■ 大学公共数学系列教材

概率论与数理统计辅导

GAILü LUN YU SHULI TONGJI FUDAO

金义明 主 编
李剑秋 卢俊峰 丁嘉华 马 骊 副主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

大学公共数学系列教材

概率论与数理统计辅导

主　编　金义明

副主编　李剑秋　卢俊峰

　　　　丁嘉华　马　骊

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导 / 金义明主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5178-0520-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 138062 号

概率论与数理统计辅导

金义明 主编

责任编辑 王玲娜 刘 韵

封面设计 王妤驰

责任印制 包建辉

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail:zjgsupress@163.com)

(网址:http://www.zjgsupress.com)

电话:0571－88904980,88831806(传真)

排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司

印　　刷 浙江云广印业股份有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 11.25

字　　数 233 千

版 印 次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5178-0520-5

定　　价 28.00 元

前　言

概率论与数理统计是高等学校经济类和理工类各专业的重要基础课，它是研究随机现象的一门数学学科，具有很强的理论性和应用性。为帮助学生掌握这门课程的主要内容和基本方法，补充教材内容之不足，适当强化解题技能训练，我们编写了本书，以供学习辅导及备考应试之参考。

本书是浙江工商大学出版社出版的《概率论与数理统计》教材的配套教材，可作为文科（经管类）大学生学习《概率论与数理统计》课程的参考书。全书分为八章，每章按照内容提要、例题解析和练习题三个部分组成。内容提要比较详细地总结了各章节的定义、重要定理和公式。例题解析对各章节重点题型作了归纳和总结，精选各类典型例题，力求解释详尽，侧重分析，并通过一题多解的讲解，帮助学生提高综合分析能力和解题能力。部分例题综合性强，有一定的难度和深度，对考研复习有很好的参考价值。练习题是教材练习题的一个很好的补充，可以作为考查学生是否掌握该章节知识的基本试题内容，书后给出了全部练习题的答案。

本书最后精选了五套模拟试卷，并附上详细解答，可以检测学生是否全面掌握知识要点和解题能力，有效地提高学生的应试能力。

本书由浙江工商大学杭州商学院五位老师合作完成，其中第一、二、三章由金义明编写；第四章由李剑秋编写；第五章和第八章由丁嘉华编写；第六章由马骊编写；第七章由卢俊峰编写；最后由金义明统一修改定稿。

本书的编写得到浙江工商大学出版社和浙江工商大学杭州商学院的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编　者
于浙江工商大学
2014 年 5 月

目　录
CONTENTS

第一章　随机事件及其概率

§1.1　内容提要

一、预备知识

1. 两个基本原理

(1) 加法原理

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

(2) 乘法原理

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法.

2. 排列

(1) 排列和排列数

从 n 个不同元素中，任取 m 个($m\leqslant n$)不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 所有这样的排列数共有 $P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 种.

(2) 可重复元素的排列

从 n 个不同元素中取出 m 个元素(元素可以重复)，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重复元素的排列. 所有这样的可重复排列数共有 n^m 种.

3. 组合

(1) 组合和组合数

从 n 个不同元素中，任取 m 个($m\leqslant n$)不同元素，不计顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 这样不同的组合数共有 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 种.

(2) 组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

二、随机现象、随机试验、随机事件

1. 随机现象

在一定条件下,可能发生也可能不发生的现象称为随机现象.

随机现象仅就一次观察呈现不确定性,但在大量重复试验中,具有某种统计规律性.

2. 随机试验

对随机现象进行的观察称为随机试验.

随机试验具有以下特征:

① 重复性　试验在相同的条件下可重复进行;

② 明确性　每次试验结果不止一个,并事先明确所有可能的结果;

③ 随机性　每次试验前,不能预知出现的可能结果.

3. 随机事件

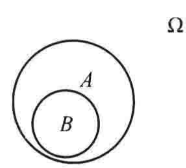
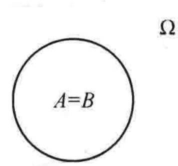
① 基本事件和样本空间　随机试验的每一个可能结果称为基本事件或称为样本点,所有基本事件构成的集合称为样本空间,记作 Ω.

