普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主编 陈君 丁勇

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二

线性代数

主编 陈 君 丁 勇

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书按照国家教育部制定的高校“线性代数教学基本要求”编写，反映了当前独立院校培养高素质实用型人才数学课程设置的发展趋势及教学理念. 全书共分 5 章，内容包括：行列式，矩阵，向量组的线性相关性，线性方程组，特征值、特征向量及矩阵的对角化. 每章配有习题及答案，供读者参考. 本书可作为独立院校本、专科工科类和经济管理类大学生各专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陈君，丁勇主编. -- 上海：同济大学出版社，2013. 7

ISBN 978-7-5608-5192-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陈…②丁… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 139706 号

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主编 陈 君 丁 勇

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 同济大学印刷厂
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 10. 5
字　　数 210 000
版　　次 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5608-5192-1

定　　价 23. 00 元

前　言

“线性代数”是高等院校一门重要的基础数学课程，它广泛应用于科学研究、工程技术和国民经济等各个领域．我国的高等院校中，独立学院、高职高专学生占了大学生总数的很大一部分比例，同时，线性代数的课时比较少，这对线性代数的教学提出了更高的要求．因此，我们针对独立院校、高职高专类应用型线性代数教材，以满足高等教育改革形势，就显得更加紧迫．

本书力求体现独立院校的教学特点，贯彻“少而精，广而易懂”、“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，结构紧凑，简明清晰；深入浅出，通俗易懂．全书内容编排上注重由浅入深，强调基本概念及各个概念之间的固有联系，强调数学的基本方法，并将抽象内容与具体例子结合，对基本概念和定理的实际应用进行介绍，实用性很强．对于书中标有“*”号的内容，专科层次的教学可以不作要求，本科层次的教学可以根据需要选用．

本书由陈君负责制定编写大纲，全书共分五章，第一章由陈里编写，第二、四章由丁勇编写，第三章由陈君编写，第五章由赵跃辉编写．全书由陈君、丁勇统稿、定稿．每章后有复习题，并给出了答案及部分提示．

本书的编写得到了武汉工程大学邮电与信息工程学院领导的大力支持，谨此表示诚挚而衷心的感谢！

由于我们编写水平有限，书中难免有不妥或错误之处，敬请读者批评指正．

编　者

2013年6月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是一种特定的算式，它是研究线性代数的一个基本工具，同时它在数学的各个领域及其他各学科也有着广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法等内容. 此外还介绍用 n 阶行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　行列式的概念

一、二阶与三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出的. 例如，对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

可以发现，如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则式(1.2)可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

从而,二元线性方程组的解就简洁明了了.

定义 1　由 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} 四个数构成的二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的**二阶行列式**,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中,数 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} 叫做行列式的**元素**,横排叫做行,竖排叫做列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 叫做**列标**,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义,可用图 1.1 来记忆.

把 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为**主对角线**,a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为**副对角线**,于是二阶行列式的值便是主对角线上的二元素之积减去副对角线上两元素之积的差. 这一计算行列式的方法称为对角线法则.

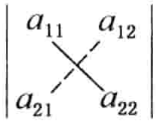

图 1.1

例 1.1　用行列式求解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2=3, \\ x_1-2x_2=4. \end{cases}$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-10,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=5,$$

所以,方程组的解: $x_1=\dfrac{D_1}{D}=2$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1$.

注　从形式上看,这里的分母 D 是由该线性方程组的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},

a_{21}所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

定义 2 由 $3\times3=9$ 个数 a_{ij}（i，$j=1$，2，3）排成 3 行 3 列的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，其值定义为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{22}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的 3 个元素之积再冠以正负号，其运算的规律可用“对角线法则”（图 1.2）记忆：图中每一条实线上的 3 个元素的乘积带正号，而每一条虚线上的 3 个元素的乘积带负号，所得 6 项的代数和就是三阶行列式的值.

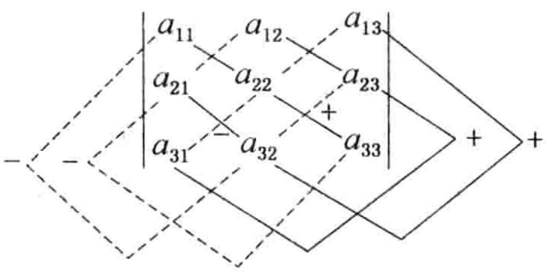

图 1.2

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则，得

$$D=1\times2\times1+1\times(-1)\times1+0\times3\times3-1\times2\times3-1\times3\times1-0\times(-1)\times1=-8.$$

需要注意的是，对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，对于四阶及更高阶的行列式不适用.

二、排列与逆序

定义 3 由正整数 1，2，…，n 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n 级排列，简称**排列**，记作$(i_1\ i_2\cdots\ i_n)$.

例如，(1234)和(4312)都是 4 级排列，(215463)是一个 6 级排列，而(1346)不是排列.

定义 4 在一个 n 级排列($i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$)中,若数 $i_s > i_t$,则称数 i_s 和 i_t 构成一个**逆序**. 在一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记作$Z(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义,可按如下方法计算排列的逆序数:设在一个 n 级排列($i_1 i_2 \cdots i_n$)中,所有比 i_t($t=1, 2, \cdots, n$)大且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个,则 i_t 的逆序数的个数为 t_i,而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$Z(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

例 1.3 计算排列(421365)的逆序数.

