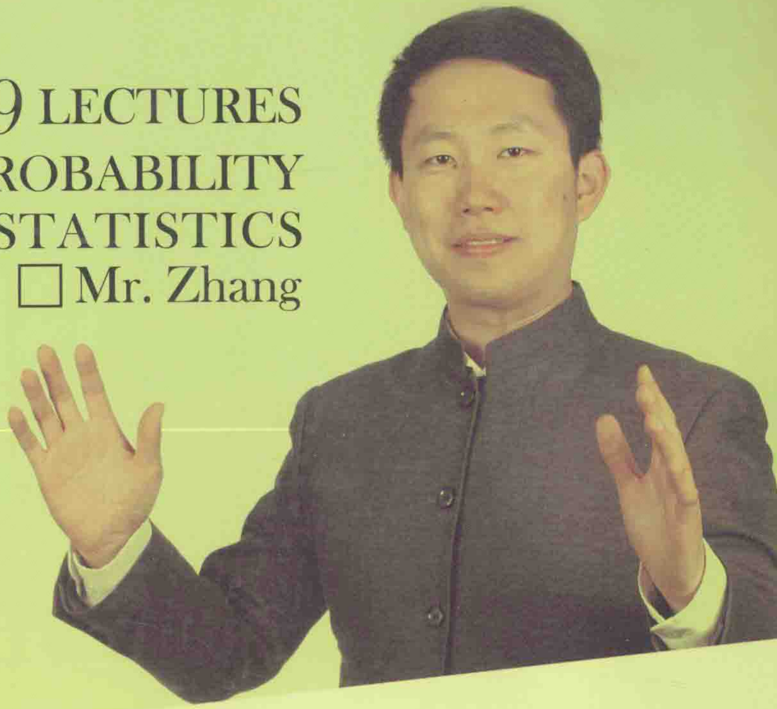
理工社®

2015 [张宇考研数学系列丛书]

9 LECTURES ON PROBABILITY AND STATISTICS

□ Mr. Zhang



张宇
概率论与数理统计9讲

张宇 ◯ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

[张

9 LECTURES
ON PROBABILITY
AND STATISTICS
□ Mr. Zhang

张宇

概率论与数理统计 9 讲

主编：张宇

编委（按姓氏笔画数）：张乐　张伟　张宇　严守权　李烈　罗治文　姜晓千　晁小倩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇概率论与数理统计9讲 / 张宇主编．—北京:北京理工大学出版社，2014.2

ISBN 978－7－5640－8842－2

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料　②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第022798号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /三河市文阁印刷厂
开　　本 /787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 /14
字　　数 /385千字
版　　次 /2014年4月第1版　2014年4月第1次印刷
定　　价 /26.00元

责任编辑 /张慧峰
文案编辑 /张慧峰
责任校对 /孟祥敬
责任印制 /边心超

Preface 前言

——如何探究随机现象背后的客观规律

本书是继《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》之后的第三本教材，至此，我写给读者朋友们的考研数学36讲已经齐全了.

一提到《概率论与数理统计》，很多读者以为是研究随机现象的，正如读者所熟知的——概率论起源于赌博——帕斯卡和费马绞尽脑汁去帮助人们思考如何研究赌博中的赌金分配问题；还有读者干脆更加具体化地把这门课看做是玩排列组合的智力游戏. 以上认识，都没有抓住这门学问的核心——诚然，赌金分配也好，排列组合也罢，都是概率统计中的内容，但是它们都不是核心——**如何利用微积分工具研究随机现象背后的客观规律性，才是这门课程的核心.**

以上所述，道出了这门课的**两大关键：一是概率统计的研究思想；二是研究概率统计的工具——微积分.**

一、概率统计的研究思想

何谓概率统计的研究思想？本书中将会讲到众多概率论、统计学的思想方法，这些思想方法是这门课程的灵魂，读者一定要认真学习、体会并将它们内化为自己的能力. 在此我仅举一个简单但是重要的例子——**天上掉馅饼**——希望读者对于这门课里的知识，不仅要知其然，更要知其所以然.

