全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

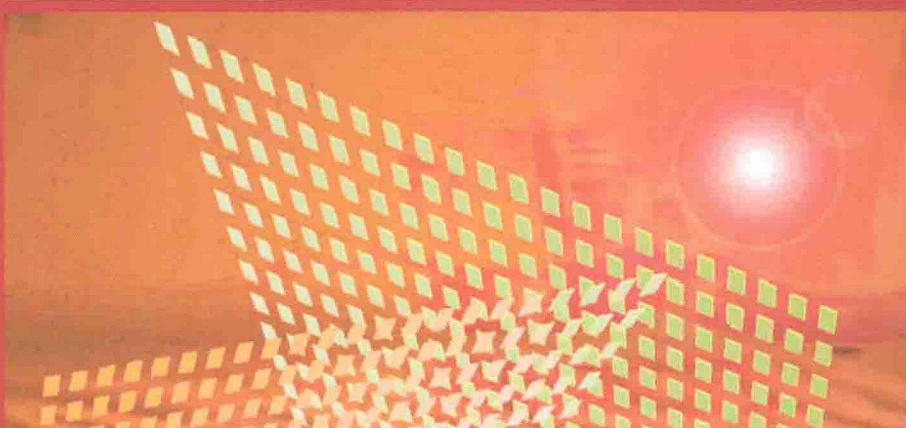
Б.П.吉米多维奇

数学分析习题精选精解 下

（第二版）

主编 张天德 路慧芹
主审 刘建亚 吴 臻

SHUXUE FENXI XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题精选精解 下

（第二版）

主　编　张天德　路慧芹
主　审　刘建亚　吴　臻
副主编　刘允欣　宋丽叶

SHUXUE FENXI XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题精选精解. 下 / 张天德，路慧芹主编.
—济南：山东科学技术出版社，2014
ISBN 978-7-5331-7325-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… ②路… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ. ①O17—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 082382 号

主　编　张天德　路慧芹

副主编　刘允欣　宋丽叶

编　委（以姓氏笔画为序）

王子峰　王　刚　王　玮　王明辉　王　颜　毛　凯　孔爱中
左进明　叶　宏　付吉美　吕洪波　朱鹏华　乔　凤　刘长文
李亿民　李　娜　张云卿　张永存　张焕玲　张　锋　林　慧
宗晓航　贾广素　高夫征　程红玉　窦　慧

数学分析习题精选精解(下)

主编　张天德　路慧芹

主审　刘建亚　吴　臻

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071

印刷者：山东新华印务有限责任公司
地址：济南市世纪大道 2366 号
邮编：250104　电话：(0531)82079112

开本：720mm×1020mm　1/16
印张：19.5
版次：2014 年 7 月第 2 版第 6 次印刷

ISBN 978-7-5331-7325-8
定价：28.00 元

前言
QIANYAN

《数学分析》是数学各专业最重要的一门基础课，也是报考数学各专业硕士研究生的专业考试科目。初学者往往感到内容繁杂，方法深奥，做题困难，不易掌握，缺乏对其主要内容进行深入研究分析的能力。

《吉米多维奇数学分析习题集》自20世纪50年代初在我国翻译出版以来，在全国各大专院校广大师生中引起了巨大反响。凡从事数学分析教学的教师和数学专业的学生，常以试解该习题集中的习题作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。该书4462道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。为帮助、指导广大读者学好这门课程，《数学分析习题精选精解》的第一版从4462道习题中精选了部分习题，做出了详细的解答。图书出版后，得到了广大读者的认可。

许多读者反映本书内容虽然经典，但与平时学习的教材不吻合，不方便学习。针对这种情况，我们编辑出版本书的第二版。第二版将原书的内容打散，重新编排章节，在章节设置上和华东师范大学数学系主编的教材《数学分析》(第四版)基本一致，分为上下两卷。全书共分二十二章，每章又分若干节，涉及的内容涵盖了数学分析的全部主题。在内容上，增加了对数学分析课程涉及的基本内容的系统、透彻的分析，并对基本习题进行归类、分析，提炼出常用的解题方法，引导读者在熟练掌握基本解题方法的过程中，提高分析问题和解决问题的能力。

