



数学

会考·高考

成功的捷径

知识出版社

成功的捷径会考·高考成功的捷径会考·高考成功的捷径

会考高考成功的捷径

——数 学

王文杰 闫祝_田 等 编写

(京)新登字 188 号

会考高考成功的捷径

——数学

王文杰 闫祝三 等编写

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街 17 号)

新华书店首都发行所经销 门头沟区印刷厂印刷

开本 1092×787 印张 10.7 字数 20 万字

1993 年 4 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷

印数:1—8000

ISBN 7-5015-0990-5/G · 372

定价:5.70 元

内 容 提 要

在学习高中数学的过程中,面对千变万化的数学问题,很多同学倍感困难,为此我们编写了这本小册子。本册第一章总体介绍了学习高中数学几种必备的思维方法。第二章到第八章,针对高中数学的七个主要部分,具体阐述了解决常见数学问题的思维方法,并对某些知识加以深化与拓宽。在第九章中介绍了如何在会考与高考中加强应试能力。在每一章后面都配备了一定量的练习题。通过这本小册子,会对同学们解决数学问题有较大的帮助。

参加本书编写的还有:马华、张迟、常建思、纪宁、肖文、罗新清。

丛书主编：焦 平 翁豪英

副 主 编：马文志

目 录

第一章 高中数学思维方法	(1)
第一节 要掌握解决基本问题的常用方法	(1)
第二节 几个常用的数学思维观点	(4)
第三节 要充分发挥直观形象的作用	(8)
第四节 提高解析式变形的能力	(12)
第五节 化归——重要的思维能力	(15)
第六节 注意提高迁移能力	(18)
第七节 学会分类讨论	(22)
练习一(附答案)	(25)
第二章 函数问题释疑	(27)
第一节 认清函数符号“ f ”	(27)
第二节 有关反函数的几个问题	(29)
第三节 分段函数的探讨	(34)
第四节 掌握几类有用的图象变换	(37)
第五节 复合函数的值域与单调性	(41)
第六节 研究函数问题的基本策略	(44)
第七节 求函数值域几法	(48)
第八节 函数性质的简单应用	(52)
练习二(附答案)	(56)

第三章 不难驾驭的三角函数	(58)
第一节 巧解三角函数的求值问题(一)	(58)
第二节 巧解三角函数的求值问题(二)	(61)
第三节 证明三角恒等式的三种常用方法	(64)
第四节 证明三角条件等式的两种思路	(68)
第五节 三角形内等式证明的常用技巧	(71)
第六节 三角函数中的数形结合问题	(75)
第七节 用角参数解最值问题或证明定值问题	(78)
第八节 要特别注意考虑反三角函数的值域	(83)
第九节 解三角方程的一般思路及解的检验	(88)
练习三(附答案)	(93)

第四章 转化法是研究立体图形性质的重要方法	(97)
第一节 线、面垂直关系的证明	(97)
第二节 平移直线求出异面直线所成的角	(102)
第三节 根据定义求出直线和平面所成的角	(106)
第四节 二面角平面角的“一找二做”	(111)
第五节 平面图形的翻折问题	(117)
第六节 几种“距离”之间的相互转化	(122)
第七节 用转化法求几何体的体积	(129)
练习四(附答案)	(134)

第五章 拓宽数列的知识	(142)
第一节 等差数列中的一些规律	(142)