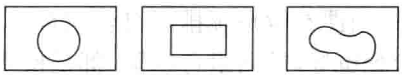
假设明天早上9:00，天上会掉一个馅饼（当做质点）到你所在学校的操场上，请你用食堂的饭盆去接（如下图所示）.

请问两个问题：一是你站在哪里接呢？二是你要带多大的饭盆和什么形状的饭盆呢？认真思考后，不难得出如下结论.

第一个问题的答案是：站在何处去接馅饼都可以. 这里就要求读者懂得一个重要思想——**等可能性思想——我们没有任何理由认为这个馅饼更有可能落在操场区域中的哪个位置，只好认为它落在此区域中的任何位置都具有相等的可能性.** 这个思想在很多问题中都有重要应用，

比如说：一个袋子中有 10 个同质球，其中有 1 个白球，9 个黑球，现在请你从该袋子中随机取出一球，请问取出的球是白球的概率. 我们会毫不犹豫地回答：十分之一. 这里用到的就是这个思想：由于球是同质的，我们没有任何理由认为取到某一个球更具有可能性，只好认为取到 10 个球中任何一球都具有等可能性，所以取到白球的概率自然是十分之一.

第二个问题的答案是：你所带的饭盆大小至关重要，但是是什么形状却无关紧要. 为什么？因为馅饼落在操场区域的任何位置都具有等可能性，于是，读者容易想到，如果饭盆的面积是操场面积的千分之一，那么你接到馅饼的概率就是千分之一；如果饭盆的面积是操场面积的二分之一，那么你接到馅饼的概率也就是二分之一；如果，我是说如果，你的饭盆面积和操场面积一样大，那么毫无疑问，馅饼就是你的了. 至于你是用圆形、还是矩形、甚至是奇形怪状的（如图所示），真是随你了（这里要注意一点：如果你的饭盆面积和操场面积一样大，你的饭盆和操场形状自然是一样的，这是特殊情况）. 这里又可以把第一个问题所述的等可能性等价地，或者说更加专业地描述为：**馅饼落到操场区域中的任意子区域上的概率与该子区域的面积大小成正比.**



以上所述涉及**求概率的几何概型**这一重要知识点.

于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

称随机试验（随机现象）的概率模型为**几何概型**，如果：

（1）样本空间（基本事件空间）Ω 是一个可度量的几何区域；

（2）每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比，而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 A=“样本点落入区域 S_A”的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

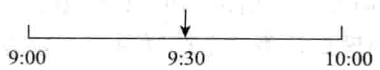
由上式计算的概率称为 A 的**几何概率**.

需要指出地是，上述问题是考研重点，是命题人手里的“香饽饽”.

二、研究概率统计的工具——微积分

当然，不要以为只懂了概率统计的思想，就能够游刃有余，畅通无阻. 这里还涉及计算的问题——大多数数学问题是要算出来的——微积分在概率统计的发展过程中起到了极为重要的作用.

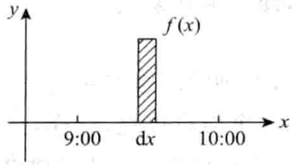
接着“一”那里的例子，我再提一个“类似”的问题. 假如给出一个信息：明天我会在 9:00—10:00 之间到达教室. 读者马上要将其理解为“我在 9:00—10:00 之间的任意时刻到达教室是等可能的”，很好. 那么，请问我在 9:00—9:30 之间到达教室的概率是多少？答案是二分之一，也很好. 那么，请问我在 9:30 这个时刻正好到达教室的概率是多少？答案是？读者可能会发现一个奇怪的答案：概率是 0. 是的，你回答的没有错. 假设 9:00—10:00 的时刻为一个时间轴，这可以看做一个有长度的数轴，如下图所示. 但是 9:30 这个时刻是一个点——一个点是没有长度的——所以，由上面提供的几何概率的公式计算得到答案 0.