② 随机事件　由样本空间中某些样本点所成的集合即样本空间的子集,简称事件. 事件 A 发生,当且仅当 A 所包含的一个样本点出现. 特别地,样本空间 Ω 称为必然事件,空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

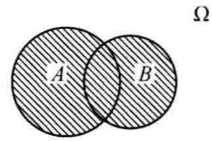
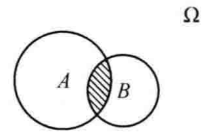
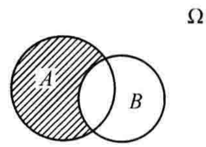
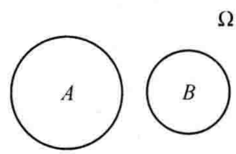
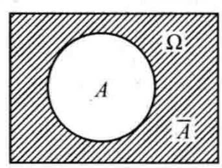
4. 事件间的关系与运算

(1) 事件间的关系与运算,如表 1-1 所示.

表 1-1　事件的运算及关系图表

运算或关系名称	记　号	定　义	文 氏 图
A 包含 B (包含关系)	$A \supset B$ 或 $B \subset A$	事件 B 的发生,必然导致事件 A 的发生	
A、B 相等 (相等关系)	$A = B$	A、B 相互包含	

续表

运算或关系名称	记　号	定　义	文氏图
和事件 (加法运算)	$A \cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生 (A 或 B 发生)	
积事件 (乘法运算)	AB	事件 A 与 B 同时发生(A 且 B 发生)	
差事件 (减法运算)	$A-B$	事件 A 发生,但事件 B 不发生	
互不相容 (互斥关系)	$AB=\varnothing$	事件 A 和 B 不能同时发生	
对立事件 (互逆关系)	$\overline{A}$ $A+\overline{A}=\Omega$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$	A、$\overline{A}$ 两事件中必有一个发生,但不能同时发生	

(2) 完备事件组

如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,满足:

① 两两互不相容(互不相容性),

② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$(完备性),

则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组.

(3) 运算性质

① 交换律　$A\cup B=B\cup A;AB=BA$.

② 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;A(BC)=(AB)C$.

③ 分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C);A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$.

④ 对偶律(德·摩根律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$;$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

一般地,$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

三、概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 S,对于 E 的每一个事件 A 对应一个数 $P(A)$,$P(A)$ 称为 A 的概率,如果满足下面三条公理:

(1)(非负性) $P(A)\geqslant 0$;

(2)(规范性) $P(\Omega)=1$;

(3)(可列可加性) 对于任意可列个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

四、古典概型和几何概型

1. 古典概型

(1)古典概型的特点

古典概型具有以下特点:

① 所有可能的试验结果只有有限个,即试验的基本事件个数有限;

② 试验中每个基本事件发生的可能性相等.

并称满足上述条件的事件组为等概基本事件组.

(2)概率的古典定义

在古典概型中,设基本事件总数为 n,事件 A 包含的基本事件数为 $m(m\leqslant n)$,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}.$$

2. 几何概型

设平面(或直线、空间)上有一区域 Ω,区域 $A\subset\Omega$,在区域 Ω 内任意投掷一点,假设该点落在任意一点处都是等可能的,并且落在区域 Ω 的任何部分 A 内的概率,只与这部分的面积(或长度、体积)成正比例,而与其位置与形状无关.

在几何概型中,在区域 Ω 内任意投掷一点,而落在区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}.$$

这里,$L(A)$ 与 $L(\Omega)$ 表示平面上相应区域的面积(或直线上区间的长度,空间区域的体积).

五、概率的计算

1. 概率的基本运算公式

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$；

(4) $$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

2. 概率的乘法公式

(1) 条件概率

设 A,B 为两事件,且 $P(A)>0$,在事件 A 已发生的条件下,事件 B 发生的概率称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率,记作 $P(B\mid A)$.

(2) 概率的乘法公式

若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$；

若 $P(AB)>0$,则 $P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$；

一般地,若 $P(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i)>0$, 则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(3) 事件的相互独立性

① 对于任意事件 A,B, 若 $P(A)>0$, 有 $P(B\mid A)=P(B)$ 成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

② 事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

③ 若事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

3. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

(1) 全概率公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任意事件 B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

(2) 贝叶斯公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任一具有正概率的事件 B,有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

§1.2 例题解析

例 1 设 A,B,C 表示三个随机事件，试用事件的运算表示下列随机事件.

