普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专公共基础课规划教材

应用数学

方鸿珠 蔡承文 ◎ 主编

YING YONG SHU XUE

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
高职高专公共基础课规划教材

应用数学

主　编　方鸿珠　蔡承文
副主编　韩田君
参　编　金跃强　郑　丽
主　审　涂荣豹

机械工业出版社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，同时又是高职高专公共基础课规划教材。

全书共分十章，内容包括极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、微积分的应用、空间解析几何与复数、级数、拉普拉斯变换、矩阵及其应用、数学建模、MATLAB 上机实验。

本书可作为高职高专院校及各类成人高校的教学用书和参考读物，也可以作为自学教材供广大读者使用。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/方鸿珠，蔡承文主编. —北京：机械工业出版社，2007.5（2009.8 重印）

普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-21345-1

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①方…②蔡… Ⅲ. 应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 056113 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：李大国 版式设计：霍永明 责任校对：申春香
封面设计：王伟光 责任印制：邓 博
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2009 年 8 月第 1 版第 3 次印刷
169mm×239mm · 18 印张 · 349 千字
7 001—10 000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-21345-1
定价：22.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379541
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并结合高职高专教学的特点而编写的。本书紧密围绕高职高专院校的培养目标，在内容上体现了“以必需、够用为度”，以及“强化能力，立足应用”的原则。

全书共分十章，内容包括极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、微积分的应用、空间解析几何与复数、级数、拉普拉斯变换、矩阵及其应用、数学建模、MATLAB 上机实验。

本书具有以下特点：

1. 内容精简　本书的基础性知识紧贴高职的培养目标，遵循“有用、基本、能接受”的原则。在内容上注意了纵向联系，按专业所需，对高等数学、应用数学等内容进行了精心整合，同时精心设计了例题与习题，使例题与知识点对应、习题与例题对应，便于教学。所需学时较其他同类教材更少，适合于高职高专的技术应用型人才的使用。

2. 应用性强　书中知识是构建在对相应专业技术标准充分了解的基础上，舍弃了与专业学习关系不大的内容，如多元函数等内容，强调基础内容与专业所需的数学知识相结合，所以更具应用性。

3. 可读性强　针对社会对高职人才的需求及目标定位，本书力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”和少而精的原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少理论证明和繁杂的推导，概念的叙述简单明了、通俗易懂、便于理解、易于接受。每个章节都从案例入手，并注意渗透数学建模思想和方法，各章都有知识小结，在总结各章内容的基础上，强调了学习各章的重点和难点。

4. 针对性强　本书淡化了复杂的计算和变换的技巧，注重贯彻循序渐进的原则，知识点、例题、习题由易到难，对证明难度较大的定理或公式，着重于理解和使用。注重培养学生的基本运算能力和分析问题、解决问题能力。

参加本书编写的有南京工业职业技术学院方鸿珠、蔡承文、金跃强，邯郸职业技术学院韩田君、郑丽。本书由方鸿珠、蔡承文主编，由南京师范大学涂荣豹教授主审。在编写的过程中，得到了机械工业出版社的热情关怀和指导，在此一并致谢。

本书配有电子课件，可免费赠送给使用本书授课的教师。

由于编者水平有限，不妥之处再所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　极限与连续

函数的极限与连续是高等数学研究的理论基础. 本章在复习、加深和拓宽函数有关知识的基础上，介绍函数及其极限的概念，讨论函数的极限运算和连续性，为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　初等函数

1.1.1　函数的定义

设 D 为一个非空实数集合，对于数集 D 中的任意一个数 x，如果存在确定的对应法则 f，按照 f 都有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在集合 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, D 称为函数的**定义域**, $M=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

如果对于每一个 $x\in D$，都有且仅有一个 $y\in M$ 与之对应，则称这种函数为**单值函数**. 如果对于给定 $x\in D$，有多个 $y\in M$ 与之对应，则称这种函数为**多值函数**. 一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的. 本书中,若无特别的说明,则认为函数是单值的.