"我在 9:30 到达教室"这件事情明明可以发生，可是其概率算出来竟然是 0，这不能不说是一种遗憾——这是数学上的遗憾——通俗说来，按照我们上面讲的几何概型的方法，这个事件的概率是**"测不出来的"**.

测不出来可不行，非得测怎么办？微积分前来施以援手了.

将 9:30 这个点再往下走一个增量——9:30＋dx，于是，我们就可以用 $f(x)\mathrm{d}x$ 这个面积的大小来表示这件事情发生的概率了. 这涉及随机变量的**均匀分布**这个重要知识点.



于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

如果 X 的概率密度或分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他,\end{cases} \quad 或 \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x,\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$.

【注】 区间 (a,b)，可以是闭区间 $[a,b]$；几何概型是均匀分布的实际背景. 用几何概率计算事件概率时已假设点在区域内服从均匀分布. 几何概率可以用均匀分布计算.

同样需要指出，我在前言中所讲到的这个直观且深刻的知识点是考研重点.

我认为，读者若能贯彻以上两大关键——既能够学懂概率统计的思想方法，又能够熟练使用微积分工具，这门课程一定可以学好.

三、关于本书

本书是由各位作者在多年讲授概率论与数理统计课程和考研辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题、中国人民大学相关教材、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》概率论与数理统计部分的编写、浙江大学《概率论与数理统计(第四版)》的《习题全解与考研指导》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义. 期间，清华大学谭泽光教授与作者进行了很多交流、给予作者很多帮助，特别表示感谢.

现在，在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将概率论与数理统计课程按照考研数学考试大纲的要求，细分为 9 讲，称为《张宇概率论与数理统计 9 讲》，奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高概率论与数理统计学习水平的读者们参考.

本书每一讲由"内容精讲""例题精解""习题精练"三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

"内容精讲"全面准确地阐述了本科教学基本要求和考研数学大纲中概率论与数理统计所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

"例题精解"通过精心挑选或者编制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

"习题精练"给读者留下了作业:独立完成这些优秀的试题,既检验自己的学习成果,又培养自己独立做题的能力,且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢?我提四个建议.

(1)坚持不懈,细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲:"一天不练功,只有我知道;三天不练功,同行也知道;一月不练功,观众全知道."复习数学,我们建议读者也一定要这样,捧着这本书,每天都要看内容,每天都要做题目,坚持不解,细水长流,便可水到渠成.

(2)不求初速,但求加速

一开始读数学书,总会吃力一些,遇到的困难多一些,这很正常,我们不要畏难,应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂,把每一个难点攻克,这样,开始复习的速度就会慢一些.但是,只要能够坚持,复习了一定的内容之后,你便会发现,复习速度不断提高,理解能力和解题能力都会显著增强.这符合数学学习的规律,请读者把握住.

(3)独立思考,定期检验

复习一个知识,先要读基本的概念、定理和公式,然后看例题,再云做习题.只有通过做题,才能知道自己是否真正掌握了这个知识.一定不要翻着答案做题,稍有不会就看答案,这样效果不好.读者先不要看答案,自己独立地去做,调动起自己所有的知识储备,看能不能做出来,做出来了,自然很好,即使做不出,时间也没有白费,其他的知识在你脑子里过了一遍,也是一种复习.只是要注意,如果全力以赴也未做出题目,看完答案后要好好总结经验.在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段,都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)吸取教训,善于总结

人没有不犯错误的,尤其在学习数学的过程中,做错题,不会做题,是再平常不过的了.人们常说:"失败是成功之母",就是这个意思.我们常告诉学生:如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题,可能会有两种态度,一种态度是消极的,题目不会做,心情不好,自暴自弃,复习效率大打折扣;一种态度是积极的,题目做不出,正是找到了自己复习的薄弱环节,找到了自己的不足之处,正是遇到了自己提高、进步的机会,我们当然支持后面一种态度,这才是正确的态度.所以,希望在考研复习的过程中,读者准备一个笔记本,通过不会做或者做错的题目,认真分析自己到底问题出在哪里,哪些知识还复习不到位,吸取教训,多做总结,这样的笔记日积月累,对提高你的数学水平,是有极大帮助的.