(1) A 发生而 B,C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) 三个事件都发生；

(4) 三个事件至少有一个发生；

(5) 三个事件至少有两个发生；

(6) 三个事件都不发生；

(7) 不多于一个发生；

(8) 不多于两个发生；

(9) 恰有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $(A-B)-C$ 或 $A-(B \cup C)$；

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

(3) ABC；

(4) $A \cup B \cup C$；

(5) $AB \cup BC \cup CA$；

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$；

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$；

(8) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$；

(9) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

注 复合事件常用“恰有”“只有”“至多”“至少”“都发生”“都不发生”“不都发生”等词来描述，为了准确地用一些简单事件的运算来表示出复合事件，必须弄清楚这些概念的含义. 随机事件可以根据定义直接表示出来，也可以用其逆事件的逆事件来表示. 如(4)和(6)是互逆事件，因此(6)可以用 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示，也可以用 $\overline{A \cup B \cup C}$ 表示. 在(9)中“恰有两个发生”的含义是若有两个事件发生，则第三个事件就不能发生，因此与(5)有区别，可以用 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$ 表示，也可以用 $AB \cup BC \cup AC - ABC$ 来表示. 在一些情况下，需要将事件表示成互不相容事件的并，这样在计算概率时会容易些.

例 2 对于任意两个事件 A 和 B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是(　　).

(A) $A \subset B$　　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$　　(C) $A\overline{B} = \varnothing$　　(D) $\overline{A}B = \varnothing$

解 由于 $A \cup B = B$,即 $A \subset B$,故 $\overline{A}B = \varnothing$ 不一定成立,应选(D).

例 3 对任意事件 A,B, 下列命题(　　)是正确的.

(A) 如果 A,B 互不相容,则 $\overline{A}$, $\overline{B}$ 也互不相容

(B) 如果 A,B 相容,则 $\overline{A},\overline{B}$ 也相容

(C) 如果 $\overline{A},\overline{B}$ 互不相容,则 $A \cup B = \Omega$

(D) 如果 $AB = A$, 则 $A \cup B = A$

解 若 $\overline{A}\overline{B} = \varnothing$, 则由德·摩根律可得 $A \cup B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{\varnothing} = \Omega$. 应选(C).

例 4 若事件 A 和 B 同时发生,则事件 C 一定不发生,试证明:

(1) $A\overline{B}C \cup \overline{A}C = C$;

(2) $(AB - C) \cup (A \cup B - B) = A$.

证明 (1)按题意有 $ABC = \varnothing$, 故

$$A\overline{B}C \cup \overline{A}C = A\overline{B}C \cup ABC \cup \overline{A}C = AC(\overline{B} \cup B) \cup \overline{A}C$$
$$= AC \cup \overline{A}C = (A \cup \overline{A})C = C.$$

(2) 按题意有 $AB \subset \overline{C}$, 故 $AB\overline{C} = AB$, 从而 $AB - C = AB\overline{C} = AB$;

另一方面, $A \cup B - B = (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B} \cup B\overline{B} = A\overline{B}$.

所以 $(AB - C) \cup (A \cup B - B) = AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A$.

注 在事件运算时, $A - B$ 通常改写为 $A\overline{B}$, 便于交、并运算.

例 5 "事件 A,B,C 两两互斥"与"$ABC = \varnothing$"是不是一回事? 并说明它们的联系.

解 不是一回事.

"两两互斥"指 A,B,C 三事件中任意两个事件不能同时发生,如图 1-1 所示,即 $AB = \varnothing$, $AC = \varnothing$, $BC = \varnothing$ 同时成立.

"$ABC=\varnothing$"指 A,B,C 三事件不能同时发生,如图 1-2 所示.

它们的联系是:"两两互斥"$\Rightarrow$"$ABC=\varnothing$",反之则未必成立.