当 $x=x_0\in D$ 时,函数 $y=f(x)$ 对应的函数值记为 $f(x_0)$,即 $f(x_0)=f(x)\big|_{x=x_0}$.

例 1-1　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域,并求 $f(3)$, $f(t^2)$.

解　该函数的定义域应为满足不等式组 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$ 的 x 值的全体. 解此不等式组，得 $2<x\leqslant 3$. 故该函数的定义域为 $D=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}=(2,3]$；且

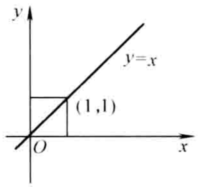
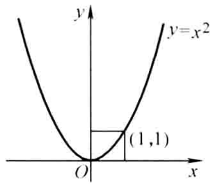
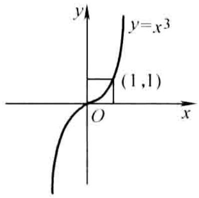
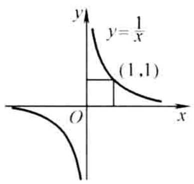
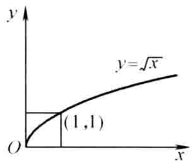
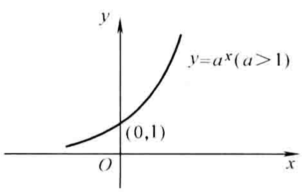
$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0$$

$$f(t^2)=\sqrt{3+2t^2-t^4}+\ln(t^2-2)$$

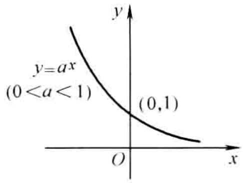
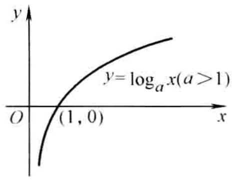
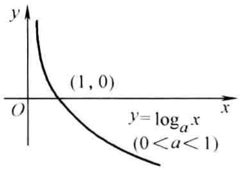
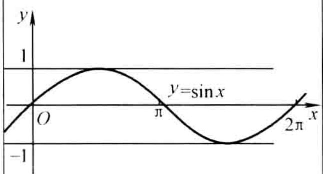
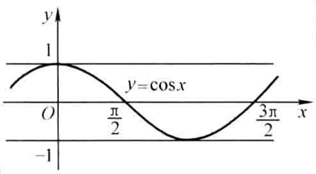
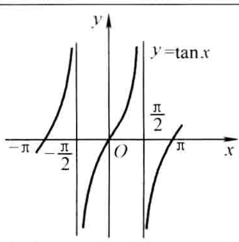
1.1.2　基本初等函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**. 为了便于应用，将它们的定义域、值域、图形及特性列于表 1-1 中.

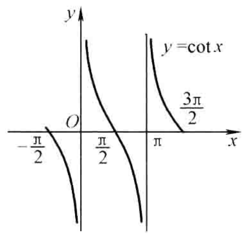
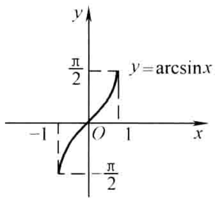
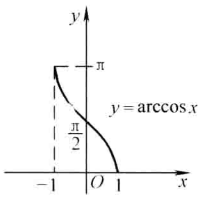
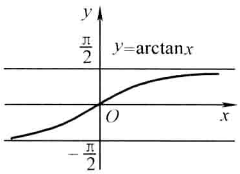
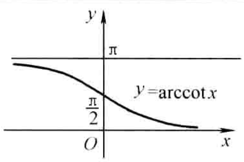
表 1-1

	函数	定义域与值域	图　　形	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup$ $(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup$ $(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加

（续）

	函数	定义域与值域	图形	特性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界， 在 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少，$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界， 在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加，$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π， 在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，$(k\in\mathbf{Z})$

（续）

	函数	定义域与值域	图　　形	特　　性
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π， 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，$(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.1.3　复合函数

如果函数 $y=F(u)$，其定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=F(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，记为 $y=F(\varphi(x))$. 其中变量 u 称为**中间变量**.