本书答疑地址:http://weibo.com/zhangyumaths.

我要再次感谢前考研数学命题组的老专家们,他们功底深厚、德高望重,给予本书很大的支持和帮助.我无意用"水平有限"作为遁词,诚心接受读者和同行专家的批评指正.

作为考研数学36讲的最后一本书,我把在微博上的一段话作为结尾送给读者:只有你真心实意对待数学,数学才会真心实意回报于你.万不要虚情假意,万不要急功近利,数学很聪明,不会被骗到.对人、对事,均应如此.用耳听者,学到皮肤,用心听者,学到灵魂.

张宇

2014年4月　于北京

Contents 目录

第 1 讲 随机事件与概率

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一 数学三	样本空间(基本事件空间)的概念
理解	数学一 数学三	随机事件的概念　概率、条件概率的概念 事件独立性的概念　独立重复试验的概念
会	数学一 数学三	计算古典型概率和几何型概率
掌握	数学一 数学三	事件的关系及运算　概率的基本性质 概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式 用事件独立性进行概率计算　计算有关事件概率的方法

内容精讲

一、随机事件与样本空间

1. 随机试验

我们称一个试验为**随机试验**,如果它满足以下三个条件:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)试验所有可能结果是明确可知道的,并且不止一个;

(3)每一次试验会出现哪一个结果,事先不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,为方便起见,将随机试验简称为**试验**,并用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$表示.

【注】 在不少情况下,我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果,但可以知道它不超出某个范围.这时,也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果.例如,我们需要记录某个城市一天的交通事故数量,则试验结果将是非负数 x.我们无法确定 x 的可能取值的确切范围,但可以把这范围取为$[0,+\infty)$,它总能包含一切可能的试验结果,尽管我们明知某些结果,如 $x>10\ 000$,是不会出现的.我们甚至可以把这范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨.这里就有了一定的数学抽象,它可以带来很大的方便.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为**随机事件**,简称为**事件**,并用大写字母 A,B,C 等表示.为讨论需要,将每次试验一定发生的事件称为**必然事件**,记为 Ω.每次试验一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

【注】 随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定,但是在大量重复试验的情况下,它的发生呈现出一定的规律性,这门学问正是要研究这种规律性,读者应在研究这门课程后,对此有较为深刻的认识.

3. 样本空间

随机试验每一最简单、最基本的结果称为**基本事件**或**样本点**,记为 ω.基本事件(或样本点)的全体称为**基本事件空间**(或**样本空间**),记为 Ω,即 $\Omega=\{\omega\}$,随机事件 A 总是由若干个基本事件组成,即 A 是 Ω 的

子集，$A\subset\Omega$. 事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件有一个发生.

二、事件的关系与运算

1. 定义（关系：包含，相等，相容，对立；**运算**：和（并）、差、交（积））

(1)如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A（或 A 被 B 包含），记为 $A\subset B$.

(2)如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. A 与 B 相等，事实上也就是说，A 与 B 由完全同样的一些试验结果构成，它不过是同一件事表面上看来不同的两个说法而已.

(3)称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的**交（或积）**，记为 $A\cap B$ 或 AB.

【注】 称"有限个（或可列个）事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交（或积），记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4)若 $AB\neq\varnothing$，则称事件"A 和 B **相容**"；若 $AB=\varnothing$，则称"事件 A 与 B 不相容"，也叫**互斥**. 如果一些事件中任意两个事件都互斥，则称这些事件是**两两互斥**的，或简称**互斥**的.

(5)称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 的**并（或和）**，记为 $A\cup B$.

【注】 称"有限个（或可列个）事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并（或和），记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(6)称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$；称"事件 A 不发生"的事件为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$.

由定义易知

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\quad B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing\text{且}A\cup B=\Omega.$$

(7)称有限个（或可列个）事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成**一个完备事件组**，如果 $\bigcup\limits_{i=1}A_i=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$（对一切 $i\neq j$）.

