geqslant 12$，当 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{2}{3}$

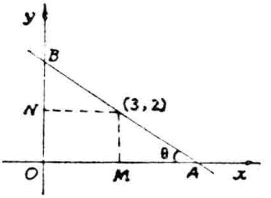

图 1-5

即 $9\mathrm{tg}\theta=\frac{4}{\mathrm{tg}\theta}$时，等号成立，这时三角形面积有最小值$\frac{1}{2}(12+12)=12$。

［例 8］ 求函数 $y=|\sin x|-\sqrt{3}|\cos x|$的值域。

解：引入参数 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，可使$|\sin x|=\sin\theta$、$|\cos x|=\cos\theta$，于是使所给函数式化为 $y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ 形式，这有利于把它化为基本形 $y=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$。由$-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$可知$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin(\theta-\frac{\pi}{3})\leqslant\frac{1}{2}$，可见所求函数值域为 $y\in[-\sqrt{3},1]$。

［例 9］ 已知实数 a、b、c、d 使 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=4$， 求证$|abcd|\leqslant1$。

证明：题中有四个字母，由题目条件，引入参数 α、β，使 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，$\frac{c}{2}=\sin\beta$，$\frac{d}{2}=\cos\beta$，使四个字母仅由两个字母 α，β 表示，并蕴含了题目条件。于是有

$|abcd|=|4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta|=|\sin2\alpha|\cdot|\sin2\beta|\leqslant1$，问题得证。

以上几个观点在揭示事物之间的内在联系，发现事物的变化规律上起着重要的作用，如果我们注意领会运用这些观点，对提高思维能力会有很大帮助。

第三节　要充分发挥直观形象的作用

对抽象的“数”的研究与对直观的“形”的研究，它们之间的关系既是对立的又是统一的。人们不但惯于把“形”的研究转化成“数”的研究，而且在“数”的研究中也经常用“形”来描绘，这样就可