在本书中，每章除最后一节外每节包括两大部分内容：

知识要点：简要对每节涉及的基本概念、基本定理和常用公式进行系统梳理，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

基本题型：对每节常见的基本题型进行归纳总结，精选丰富的例题，举一反三，深入讲解，便于读者理解和掌握基本知识，有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

前 言

QIANYAN

每章最后一节是综合提高题型，这一节的题目综合性较强，难度较大，有相当一部分是考研真题，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。通过本节的学习，可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力，使读者把握重点、了解考研动向，同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为毕业生考研复习提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，牢固掌握各种解题方法。

限于编者水平，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请同行和读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编　者

2014 年 5 月

目 录

MULU

目 录
MULU

第十二章　数项级数

§1. 级数的敛散性

1. 数项级数的概念

给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad ①$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称为级数)，其中 u_n 称为数项级数①的通项.

数项级数①也常写作：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 或简写为 $\sum u_n$. 数项级数①的前 n 项之和，记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \qquad ②$$

称它为数项级数①的第 n 个部分和，也简称部分和.

2. 数项级数收敛的概念

若数项级数①的部分和数列$\{S_n\}$收敛于 S(即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$)，则称数项级数①收敛，称 S 为数项级数①的和，记作 $S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 或 $S=\sum u_n$. 若$\{S_n\}$是发散数列，则称数项级数①发散.

3. 级数收敛的柯西准则

1°级数①收敛⇔对任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p，都有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$. ⇔对任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>m>N$ 时，有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon$.

2°级数①发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0>N$ 和 p_0，有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0$.

3°级数①收敛的必要条件为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

4. 收敛级数的基本性质

1°若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，则对任意常数 c,d，级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛，且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$.

2°去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

注　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 S，则级数

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \qquad ③$$

也收敛，且其和 $R_n=S-S_n$. ③式称为级数 $\sum u_n$ 的第 n 个余项(或简称余项)，它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

3°在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

注　若加括号后的级数收敛，不能推断它在未加括号前也收敛. 如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

收敛，但级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的.

若加括号后的级数发散，则原级数一定发散.

5. 常用结论

1°等比级数（也称为几何级数）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots\ (a\neq0)$，当 $|q|<1$ 时收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant1$ 时发散.

2°调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 是发散的.

基本题型

用定义证明级数收敛并求和

【678】 讨论等比级数 $a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 的收敛性（$a\neq0$）.

解 $q\neq1$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 的第 n 个部分和 $S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n=a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$. 因此，

（ⅰ）当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}$，此时等比级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

（ⅱ）当 $|q|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，等比级数发散.

（ⅲ）当 $q=1$ 时，$S_n=na$，级数发散. 当 $q=-1$ 时 $S_{2k}=0$，$S_{2k+1}=a$，$k=0,1,2,\cdots$，级数发散.

总之，$|q|<1$ 时，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；$|q|\geqslant1$ 时，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 发散.

【679】 讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{1}$$

的收敛性.

解 级数(1)的第 n 个部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$，因此级数(1)收敛且其和为 1.

【680】 证明下列级数的收敛性，并求其和.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

分析 注意到第(1)～(4)题的特点，可考虑用拆项的技巧按级数收敛的定义证明，第(5)小

题写出它的前 n 项和后，发现 $\sum\limits_{n=1} \frac{k}{2^k}$ 可利用错位相减法得到，从而原级数的前 n 项和也可求得.

证 (1)$S_n=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$，所以原级数收敛，且和数 $S=\frac{1}{5}$.

(2)$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=\frac{3}{2}$，所以原级数收敛，且和数 $S=\frac{3}{2}$.

(3)$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$，所以原级数收敛，且和数为 $S=\frac{1}{4}$.

(4)$a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2}$，所以原级数收敛，且和数 $S=1-\sqrt{2}$.

(5)考察 $S_n'=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$， $\frac{1}{2}S_n'=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

从而 $S_n'=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$，故原级数的前 n 项和为

$$S_n=2S_n'-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=2\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\right)-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，所以原级数收敛且和数 $S=3$.

【681】 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$. 并由此结果计算下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

解 级数的前 n 项和

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a$，从而有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

(1)由于 $\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{1}{a+n-1}-\dfrac{1}{a+n}$，记 $a_n=\dfrac{1}{a+n-1}$，则 $a_1=\dfrac{1}{a}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，从而知，原级数的和为 $\dfrac{1}{a}$.