(8)事件的关系和运算可以用所谓**文氏图**形象地表示出来（见图 1-1，题中的矩形表示必然事件 Ω）.

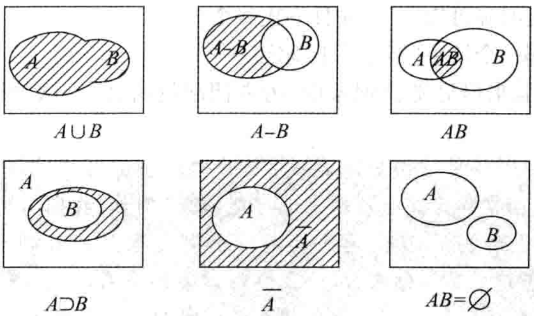


图 1-1　文氏图

2. 事件的关系和运算法则：

(1)吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$；

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(3)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(4)分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$，$A(B-C)=AB-AC$；

(5)对偶律（德摩根律）　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【注】 (1)事件运算顺序约定为先进行逆运算，而后交运算，最后并或差.

(2)事件的关系、运算与集合的关系、运算相当，且具有相同的运算法则，所以我们可以对比着理解记忆，并要学会用集合关系去思考事件关系.

三、概率的概念和基本性质

1. 概率的三种定义

(1)概率的描述性定义：

通常我们将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值)，称为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$.

(2)概率的统计性定义：

在相同条件下做重复试验，事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**. 当试验次数 n 充分大时，频率将“稳定”于某常数 p 的“附近”. n 越大，频率偏离这个常数 p 的可能性越小. 这个常数 p 就被称为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)概率的统计性定义实质上是说，用频率 $\frac{k}{n}$ 作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的估计. 其直观背景为：某事件出现的可能性大小，可由其在多次重复试验中出现的频率去刻画.

(2)从上述(1)可以看出，频率只是概率的估计，而非概率本身. 也就是说，概率的统计性定义是无法准确给出某事件的概率的. 其重要性主要基于以下两点：

一，它提供了估计概率的方法，比如在一批产品中抽取样品，来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据，抽取样品计算出来的合格率，只是一种估计)；二，它提供了一种检验某结论是否正确的准则，比如，你说某批产品的合格率是 95%，我们做实验，抽取样品进行计算，得出的结果，合格率是 20%，远远低于你所说的 95%这个数据，于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

(3)概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，如果对每一个事件 A 都赋于一个确定的实数 $P(A)$，且事件函数 $P(\cdot)$ 满足：

① 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：对任意可列个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$(即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(\cdot)$ 为**概率**，$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)数学上所说的“公理”，就是一些不加证明而承认的前提，上述公理化定义只是介定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质，它不解决具体场合下的概率计算.

(2)概率 $P(\cdot)$ 是事件的函数.

(3)虽然它不解决具体场合下的概率计算，但是我们却常常用它来判断某事件函数 $P(\cdot)$ 是否是概率，这种题型在考研试题中也是经常遇到的.

2. 概率的基本性质

由概率的公理化定义，我们可以得到如下的一些重要性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3(单调性)　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4(有界性)　对于任一事件 A，

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

【注】 $P(A)=0$，不能断言 $A=\varnothing$；$P(A)=1$，不能断言 $A=\Omega$. 其中道理可从前言中悟出.

性质 5(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6(加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

【注】 上式还能推广到多个事件的情况.

(1)设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2)对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用数学归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质 7(减法公式) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

四、古典型概率和几何型概率

下面研究两种非常重要的概率类型:古典型概率和几何型概率.

1. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**古典概型**,如果其基本事件空间(样本空间)满足:

(1)只有有限个基本事件(样本点);

(2)每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.

如果古典概型的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,也叫做有利于 A 的基本事件为 k 个,则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**古典概型**.

2. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**,如果:

(1)样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域;

(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样,即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比,而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中,如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域,则事件 A="样本点落入区域 S_A"的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**几何概率**.