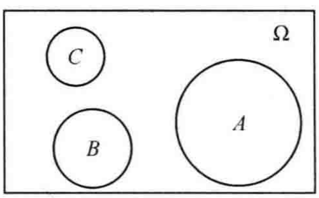


图 1-1 A,B,C 两两互斥

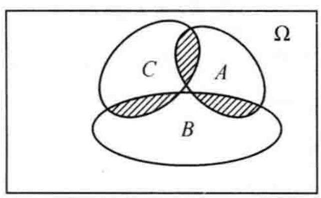


图 1-2 $ABC=\varnothing$

注 明确"两两互斥"与"$ABC=\varnothing$"的区别与联系,有利于正确把握有关运算. 例如,三个事件的加法公式 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$, 只有在 A,B,C 两两互斥条件下,才能简化成 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$, 若仅有 $ABC = \varnothing$ 成立,则 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$P(AB)-P(AC)-P(BC)$.

例 6 花园新村有 20%成年人订阅都市快报,16%成年人订阅钱江晚报,8%成年人同时订阅两种报.在花园新村成年人中随机选一人,问此人至少订阅两报之一的概率多大?

解 记 A="订阅都市快报",B="订阅钱江晚报",则

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.2+0.16-0.08=0.28.$

例 7 袋中有 10 个球,6 个白球,4 个红球.假设每个球被取出是等可能的,现随机地取出 3 个,试求取出 k 个红球的概率 $(0\leqslant k\leqslant 3)$.

解 将球编号,记 6 个白球依次为 1~6,4 个红球为 7~10.假设每个球等可能被取出,这等价于从 10 个号码中任取 3 个,不计次序的每一种取法是等可能的.因而若每次随机的取出 3 个,只观察其号码,不计其次序,则一个样本点等价于从 10 个号码中取其 3,不计次序的一种组合.故样本点数 $\mu(\Omega)=C_{10}^{3}$.记 $A_k=\{$取 3 个,取出 k 个红球$\}(0\leqslant k\leqslant 3)$.显然,$A_k$ 发生,当且仅当 3 个球中,需从 7~10 号中取出 $k(0\leqslant k\leqslant 3)$个,且从 1~6 号中取出$(3-k)$个.由乘法原理有:$\mu(A_k)=C_4^kC_6^{3-k}(0\leqslant k\leqslant 3)$,得 $P(A_k)=C_4^kC_6^{3-k}/C_{10}^{3}$.

注 (1)解该题时将球编号,目的是使建立的样本空间中的每一个样本点的出现是等可能的.倘若此题中球不加编号,那么在题设的条件下,随机取出 3 个,仅观察取到红球的个数.此时相应建立的(即解题者所设想的)样本空间为 $\Omega=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$.显然这个样本空间的每个样本点 A_0,A_1,A_2,A_3 不是等可能的.这时,如硬要套用古典概型的定义来求解就会发生错误.(2)对于"等可能"的确切含义,要依据具体的题设条件给予确切的理解与描述.这是能否正确解决古典概型问题的关键之一,务请初学者倍加注意.

例 8 n 个人抽签分配 n 张彩票,设 n 张彩票中有 m 张有奖彩票$(1\leqslant m\leqslant n)$.假设每人抽到每一张彩票是等可能的,试求第 k 个人$(1\leqslant k\leqslant n)$抽到有奖彩票的概率.

解法 1 记 $A_k=\{$第 k 个人抽到有奖彩票$\}(1\leqslant k\leqslant n)$.为求 $P(A_k)$,设想将彩票编号 $1\sim n$,试验只观察第 k 个人抽彩票的结果.建立样本空间 Ω 如下:Ω 中的一个样本点对应于从 $1\sim n$ 张彩票中取出一张.显然,$\mu(\Omega)=n,\mu(A_k)=m$,故

$$P(A_k)=\frac{m}{n},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

由上知,$P(A_k)$ 与 k 无关.