(2)由于

$$(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)+n}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$$
$$=-(-1)^n\cdot\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}=-\left[(-1)^n\frac{1}{n}-(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right].$$

记 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，则 $a_1=-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，从而知，原级数的和为 $S=-[(-1)-0]=1$.

【682】 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则(1)级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；(2)当 $b_n\neq0$ 时，级数 $\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$. 并由此结果计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$ 的和.

证 (1)级数前 n 项和 $S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\infty$，故级数发散.

(2)级数的前 n 项和 $S_n=\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}\right)+\left(\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_{n+1}}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$，即 $\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$，由于通项

$$\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1},$$

记 $b_n=n^2+1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，$b_1=2$，从而知，该级数的和为 $S=\dfrac{1}{2}$.

【683】 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足：加括号后的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛 $(n_1=0)$，且在同一括号内的加数 $u_{n_k+1},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同(注：对不同的括号，这个符号可以是不同的). 试证原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛.

证 分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，加括号后的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 的部分和为 T_k，则 $T_k=\sum\limits_{i=1}^{k}v_i=\sum\limits_{i=1}^{k}(u_{n_i+1}+\cdots+u_{n_{i+1}})=\sum\limits_{j=1}^{n_{k+1}}u_j=S_{n_{k+1}}$.

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ 中同一括号内的所有加数有相同的符号，因此当 $n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}$ 时，S_n 将单调地变化，因而 $T_{k-1}=S_{n_k}\leqslant S_n\leqslant S_{n_{k+1}}=T_k$（或 $T_k\leqslant S_n\leqslant T_{k-1}$）. 又因 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ 收敛，则存在极限

$\lim\limits_{k\to\infty}T_{k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}T_k=T$，且当 $k\to\infty$ 时，随之有 $n\to\infty$（反之亦然），所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{k\to\infty}S_n=\lim\limits_{k\to\infty}T_k=T$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ 有相同的和.

利用级数的性质判断级数的敛散性

【684】 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum cu_n$ 也发散，其中 c 为非零常数.

证 假设 $\sum cu_n$ 收敛，因 $c\neq 0$，故级数 $\sum \frac{1}{c}(cu_n)=\sum u_n$ 收敛，这与题设 $\sum u_n$ 发散矛盾，所以若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum cu_n$ 也发散（$c\neq 0$）.

【685】 设级数 $\sum u_n$ 与级数 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 v_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

解 (1)当 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散时，$\sum(u_n+v_n)$ 不一定发散. 如

$$\sum u_n=\sum(-1)^n,\quad \sum v_n=\sum(-1)^{n+1},$$

两级数均发散，但 $\sum(u_n+v_n)=\sum 0=0$，即 $\sum(u_n+v_n)$ 收敛. 又如，$\sum u_n=\sum v_n=\sum\frac{1}{n}$，两级数均发散，且 $\sum(u_n+v_n)=\sum\frac{2}{n}$ 发散.

(2)当 u_n 与 v_n $(n=1,2,\cdots)$ 均非负时，则 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散. 这是因为：

由 $\sum u_n$ 发散知存在 $\varepsilon_0>0$，对任意自然数 N，总存在自然数 m_0 $(m_0>N)$ 和 p_0，使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0,$$

而由 u_n 与 v_n $(n=1,2,\cdots)$ 非负有

$$\begin{aligned}&|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{m_0+p_0}+v_{m_0+p_0})|\\=&|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|+|v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots+v_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0,\end{aligned}$$

由柯西准则知 $\sum(u_n+v_n)$ 发散.

应用柯西准则判断级数的敛散性

【686】 应用柯西准则证明级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证 由于

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|&=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}\\&<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

因此，对任给正数 ε，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使当 $m>N$ 及对任意的正整数 p，由上式就有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

由柯西准则知级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

【687】 讨论调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解 这里调和级数显然满足级数收敛的必要条件，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

但令 $p=m$ 时有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}|=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\geqslant\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|=\frac{1}{2}.$$

因此，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任何正整数 N，只要 $m>N$ 和 $p=m$ 就有上式成立. 所以调和级数是发散的.