第二节	等比数列中的一些规律·····	(146)
第三节	等差数列与等比数列的综合问题·····	(149)
第四节	数列前 n 项和的含义 ·····	(154)
第五节	数列中的化归思想·····	(159)
第六节	几种特殊的数列求和方法·····	(163)
第七节	由递推关系表示的数列·····	(168)
第八节	几类数列极限的求法·····	(173)
练习五 (附答案)	·····	(179)
第六章	不等式的解法与证明·····	(181)
第一节	有理不等式的解法·····	(181)
第二节	无理不等式的解法·····	(186)
第三节	用换元法与分类讨论法解对数不等式·····	(190)
第四节	用比较法证明不等式·····	(195)
第五节	用综合法证明不等式·····	(199)
第六节	用分析法证明不等式·····	(203)
第七节	用放缩法证明不等式·····	(207)
第八节	用数学归纳法证明不等式·····	(211)
第九节	利用不等式求最值·····	(217)
第十节	方程的讨论·····	(221)
练习六 (附答案)	·····	(224)
第七章	解决复数问题的捷径·····	(230)
第一节	复数求值的技巧·····	(230)
第二节	复数几何意义的运用·····	(234)
第三节	把复数表示成三角形式·····	(237)

第四节	二项复数方程.....	(240)
第五节	证明复数问题的途径.....	(244)
第六节	解复数题的策略.....	(249)
练习七 (附答案)		(255)
第八章	解析几何的解题对策.....	(257)
第一节	解析几何中的待定系数法.....	(257)
第二节	灵活地运用几何法.....	(264)
第三节	直线与二次曲线的公共点.....	(270)
第四节	学会处理两个二次曲线的公共点问题.....	(276)
第五节	解决非标准位置的圆锥曲线问题的捷径.....	(282)
第六节	巧用参数方程中的参数.....	(287)
第七节	求轨迹方程的三种方法.....	(293)
第八节	极坐标方程中 ρ 的含义.....	(298)
练习八 (附答案)		(303)
第九章	沉着、冷静地参加会考与高考.....	(305)
第一节	会考与高考在考试要求上的异同.....	(305)
第二节	对“双基”的掌握要做到准确、熟练、深刻.....	(310)
第三节	灵活选用方法做好选择题.....	(314)
第四节	注意严格的逻辑推理.....	(319)
第五节	正确使用分类讨论的方法.....	(324)
第六节	稳扎稳打,提高综合题的得分率.....	(329)

第一章 高中数学思维方法

第一节 要掌握解决基本问题的常用方法

为数颇多的高中学生,常常在解决数学问题时,想不出解题的对策。这往往由于同学们虽然粗通了与问题有关的数学概念,但是没有掌握解决这类问题的常用方法(从第二章我们将按照知识体系详细探讨这个问题。)本节以解决“最值”问题为例强调掌握常用方法的重要性,并研究如何总结这些常用方法,尤其是学会运用这些常用方法。

这里所说的常用方法应该是解决某类常见问题的通法,而不是那些只适用于特定条件下的技巧。从这个观点出发,让我们来看看解决“最值”问题有哪些常用方法。以中学数学知识为背景,我们在学习函数这部分知识时会研究函数的最值;在学习不等式的性质时会利用不等式求最值;我们还会利用几何图形来观察一些最值。于是我们可以得出解决“最值”问题的三种常用方法:1. 将问题转化成函数问题,利用函数的性质求最值;2. 将问题转化成不等式问题,利用不等式的知识求最值;3. 把问题转化成几何图形的问题,利用几何性质求最值。通过下面例题我们来讨论如何运用这些常用方法。

[例 1] 在抛物线 $y=4x^2$ 上求一点,使该点到直线 $y=4x-5$

的距离为最短,并求出这个最短距离。

解:设抛物线上任一点的坐标为 (x, y) ,它到直线 $y=4x-5$ 的距离为 $d=\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{17}}$,由于抛物线上的点的坐标满足 $y=4x^2$,将它代入距离表达式中就把这个问题转化成求函数 $d=\frac{\sqrt{17}}{17}|4x^2-4x+5|$ 的最值问题了。显然当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $|4x^2-4x+5|$ 有最小值4,也就是说抛物线上的点 $(\frac{1}{2}, 1)$ 到直线 $y=4x-5$ 的距离最短,这个最短距离为 $\frac{4}{17}\sqrt{17}$ 。