应当指出，并非任何两个函数都可构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 u

$=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $U_1=[-1,1]$,$u=2+x^2$ 的值域 $U_2=[2,+\infty)$,显然 $U_1\cap U_2=\varnothing$,所以不能复合.

对于复合函数,须弄清两个概念,那就是“复合”与“分解”. 所谓“复合”,就是把几个作为中间变量的函数复合成一个函数,该过程也就是把中间变量依次代入的过程;所谓“分解”,就是把一个复合函数分解为几个简单函数,而这些简单函数往往都是基本初等函数或是由基本初等函数与常数经过四则运算所得到的函数.

例 1-2 试将函数 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-x^2$ 复合成一个函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$,即得所求的复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,其定义域为 $[-1,1]$.

例 1-3 已知 $y=\ln u, u=\sin v, v=x^2+1$,试把 y 表示为 x 的函数.

解 将中间变量依次代入,$y=\ln u=\ln\sin v=\ln\sin(x^2+1)$,所得函数即为所求 .

例 1-4 指出函数 $y=\cos^2 x$ 是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\cos x$,则 $y=u^2$,所以 $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的.

例 1-5 指出函数 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\ln(\sin x+2^x)$,则 $y=\sqrt{u}$,再令 $v=\sin x+2^x$,则 $u=\ln v$. 所以 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$是由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v$ 和 $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

1.1.4 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成的,并且可以用一个数学式子表示的函数,称为**初等函数**.

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域 .

(1) $y=\sqrt{2-|x|}$; (2) $y=\ln\ln x$; (3) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2\end{cases}$;

(4) $y=f(\ln x)$,其中 $f(u)$的定义域为$(0,1)$.

2. 设 $f(x)=\arctan x$,求 $f(0), f(-1), f(x^2-1)$.

3. 设 $f(\sin x)=2-\cos 2x$,求 $f(\cos x)$.

4. 指出下列函数的复合过程 .

(1) $y=\cos x^2$; (2) $y=\sin^5 x$; (3) $y=\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(4) $y=e^{\cos 3x}$; (5) $y=5^{\ln(x^2+3)}$; (6) $y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

1.2 函数的极限

实例 圆的面积

我国魏晋时期的数学家刘徽,曾试图从圆内接正多边形出发来计算半径等于单位长度的圆的面积．他从圆内接正六边形开始,每次把边数加倍,直觉地意识到边数越多,内接正多边形的面积越接近于圆的面积．他曾正确地计算出圆内接正 3072 边形的面积,从而得到圆周率 π 的十分精确的结果 $\pi\approx3.1416$. 他的算法用现代数学来表达,就是

$$A\approx6\times2^{n-1}\times\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{6\times2^{n-1}}$$

式中,A 为半径等于 R 的圆面积,$6\times2^{n-1}$ 为按刘徽计算方法中正多边形的边数．

刘徽在其所著的"九章算术注"中曾说:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣．"然而这个结论并不正确．首先,按他的作法确实可以作出无穷多个正多边形,因此应该是永远地"可割"而非"不可割";其次,无论边数如何增加,毕竟还是多边形,绝不会"与圆周合体而无所失矣". 究其原因,是在他那个时代还未找到克服"有限"与"无限"这对矛盾的工具．因此他只能设想最后总有一个边数很多的正多边形与圆"合体",而把无限变化过程作为有限过程处理了．

从上面的例子可以看出圆的面积是客观存在的,但用初等数学知识是难以圆满地完成计算工作的．因此,不得不用一套完整的理论和方法来确定它们的真值．下面来逐步建立这套理论和方法．

1.2.1 数列的极限

上述"圆的面积"实例中的$\left\{6\times2^{n-1}\times\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{6\times2^{n-1}}\right\}$就是一个数列．对于数列的极限问题,我们给出如下定义:

当 n 无限增大时,如果数列$\{u_n\}$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称 A 为**数列$\{u_n\}$的极限**,或称**数列$\{u_n\}$收敛于 A**,记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \text{ 或 } u_n\to A(n\to\infty)\text{ 或当 } n\to\infty \text{ 时}, u_n\to A$$

极限存在的数列称为**收敛数列**,极限不存在的数列称为**发散数列**.