【注】 古典概型与几何概型的区别是:基本事件有限、等可能的随机试验为古典概型;基本事件无限且具有几何度量、等可能的随机试验为几何概型.

五、条件概率及与其有关的三个概率公式:乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1. 条件概率

设 A,B 为任意两个事件,若 $P(A)>0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为条件概率,记为 $P(B|A)$,并定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad (P(A)>0).$$

【注】 (1)条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率,概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用.

例如:

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A),$$

$$P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A),$$

等等.

(2)条件概率就是在附加了一定的条件之下所计算的概率.当说到"条件概率"时,总是指另外附加的条件,其形式可归结为"已知某事件发生了".

2. 乘法公式

如果 $P(A)>0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

一般地,如果 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

【注】 A_i 先于 A_{i+1} 发生时用此公式.

3. 全概率公式

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega, A_iA_j=\varnothing(i\neq j), P(A_i)>0$,则对任一事件 B,有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n} A_iB,$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i).$$

4. 贝叶斯公式(又称逆概公式)

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega, A_iA_j=\varnothing(i\neq j), P(A_i)>0$,则对任一事件 B,只要 $P(B)>0$,就有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

【注】 (1)要注意 $P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 的区别:

$P(AB)$ 是在样本空间为 Ω 时,A 与 B 同时发生的可能性,而 $P(B|A)$ 则是表示在 A 已经发生的条件下,B 发生的可能性,此时样本空间已缩减,只要题目中有前提条件:"在 A 发生的条件下"或"已知 A 发生"等等,均要考虑条件概率.

(2)全概率公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小.如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件(或原因、因素或前一阶段结果)A_i 相联系,那么在计算 $P(B)$ 时,我们总是将 B 对 A_i 作分解:

$$B=\bigcup_i A_iB,$$

应用全概率公式计算 $P(B)$,我们常称这种方法为**全集分解法**.如果在 B 发生的条件下探求导致这一结果的各种"原因"A_i 发生的可能性大小 $P(A_i|B)$,则要应用贝叶斯公式.

六、事件的独立性和独立重复试验

1. 事件的独立性

(1)独立性定义

①**描述性定义(直观性定义)** 设 A,B 为两个事件,如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响,则称事件 A 与 B **相互独立**.设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或几个事件发生与否的影响,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

②**数学定义** 设 A,B 为事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B **相互独立**,简称为 A 与 B **独立**.

【注】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,如果对其中任意有限个事件 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}(k\geqslant2)$,有

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

考研中常考的是 $n=3$ 的情形.细致说来,设 A_1,A_2,A_3 为 3 个事件,若

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\qquad(1)$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \tag{2}$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3), \tag{3}$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3), \tag{4}$$

则称 A_1,A_2,A_3 **相互独立**. 当去掉上述(4)式后,称只满足(1)(2)(3)的 A_1,A_2,A_3 **两两独立**. 见例1.37.

(2)独立性的判定

①直观性判定

若试验独立,则其结果必相互独立. 例如:甲、乙各自试验结果相互独立;袋中有放回取球,其结果相互独立等.

②充要条件

a. $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Leftrightarrow$任意 $k\geqslant 2$,$P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_j\right)=\prod\limits_{j=1}^{k} P(A_j)$.

特别地,A,B 独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

若 $0<P(A)<1$,则 A,B 独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)\Leftrightarrow P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

b. n 个事件相互独立的充要条件是:它们中任意一部分事件换成各自的对立事件所得到的 n 个事件相互独立.

③必要条件

a. n 个事件相互独立,则必两两独立,反之不然.

b. n 个事件相互独立,则不含相同事件的事件组经某种运算后所得的事件是相互独立的. 例如,A,B,C,D 相互独立,则 AB 与 $C\cup D$ 相互独立,A 与 $BC-D$ 相互独立,等等.

④一定独立与一定不独立的判定

a. 概率为1或零的事件与任何事件都相互独立.

b. 如果 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,A 与 B 互不相容或存在包含关系,则 A 与 B 一定不独立.