[例2] 求函数 $y=x^2(1-3x)$ ($0 < x < \frac{1}{3}$) 的最大值。

解:这是个三次函数,我们不了解它的函数性质,当注意到条件 $0 < x < \frac{1}{3}$,函数的表达式可以看成三个正数的乘积 $x \cdot x \cdot (1-3x)$,由于 $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + (1-3x) = 1$,于是问题就可以转化成不等式问题,由不等式的性质可得 $x^2(1-3x) = \frac{4}{9} \left[\frac{\frac{3}{2}x \cdot \frac{3}{2}x \cdot (1-3x)}{3} \right] \leq \frac{4}{9} \left[\frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + (1-3x)}{3} \right]^3 = \frac{4}{243}$, $x = \frac{2}{9}$ 即 $\frac{3}{2}x = 1-3x$ 是等号成立的充要条件。于是得到当 $x = \frac{2}{9}$ 时函数有最大值 $\frac{4}{243}$ 。

[例3] 如果实数 (x, y) 满足等式 $(x-2)^2 + y^2 = 3$,求 $\frac{y}{x}$ 的最大值。

解:如果注意到 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 是圆的方程,那么 $\frac{y}{x}$ 就表示圆

上的点 (x, y) 与圆所在的坐标系的原点连线的斜率,如图 1-1 可见当连线在圆上方与圆相切时 $\frac{y}{x}$ 的值最大。这样就把问题转化为几何图形问题了,由几何性质可知连线与圆如图位置相切时连线的斜率为 $\sqrt{3}$,即 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

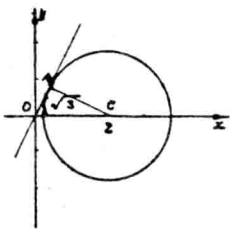


图 1-1

[例 4] 已知实数 (x, y) 满足 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求 $x^2 - y^2$ 的最小值。

解法一: 如果令 $u = x^2 - y^2$, 则得 $y^2 = x^2 - u$, 代入已知式中得 $2x^2 - u - 1 = xy$, 两边平方后再把 $y^2 = x^2 - u$ 代入可得 $3x^4 - (3u + 4)x^2 + u^2 + 2u + 1 = 0$, 这是字母系数中只含 u 的关于 x 的方程, 由于 x^2 是实数, 故应 $\Delta = (3u + 4)^2 - 12(u^2 + 2u + 1) \geq 0$, 解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。这里我们没法构造出上述方程, 使其符合使用判别式法的条件, 得到关于 u 的不等式, 从而解出 $x^2 - y^2$ 的最小值是 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

解法二: 如果注意到已知式是关于 x, y 的对称式, 可令 $x = l + t, y = l - t$, 代入已知式得 $l^2 + 3t^2 = 1$ 。又将其代入所求最值的式子 $x^2 - y^2$ 中得 $x^2 - y^2 = 4lt$ 。若设 $l = \cos\theta, t = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$, 它满足 $l^2 + 3t^2 = \cos^2\theta + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2 = 1$ 。这时 $x^2 - y^2 = 4lt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta$, 可得其最小值为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。这里又把问题转化成三角函数 $\sin 2\theta$ 的最小值问题了。

纵观这几个例题,它的解决方法都不外乎前面所述的三个常用方法。学会解决各类基本问题的常用方法,面对未曾谋面的数学题,一般能较快地确定解题的策略,因此希望同学们能够重视这个问题,在学好基本概念的基础上要掌握解决基本问题的常用方法。

第二节 几个常用的数学思维观点

要学好高中数学,不但要掌握解决基本问题的常用方法,还应掌握一些常用的数学思维的基本观点。这里我们着重讨论三个非常重要的观点,即函数的观点、方程的观点和参数的观点。

(一) **函数的观点**: 当一个变量仅依另一个变量的变化且单值变化时,就建立了这两个变量之间的函数关系,利用研究函数的方法分析它们之间的相互依存关系,这种思维方法就是函数的观点。建立函数的观点可以提高分析和解决问题的能力,让我们来看下面例题。