点评 显然，调和级数 $\sum u_n=\sum\frac{1}{n}$ 对每个固定的自然数 p 都满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0$. 于是有下述结论：若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的自然数 p 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0$，此级数仍可能不收敛.

【688】 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在某正整数 N，对一切 $n>N$ 总有 $|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$.

证 充分性 任给正数 ε，存在正整数 N，对一切 $n>N$，总有 $|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$. 当然对 $n>m>N$，有

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|&=|(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)-(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)|\\&\leqslant|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|+|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m|<2\varepsilon,\end{aligned}$$

由柯西准则知级数 $\sum u_n$ 收敛.

必要性 若级数收敛，由柯西准则知：对任给正数 ε，存在正整数 N_1，当 $n>m>N_1$ 时，

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon,$$

特别地，取 $N>N_1+1$，$m=N-1>N_1$，则对任意 $n>N$，有 $|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$.

【689】 设 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证 因为 $\{na_n\}$ 收敛，所以对任意正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m,n>N$，不妨设 $m>n$ 时，有 $|ma_m-na_n|<\varepsilon$. 又因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，故对上述的 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}|S_m-S_n|&=|(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n+(n+2)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+\cdots+ma_m-ma_{m-1}|\\&=|-na_n-(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{m-1})+ma_m|\\&\geqslant|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{m-1}|-|ma_m-an_n|,\end{aligned}$$

从而 $|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{m-1}|\leqslant|S_m-S_n|+|ma_m-na_n|<2\varepsilon$,

从而由柯西准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

【690】 应用柯西准则判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$； (2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$； (3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$； (4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解 (1)对任意的自然数 p，

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{|\sin 2^{m+k}|}{2^{m+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{m+k}}=\frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2^m}.$$

又 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2^m}=0$，从而对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $m>N$ 时，对任意的 $p\in\mathbf{N}_+$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|\leqslant\frac{1}{2^m}<\varepsilon.$$

从而由柯西准则知原级数收敛.

(2)当 $p=1$ 时,$|u_{m+1}|=\left|\frac{(-1)^m(m+1)^2}{2(m+1)^2+1}\right|\geqslant\frac{(m+1)^2}{2(m+1)^2+(m+1)^2}=\frac{1}{3}$,

从而由柯西准则知原级数发散.

(3)对任给的自然数 p,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}-\frac{1}{m+4}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right|\\&=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}-\frac{1}{m+4}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\\&=\frac{1}{m+1}-\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}-\frac{1}{m+5}+\cdots-(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right)<\frac{1}{m+1}<\frac{1}{m},\end{aligned}$$

故对任给的正数 ε,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $m>N$ 时及任意的正整数 p,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{1}{m+k}\right|<\varepsilon,$$

从而由柯西准则知原级数收敛.

(4)当 $p=m$ 时,

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\geqslant\frac{m}{\sqrt{(m+m)+(m+m)^2}}$$

$$\geqslant\frac{m}{\sqrt{2(m+m)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$,则对任意正整数 N,总存在 $m=N+1$ 及 $p=m$,使

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

由柯西准则知原级数发散.

点评 应用柯西准则判断级数 $\sum u_n$ 收敛,只需对任意的正整数 p,判断

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|\quad(m\in\mathbf{N}_+)$$

在 $m\to\infty$ 时的极限为零.否则级数发散.通常采用适当放缩、夹逼准则等方法和技巧.

§2. 正项级数

1. 正项级数的定义

各项符号都相同的级数称为同号级数;各项都是正数的级数称为正项级数;各项都是负数的级数称为负项级数.负项级数可以转化为正项级数来处理.

2. 正项级数敛散性判别法则

1°充要条件 正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界,即存在某正数 M,使对一切正整数 n,有 $S_n\leqslant M$.

2°比较原则 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,如果存在某正数 N,使对一切 $n>N$ 都

有 $u_n \leqslant v_n$，则

（ⅰ）若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；

（ⅱ）若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 也发散.

3°比较原则的极限形式　设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 是两个正项级数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，两个级数同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散.

4°达朗贝尔判别法（或称比式判别法）　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及常数 q $(0<q<1)$.

(1) 如果对一切 $n>N_0$，有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$，则级数 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 如果对一切 $n>N_0$，有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$，则级数 $\sum u_n$ 发散.