例如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在,也就是说,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛于 0,数列$\{n^2\}$发散.

1.2.2 函数的极限

函数极限概念是与求一些量的精确值有关的,它研究的是在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势. 下面就函数在两种不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论:

1) 当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大(记为 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限．

2）当自变量 x 无限接近于有限值 x_0（记为 $x \to x_0$）时，函数 $f(x)$ 的极限.

1. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

“$x \to \infty$”是指 $|x|$ 无限增大，它包含以下两种情况：

1）x 取正值，无限增大，记作 $x \to +\infty$.

2）x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x \to -\infty$.

当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为**当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad (\text{或} \lim_{x \to -\infty} f(x) = A)$$

当 $|x|$ 无限增大（即 $x \to \infty$）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在的**充要条件**是 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

例 1-6 讨论函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

例 1-7 讨论函数 $y = \arctan x$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在 .

2. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

与 $x \to \infty$ 的情形类似，“$x \to x_0$”表示 x 无限趋近于 x_0，它包含以下两种情况：

1）x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^+$.

2）x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^-$.

当 $x \to x_0^+$ 时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的右极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

当 $x \to x_0^-$ 时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的左极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

当 $x \to x_0$（$x \neq x_0$）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的**充要条件**是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

由定义易得 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$（$C$ 为常数）.

例 1-8 考察极限$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

解 作出函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的图形，如图 1-1 所示.

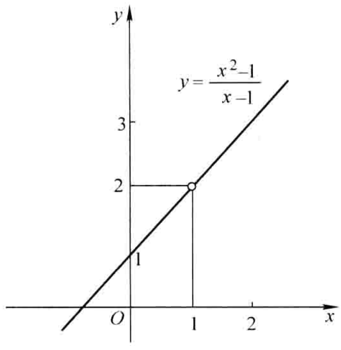


图 1-1

函数的定义域为$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，在 $x = 1$ 处函数没有定义. 但从图 1-1 可以看出，自变量 x 不论从大于 1 还是从小于 1 两个方向趋近于 1 时，函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的值都趋近于 2，所以$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

此例表明，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例 1-9 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, x \leqslant 1 \\ x, x > 1 \end{cases}$，求$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1$，$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$，即 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$，所以$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

此例表明，求分段函数在段点处的极限通常要分别考察其左右极限.

例 1-10 讨论函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，当 $x \to 0$ 时的极限.

解 当 $x > 0$ 时，$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$；当 $x < 0$ 时，$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$. 所以函数可以分段表示为 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，于是 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$，即 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在.

特别指出，本书中凡不标明自变量变化过程的极限号 lim，均表示变化过程适用于 $x \to x_0$，$x \to \infty$ 等所有情形.

习题 1-2

1. 判断下列说法是否正确？

（1）有界数列一定收敛；

（2）单调数列一定收敛；

（3）发散数列一定是无界数列；

(4) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处极限一定不存在；

(5) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 一定存在．

2. 当 $n\to\infty$ 时，观察下列数列的变化趋势，并写出它们的极限．

(1) $u_n=\dfrac{1}{2^n}$；　　(2) $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；

(3) $u_n=(-1)^n n$；　　(4) $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$.

3. 观察图形，求出下列函数的极限．

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\ln x$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

4. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$，当 $x\to1$ 时的极限不存在.

1.3　极限的运算

1.3.1　极限的运算法则

定理 1　如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$
$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0)$$

（证明从略）

推论 1　常数可以提到极限号前，即

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA\quad(C\text{ 为常数})$$

推论 2　如果 $\lim f(x)=A$，且 m 为自然数，那么

$$\lim[f(x)]^m=[\lim f(x)]^m=A^m$$

定理 2　设函数 $y=f(\varphi(x))$ 由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的附近任一点（除 x_0 外）有 $\varphi(x)\neq u_0$，又有 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，那么

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

例 1-11　计算 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x-3)$.