[例 1] 试讨论直线随其倾斜角的不同,直线斜率的变化情况。

许多同学见到这个问题,仅从图形上去考虑,但不容易立刻得出正确的结论。我们知道直线的斜率 K 与倾斜角 α 有这样的关系,当 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时 $k = \operatorname{tg} \alpha$, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, K 不存在。于是可由正切函数的性质得出结论。

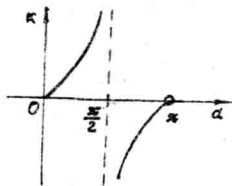


图 1-2

解: 考察函数 $K = \operatorname{tg} \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 见图 1-2 由函数

的图象可知 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 分别是函数的两个增函数区间。由此可知当 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $K > 0$ 且 K 是 α 的增函数, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时 K 不存在, 当 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时 $K < 0$ 且 K 也是 α 的增函数。

[例 2] 已知 $a < b$, 比较 $\frac{1}{a}$ 与

$\frac{1}{b}$ 的大小。

解: 当然这个问题可以由不等式的性质得出结论。但如果我们认为 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$ 是函数 $y = \frac{1}{x}$ 当 x 取 a 和 b 时的两个函数值, 如图 1-3, 由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的增减性容易得出: 当 $0 < a < b$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 当 $a < b < 0$ 时, 也有 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 当 $a < 0$ 而 $b > 0$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 。

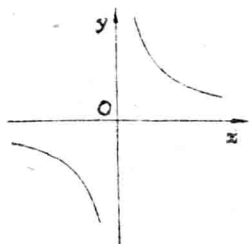


图 1-3

[例 3] 解不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$ 。

解: 我们可以引入函数 $y = \sqrt{2x+5}$ 和 $y = x+1$, 如图 1-4 对于相同的自变量 x , 当函数 $y = \sqrt{2x+5}$ 的图象上的点高于 $y = x+1$ 的图象上的点时, 这样的自变量 x 的集合就是不等式的解。

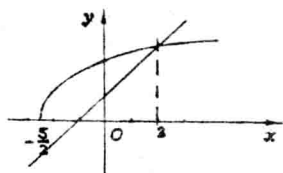


图 1-4

容易解出两曲线交点横坐标为 2, 于是得出不等式的解集为

$$\{x | -\frac{5}{2} \leq x < 2\}.$$

由以上例子可以看出,利用函数的观点,可以使我们对这些问题的分析更深刻、更透彻。

(二) 方程的观点: 从分析已知量与未知量构成的等量关系入手,用数学表达式将其表达出来,再通过解方程的手段使问题获解的思维方法称为方程的观点。通过下面的例子让我们来体会如何运用方程的观点解题。

[例 4] 已知 $\lg 24 = a, \lg 18 = b$, 用 a, b 表示 $\log_5 1.5$

解: 考虑到 $\log_5 1.5 = \frac{\lg 1.5}{\lg 5} = \frac{\lg 3 - \lg 2}{1 - \lg 2}$, 而 $\lg 24 = 3\lg 2 + \lg 3$, $\lg 18 = \lg 2 + 2\lg 3$, 将其联立得 $\begin{cases} 3\lg 2 + \lg 3 = a \\ \lg 2 + 2\lg 3 = b \end{cases}$, 可以解得 $\lg 2 = \frac{2a-b}{5}, \lg 3 = \frac{3b-a}{5}$ 。于是可得 $\log_5 1.5 = \frac{4b-3a}{5-2a+b}$ 。

从这道题的解题过程中可以看出,由于可以将 $\log_5 1.5$ 用 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 表示,又从已知条件中得出关于 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 为未知数的方程组,这样把 $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 解出来,使问题得以解决。

[例 5] 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 定义域都是 $\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq \pm 1\}$ 又 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析表达式。

解: 显然又有 $f(-x) + g(-x) = \frac{1}{-x-1}$, 由 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数又得 $f(x) - g(x) = -\frac{1}{x+1}$ 于是可得
$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1} \\ f(x) - g(x) = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$
, 这就建立了以 $f(x), g(x)$ 为未知数的二