5°比式判别法的极限形式　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$. 则

(1) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(2) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

注　设 $\sum u_n$ 为正项级数.

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$，则级数 $\sum u_n$ 收敛；　(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$，则级数 $\sum u_n$ 发散.

6°柯西判别法（或称根式判别法）　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正数 N_0 及正常数 l，

(1) 如果对一切 $n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1$，则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(2) 如果对一切 $n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$，则级数 $\sum u_n$ 发散.

7°根式判别法的极限形式　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. 则

(1) 当 $l<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；　(2) 当 $l>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

注　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l$，则

(1) 当 $l<1$ 时，该级数收敛；　(2) 当 $l>1$ 时，该级数发散.

8°拉贝判别法　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及常数 $r>1$.

(1) 如果对一切 $n>N_0$，有 $n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1$，则级数 $\sum u_n$ 发散.

(2) 如果对一切 $n>N_0$，有 $n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r$，则级数 $\sum u_n$ 收敛.

9°拉贝判别法的极限形式　设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则

(1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；　(2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

10°积分判别法　设 f 为 $[1,+\infty)$ 上非负递减函数，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

3. 常用作比较的级数

1°等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n\ (a>0)$：当 $0<q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

2°p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$：当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.

3°其他某些级数：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$，$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\cdot(\ln\ln n)^p}$，$\sum\limits_{n=27}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot(\ln\ln\ln n)^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.

基 本 题 型

利用充要条件判别正项级数的收敛性

【691】 设 $a_n>0$，证明级数 $\sum\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 是收敛的.

证　显然级数为正项级数，设该级数的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\right]\\&=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<1,\end{aligned}$$

从而该正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，故由正项级数收敛的充要条件知原级数收敛.

【692】 设 $\{a_n\}$ 为递减正项数列，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum 2^m a_{2^m}$ 同时收敛或同时发散.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 S_n，级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 的部分和为 T_n. 因为 $\{a_n\}$ 为递减正项数列，所以

$$T_n=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots+2^n a_{2^n},$$

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+a_{2^{n-1}+2}+\cdots+a_{2^n})\\&\geqslant a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}\geqslant\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}T_n,\end{aligned}$$

由正项级数收敛的充要条件知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，由上式知数列 $\{T_n\}$ 也有界，从而级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 也收敛；因此若级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

又由于

$$\begin{aligned}S_n<S_{2^n}&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^n}\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+a_{2^n+1}+a_{2^{n+1}-1})\\&\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}=T_n,\end{aligned}$$

同样由正项级数收敛的充要条件知：若级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 收敛，则其部分和数列 $\{T_n\}$ 有界，由上式知，数列 $\{S_n\}$ 也有界，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；因此若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 也发散.

由以上讨论可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum 2^m a_{2^m}$ 敛散性相同.

利用比较原则判别正项级数的敛散性

【693】 考察级数 $\sum \dfrac{1}{n^2-n+1}$ 的收敛性.

解 显然该级数为正项级数，又当 $n \geqslant 2$ 时有

$$\frac{1}{n^2-n+1} \leqslant \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2},$$

由于正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，故由比较原则知原级数收敛.

【694】 证明级数 $\sum \dfrac{1}{2^n-n}$ 是收敛的.

证 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n-n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{n}{2^n}} = 1,$$

又等比级数 $\sum \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，所以由比较原则知级数 $\sum \dfrac{1}{2^n-n}$ 是收敛的.

【695】 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n}$ 是发散的.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1$，又调和级数 $\sum \dfrac{1}{n}$ 是发散的，从而由比较原则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n}$ 是发散的.

【696】 应用比较原则判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum \dfrac{1}{n^2+a^2}$； (2) $\sum 2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}$； (3) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$； (4) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$；

(5) $\sum \left(1-\cos \dfrac{1}{n}\right)$； (6) $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (7) $\sum (\sqrt[n]{a}-1) \quad (a>1)$；

(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$； (9) $\sum \left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right) \quad (a>0)$； (10) $\sum \dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$.

解 (1) 因为 $0 < \dfrac{1}{n^2+a^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较原则知 $\sum \dfrac{1}{n^2+a^2}$ 收敛.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \pi$，而级数 $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故由比较原则知 $\sum 2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}$ 收敛.