解法 2 记 $A_k=\{$第 k 个人抽到有奖彩票$\}(1\leqslant k\leqslant n)$.为求 $P(A_k)$,设想将彩票编号 $1\sim n$,试验只观察第 k 个人抽彩票的结果.建立样本空间 Ω 如下:Ω 中的一个样本点对应于把 n 张彩票的一个排列.显然,$\mu(\Omega)=n!,\mu(A_k)=C_m^1\times(n-1)!$(即先从 m 张有奖彩票中取出一张排在第 k 个位置,再把剩下的 $n-1$ 张彩票排列在其余位置).故

$$P(A_k)=\frac{m\times(n-1)!}{n!}=\frac{m}{n},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

解法 3　记 $A_k=\{$第 k 个人抽到有奖彩票$\}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 为求 $P(A_k)$，不对彩票编号，作连续 n 次抽签，则抽签结果总数为从 n 个位置中选取 m 个位置放置彩票的组合数 C_n^m，而事件 A_k 的有利场合数为第 k 个位置放置一张有奖彩票，再在其余 $n-1$ 个位置中选出 $m-1$ 个位置放置有奖彩票的组合数 C_{n-1}^{m-1}. 故

$$P(A_k)=\frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m}=\frac{m}{n},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

以上结果表明，抽到有奖彩票的概率与抽签次序无关，这正是人们直观上感到抽签分配是“公平”的理论解释.

分析　本例告诉我们，在古典概型的求概率问题中可以用不同的随机试验模型，即可以用排列运算，也可以用组合运算. 一般在求基本事件总数和所求事件所含的样本点数应该用同样的运算，否则极易出错.

例 9　箱中有 a 个白球，b 个红球，采用有放回和无放回两种抽样方式从中取出 $n(n\leqslant a+b)$ 个球. 求恰有 k $(0\leqslant k\leqslant n)$ 个红球的概率各是多少？

解　由于抽样方式不同，即随机试验不同，故须分别讨论.

(1) 有放回抽样. 此时，抽取 n 个的一种取法对应于从 $(a+b)$ 个元素中取 n 个的可重复排列的一种，故 $\mu(\Omega)=(a+b)^n$；令 $A=\{$抽出的 n 个中恰有 k 个红球$\}$，则 $\mu(A)=C_n^k b^k a^{n-k}(0\leqslant k\leqslant n)$，故

$$P(A)=C_n^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}.$$

(2) 无放回抽样. 抽取 n 个球，不考虑其次序. 此时，Ω 中每一样本点对应于从 $(a+b)$ 个元素中取出 n 个的一种组合，故 $\mu(\Omega)=C_{a+b}^n$，而恰有 k 个红球要求 $0\leqslant k\leqslant b$，有 $\mu(A)=C_b^kC_a^{n-k}(0\leqslant k\leqslant b,1\leqslant n\leqslant a+b)$，故

$$P(A)=\frac{C_b^kC_a^{n-k}}{C_{a+b}^n},\ 0\leqslant k\leqslant b,\ 1\leqslant n\leqslant a+b.$$

例 10　100 件外形完全相同的产品，其中 40 件为一等品，60 件为二等品，设 A:“从 100 件产品中任取一件，连续抽取三次，所得三件均为一等品”. 试求在下列两种情况下事件 A 的概率：

(1) 每次取出一件，经测试后放回，再继续抽取下一件(有放回抽样)；

(2) 每次取出一件，经测试后不放回，在余下的产品中继续抽取下一件(无放回抽样).

解　(1) 有放回抽样的每次抽取都是在相同的条件下进行，这是一个重复排列问题，故随机试验的基本事件总数 $n=100^3$. 事件 A 要求所抽取的三次均是一等品，故事件 A

所包含的基本事件数 $m=40^3$. 依概率的古典定义,有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{40^3}{100^3}=0.064.$$

(2) 无放回抽样的第一件是在 100 件中抽取的,第二件是在余下的 99 件中抽取的,第三件是在余下的 98 件中抽取的,所以这是选排列问题,基本事件总数为 $n=P_{100}^3$. 事件 A 包含的基本事件数则是在 40 件一等品中任取三件的排列数,即 $m=P_{40}^3$. 依古典定义,有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{P_{40}^3}{P_{100}^3}=0.061.$$

注 此例是产品的随机抽样问题(即摸球问题),它与下面例题中的分球入盒问题(即分房问题)和随机取数问题是古典概型的三大典型问题. 掌握典型问题的解法有助于举一反三,触类旁通,提高解题的能力.

例 11 设有 n 个人,每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住 $(n\leqslant N)$,求下列事件的概率:

(1) 指定的 n 间房间里各有一人住;

(2) 恰有 n 间房各有一人;

(3) 某一指定的房中恰有 m 个人 $(m\leqslant n)$.