元一次方程组,于是可以解得 $f(x) = \frac{1}{x^2-1}, g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ 。

[例 6] 求点 $(1, 2)$ 关于直线 $x+y+1=0$ 对称的点的坐标。

解: 设所求点的坐标为 (x_0, y_0) , 要解出 x_0, y_0 两个字母, 把它们看成两个未知数, 就要两个独立的条件, 建立一个二元方程组。由这个想法和“对称”的几何意义可得 $\frac{y_0-2}{x_0-1} = 1$, 即两点连线与直线 $x+y+1=0$ 垂直。又 $(1, 2)$ 与 (x_0, y_0) 的中点 $\left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{y_0+2}{2}\right)$ 在直线 $x+y+1=0$ 上可得 $\frac{x_0+1}{2} + \frac{y_0+2}{2} + 1 = 0$ 。将它们整理后联立可得二元一次方程组 $\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0 + y_0 + 5 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$, 即所求点坐标为 $(-3, -2)$ 。

(三) 参数的观点: 为了揭示所研究的变量之间的内在联系, 利用参数为媒介、揭示变量之间的联系和变化规律的思维方法称为参数的观点。看下面例题。

[例 7] 已知过点 $P(3, 2)$ 的直线与 x, y 轴的正半轴都相交, 求直线与坐标轴所围成的三角形面积的最小值。

解: 如图 1-5 设 $\angle OAB = \theta$ 为参数, 则有 $|OA| = |OM| + |MA| = 3 + \frac{2}{\tan \theta}$, $|OB| = |ON| + |NB| = 2 + 3 \tan \theta$, 于是三角形的面积 $S = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \left(12 + 9 \tan \theta + \frac{4}{\tan \theta} \right)$, 注意到 θ 是锐角, 有 $9 \tan \theta + \frac{4}{\tan \theta} \geq 12$, 当 $\tan \theta = \frac{2}{3}$

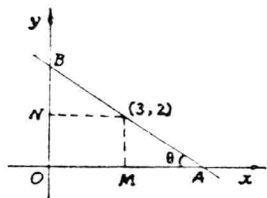


图 1-5

即 $9\tan\theta=\frac{4}{\tan\theta}$ 时, 等号成立, 这时三角形面积有最小值 $\frac{1}{2}(12+12)=12$ 。

[例 8] 求函数 $y=|\sin x|-\sqrt{3}|\cos x|$ 的值域。

解: 引入参数 $\theta\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$, 可使 $|\sin x|=\sin\theta$ 、 $|\cos x|=\cos\theta$, 于是使所给函数式化为 $y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ 形式, 这有利于把它化为基本形 $y=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 。由 $-\frac{\pi}{3}\leq\theta-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{6}$ 可知 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$, 可见所求函数值域为 $y\in[-\sqrt{3}, 1]$ 。

[例 9] 已知实数 a, b, c, d 使 $a^2+b^2=1, c^2+d^2=4$, 求证 $|abcd|\leq 1$ 。

证明: 题中有四个字母, 由题目条件, 引入参数 α, β , 使 $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, \frac{c}{2}=\sin\beta, \frac{d}{2}=\cos\beta$, 使四个字母仅由两个字母 α, β 表示, 并蕴含了题目条件。于是有

$|abcd|=|4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta|=|\sin 2\alpha|\cdot|\sin 2\beta|\leq 1$, 问题得证。

以上几个观点在揭示事物之间的内在联系, 发现事物的变化规律上起着重要的作用, 如果我们注意领会运用这些观点, 对提高思维能力会有很大帮助。

第三节 要充分发挥直观形象的作用

对抽象的“数”的研究与对直观的“形”的研究, 它们之间的关系既是对立的又是统一的。人们不但惯于把“形”的研究转化成“数”的研究, 而且在“数”的研究中也经常用“形”来描绘, 这样就可