【注】 在现实生活中,难于想像两两独立而不相互独立的情况,可以这样想:独立性毕竟是一个数学概念,是现实世界中通常理解的那种"独立性"的一种数学抽象,它难免会有些不尽人意的地方.

2. 试验的独立性

如果各个试验结果是相互独立的,则称这些试验是相互独立的. 例如:称随机试验 E_1 和 E_2 是相互独立的,如果对 E_1 的任一结果 A_1,E_2 的任一结果 A_2,事件 A_1 与 A_2 独立,即 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$. 称 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是相互独立的,如果对试验 E_i 中的任一结果 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,即对其中任意 k 个事件有 $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_j\right)=\prod\limits_{j=1}^{k} P(A_j)\quad(k\geqslant 2)$.

3. 独立试验序列概型与 n 重伯努利概型

在同样条件下独立重复地进行一系列完全相同的试验,即每次试验结果及其发生的概率都不变,各次试验是相互独立的,称这种重复试验序列的数学模型为**独立试验序列概型**. 如果每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$,且在每次试验中 A 发生的概率都相等(即 $P(A)=p$),将这种试验独立重复 n 次,则称这种试验为 ***n* 重伯努利概型**.

在第2讲中会看到,在 n 重伯努利概型中,事件 A 发生 k 次(只管次数,不论位置)的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$,且如果用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数,则 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

【注】 (1)事件相互独立的概念是概率论中一个重要的概念,它是定义随机试验独立性,随机变量独立性的基础. 我们总是由试验的方式来判定试验的独立性,进而判定事件的相互独立性,再应用事件独立性定义中所揭示的概率关系计算与之有关的事件的概率.

(2)要善于判定独立试验序列概型,只要题目中出现"将…重复进行 n 次""对…重复观察 n 次"等字样,或可以转换为 n 次独立重复试验概型的问题,都是要考虑应用二项分布计算与之有关的事件的概率.

例题精解

一、事件的关系与运算

★

随机事件的描述和运算是概率计算的基础，也是考研数学中的一个考点.

(1)求解概率试题，通常要做的是首先**将实际问题符号化**，即用符号及其运算来描述事件，这种描述可以体现出考生求解问题的思路. 能不能用简明的符号和运算准确反映题意、说明问题，是考生数学能力的一种体现.

(2)需要指出，在讨论和推断随机事件之间的关系时，**采用直观的文氏图**常常是一个有效的方法.

(3)此部分虽然比较基础，但很重要，将实际问题符号化的能力将伴随着概率论的整个课程，所以多讲几个例题是合适的.

例 1.1 以 A 表示事件“甲产品畅销，乙产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

(A)“甲产品滞销，乙产品畅销”　　(B)“甲、乙产品均畅销”

(C)“甲产品滞销或乙产品畅销”　　(D)“甲产品滞销”

解 先将事件符号化，再利用事件运算解答，即以 A_1 表示事件“甲产品畅销”，A_2 表示事件“乙产品滞销”，则 $A=A_1A_2$，其对立事件为 $\overline{A}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，表示事件“甲产品滞销或乙产品畅销”，故选择(C).

例 1.2 设 A,B,C 为三个随机事件，则 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表示________事件. 若有等式 $AB=\overline{A}$，则 A,B 分别表示________事件.

解 由 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\Omega-ABC$ 知 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表示 A,B,C 三个事件至少有一个不发生，或 A,B,C 三个事件不同时发生. 对等式 $AB=\overline{A}$ 两边并 A，$A\cup AB=\overline{A}\cup A=\Omega$，知 A 为样本空间或必然事件，B 为不可能事件.

例 1.3 (1)对一箱产品进行随机抽查检验，如果查出 2 个次品就停止检查，最多检查 3 个产品. 写出该试验的基本事件(样本)空间 Ω，并用基本事件(样本点)表示事件：$A=$“有 2 个产品是次品”，$B=$“至少有 2 个正品”.