解 设随机试验为"把每个人随机分配到 N 个间房中任一间",据此建立样本空间 Ω. 由于每一人分到 N 个房间中有 N 种分法,由乘法原理: $\mu(\Omega)=N^n$.

设 $A=\{$指定的 n 间房里各有一人住$\}$,$B=\{$恰有 n 间房各有一人$\}$,$C=\{$某一指定的房中恰有 m 个人$\}$.

(1) 若固定某 n 个间房且每间一人,第一人可分配到其中任一间,有 n 种分法,第二人可分配到余下 $n-1$ 间中任一间,有 $n-1$ 种分法,…,故 $\mu(A)=n!$,所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 间房可以从 N 间中任意选取,有 C_N^n 种方法,而 n 个人分配到 n 间房,并且每间房只有一人,有 $n!$ 种分法,故 $\mu(B)=C_N^n\cdot n!$,所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3) 事件 C 中的 m 个人可自 n 个人中任意选出,故有 C_n^m 种选法,其余 $(n-m)$ 个人可任意分配到剩下的 $N-1$ 间房里,共有 $(N-1)^{n-m}$ 种分法,故有 $\mu(C)=C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$,所以

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}.$$

注 此题是分房问题. 在这类问题中,人与房子都是有其特性的. 处理实际问题时,

要弄清什么是“人”，什么是“房”，一般不可颠倒. 常遇到的分房问题，有 n 个人的生日问题，n 封信装入 n 个信封问题(配对问题)，掷 n 个骰子问题. 分房问题有时也叫球在盒中的分布问题(如果把人看成球). 这类问题在现代统计物理学中有重要的应用.

例 12　在 $0,1,2,\cdots,9$ 中依次取出 4 个数排列在一起，能组成 4 位偶数的概率为多少?

解　设样本空间 $\Omega=\{abcd \mid 0\leqslant a,b,c,d\leqslant 9$ 且 a,b,c,d 互不相等$\}$，则 Ω 中样本点总数为 $n=P_{10}^4=5\ 040$.

再来计算构成的 4 位偶数的个数为 $P_9^3C_5^1-P_8^2C_4^1=2\ 520-224=2\ 296$，从而所求概率 $p=\dfrac{2\ 296}{5\ 040}=0.46$.

注　此问题是随机取数问题. 四位偶数的构成可以这样来考虑，在个位上任取一个偶数，则有 C_5^1 种取法，而千、百、十位上由剩下的 9 个数中任取 3 个排列，共有 P_9^3 种排法. 但当 0 排在千位上时不能构成 4 位数，因此要去掉 0 排在千位上的偶数的数目，共有 $P_8^2C_4^1$ 种.

例 13　从一副扑克牌 52 张中任取 5 张，求下列事件的概率：

(1) 5 张牌有同一花色；

(2) 3 张牌有同一个点数，另 2 张牌也有相同的另一个点数；

(3) 5 张牌中有 2 个不同的对(没有 3 张牌点数相同)；

(4) 有 4 张牌点数相同.

解　从 52 张牌中取 5 张，基本事件总数是 C_{52}^5.

(1) 可设想为先从 4 种花色中取出一种，再从这花色的 13 张牌中取出 5 张牌，因此“5 张牌有同一花色”的概率为

$$\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{166\ 600}=0.001\ 98.$$

(2) 可设想为先从 13 种点数中取出一种，再从有这一点数的 4 张牌中取 3 张，然后从余下的 12 种点数中再取一种，并从这一点数的 4 张牌中取 2 张，因此“3 张牌有同一点数，另 2 张牌也有相同的另一个点数”的概率为

$$\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{6}{4\ 165}=0.001\ 44.$$

(3) 可设想为先从 13 种点数中取出 2 种，再从有这 2 种点数的各 4 张牌中各取 2 张，然后从余下的 44 张牌中取出 1 张，因此“5 张牌中有 2 个不同的对(没有 3 张牌点数相同)”的概率为

$$\frac{C_{13}^2C_4^2C_4^2C_{44}^1}{C_{52}^5}=\frac{198}{4\ 165}=0.047\ 54.$$