解 因为 4 排在首位,故其逆序的个数为 0.

在 2 的前面比 2 大的数有 1 个,故其逆序的个数为 1.

在 1 的前面比 1 大的数有 2 个,故其逆序的个数为 2.

在 3 的前面比 3 大的数有 1 个,故其逆序的个数为 1.

在 6 的前面比 6 大的数有 0 个,故其逆序的个数为 0.

在 5 的前面比 5 大的数有 1 个,故其逆序的个数为 1.

将上述结果排成如下形式:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{排列} & 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

因此,所求排列的逆序数为

$$Z(421365) = 0 + 1 + 2 + 1 + 0 + 1 = 5.$$

定义 5 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

三、n 阶行列式

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从上式可得如下结论:

(1) 三阶行列式共有 3! 项.

(2) 每项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积.

(3) 每项的符号取决于:当该项元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

故三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中,$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有的 3 级排列$(j_1j_2j_3)$求和.

由此,可以把行列式的定义推广到 n 阶行列式.

定义 6 由 n^2 个元素 a_{ij} (i, $j=1$, 2, …, n) 组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 **n 阶行列式**,其中横排称为**行**,竖排称为**列**,它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 各项的符号是:当该项各元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号;是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}.$$

其中,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为$\det(a_{ij})$或 $|a_{ij}|$,这里数 a_{ij} 称为行列式的元素,称$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项.

注意 (1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,且冠以正号的项和冠以负号的项(不包括元素本身所带的符号)各占一半,因此,行列式实质上是一种特殊定义的数;(2) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$(不包括元素本身所带的符号);(3) 一阶行列式$|a|=a$. 不要和绝对值记号相混淆.

例 1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 行列式一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，现考察不为零的项. a_{1j_1}取自第一行，但只有$a_{14}\neq0$，故只能取$j_1=4$；同理可得$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$. 即行列式不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(4321)}\times4\times3\times2\times1=24,$$

所以

$$D=24.$$

注 一般地，可得到

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

例 1.5 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中$a_{ii}\neq0(i=1, 2, \cdots, n)$.

解 行列式的一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项. 一般项中$a_{1j_1}$取自第一行，但只有$a_{11}\neq0$，故只可能取$j_1=1$，即$D$中只有含有$a_{11}$的那些项可能不为零，其他项均为零；一般项中$a_{2j_2}$取自第二行，第二行中有$a_{21}$和$a_{22}$不为零，因$a_{11}$已取自第一列，故$a_{2j_2}$不能再取自第一列，即不能取$a_{21}$，所以$a_{2j_2}$只能取$a_{22}$，从而$j_2=2$，即$D$中只有含有$a_{11}a_{22}$的那些项可能不为零，其他项均为零；以此类推，$j_3=3$，$j_4=4$，$\cdots$，$j_n=n$. D中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零，其他项均为

零. 由于$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,\cdots\,n)}a_{11}\,a_{22}\cdots\,a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,

可得
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理可得,上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

特殊情况:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$.

这种行列式称为对角行列式. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

三角形行列式及对角行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.

§1.2　行列式的性质

1.1 节中介绍了行列式的定义,但是我们发现,当行列式阶数 n 较大时,直接用定义计算行列式是较为烦琐的. 因此,本节由行列式的定义推导出一些性质,用以简化行列式的计算.

一、行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(证明略.)

由性质 1 可知:行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(证明略.)

注:交换 i, j 两行(列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1 若行列式中有两行(列)的对应元素,完全相同,则此行列式等于零.

证明 把相同的两行(列)互换,由于 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素,都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD_1.$$

证明 当第 i 行乘以数 k 后,行列式为

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = kD_1. \end{aligned}$$

注 第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_ik\,(c_ik)$.

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 15 & 9 \end{vmatrix}$，因为第二行与第三行对应元素成比例，根据推论 3，可直接得到

$$D=\begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 15 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.6 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} -10a_{11} & 5a_{12} & 20a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 4a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} -10a_{11} & 5a_{12} & 20a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 4a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} -2a_{11} & a_{12} & 4a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 4a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$

$$=5\times(-2)\times 4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-40.$$

性质 4 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和（如第 i 列的元素，都是两数之和），

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

证明
$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_1 j_1 \cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_1 j_1 \cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1+D_2. \end{aligned}$$

注 上述结果可以推广到有限个数和的情况.

性质 5 将行列式的某一列(行)的所有元素都乘以数 $k(k\in\mathbf{R})$ 后加到另一列(行)对应位置的元素上,那么行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由性质 4 和推论 3,即可证得.

注 以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记作 r_i+kr_j;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记作 c_i+kc_j.

二、行列式的计算

计算行列式时,常利用行列式的性质,将其化为三角形行列式来计算.

例 1.7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

注 化为三角形行列式的步骤为:若第一行第一个元素为0,先将第一行与其他行交换,使得第一行第一个元素不为0,然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使得第一列除第一个元素外其余元素全为0;再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式;如此继续下去,直至使它成为上三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解 注意到行列式中各行(列)4个数之和都为6,故可把第二,三,四行同时加到第一行,提出公因子6,然后各行分别减去第一行,将其化为上三角形行列式来计算:

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解 类似例1.8的解法,得到

$$D\xlongequal{C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$