(2)用事件 A,B,C 的运算关系表示事件：①A,B,C 都不发生；②A,B,C 不都发生；③A,B,C 不多于一个发生.

解 (1)依题意，检查是有序地逐个进行，至少检查 2 个，最多检查 3 个. 因此，如果以“0”表示查出次品，以“1”表示查出正品，那么基本事件至少是一个二位数，至多是一个三位数的有序数列. 基本事件空间 $\Omega=\{00,010,011,100,101,110,111\}$，事件 $A=\{00,010,100\}$，$B=\{011,101,110,111\}$.

(2)这是一道要求由概率论语言叙述的事件用事件关系来表示的题目，只要知道各种运算所描述的事件关系，此题是不难解答的.

①“A,B,C 都不发生”=“A 不发生，且 B 不发生，且 C 不发生”$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

②“A,B,C 不都发生”=“A,B,C 至少有一个不发生”=“A,B,C 都发生”的逆事件

$=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$.

③“A,B,C 不多于一个发生”=“A,B,C 至多有一个发生”=“A,B,C 至少有二个不发生”

$=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1.4 射击三次，$A_i(i=1,2,3)$表示第 i 次命中目标，则下列事件中表示至少命中一次的事件是(　　).

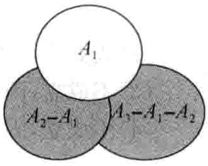


图 1-2

(A)$A_1+A_2+A_3-A_1A_2-A_1A_3-A_2A_3+A_1A_2A_3$

(B)$A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_1-A_2)$

(C)$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

(D)$\Omega-\overline{A_1A_2A_3}$

解 选项(A)表示三次仅命中一次或三次都命中;选项(B)从文氏图 1-2 看,等价于 $A_1+A_2+A_3$ 或 $\Omega-\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,即表示至少命中一次;选项(C)表示三次仅命中一次;选项(D)表示三次没有全命中.综上讨论,应选择(B).

【注】 "文氏图"会使问题变得更加直观,便于理解和求解.

例 1.5 设 A,B 和 C 是任意三事件,则下列选项中正确的选项是(　　).

(A) 若 $A+C=B+C$,则 $A=B$

(B) 若 $A-C=B-C$,则 $A=B$

(C) 若 $AC=BC$,则 $A=B$

(D) 若 $AB=\varnothing$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$,则 $\overline{A}=B$

解 (1)直选法. 由事件运算的对偶律,有 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B=\overline{\varnothing}=\Omega$. 而由 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,可见 A 和 B 互为对立事件,即 $\overline{A}=B$,因此(D)正确.

(2)排除法. 前三个选项都不成立,只需分别举出反例. 例如:由于 A,B,C 是三任意事件,若取 $A\neq B$,而 $C=\Omega$ 是必然事件,则 $A+C=B+C$ 且 $A-C=B-C$,但 $A\neq B$,从而命题(A)和(B)不成立.

设 $A\neq B$,$C=\varnothing$,则 $AC=BC$,但 $A\neq B$,从而命题(C)不成立.

【注】 该题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处.

例 1.6 (1)已知事件 A 与 B 互不相容,则 $A\cup\overline{B}=$________;$A-\overline{B}=$________;$A\overline{B}=$________.

(2)已知事件 C 发生必导致 A,B 同时发生,又 $AB\cup C=B$. 求证:$C\subset B\subset A$.

解 (1)已知 A 与 B 互不相容 $\Leftrightarrow AB=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}$,所以由吸收律得:

$$A\cup\overline{B}=\overline{B},A-\overline{B}=AB=\varnothing,A\overline{B}=A.$$

(2)已知 $C\subset AB$,又 $AB\cup C=B$,由吸收律得 $AB\cup C=AB=B\Leftrightarrow B\subset A$. 从而证得

$$C\subset AB\subset B\subset A.$$

例 1.7 对于任意两个事件 A 和 B,与 $A\cup B\subset B$ 不等价的是(　　).

(A)$A\subset B$　　(B)$\overline{B}\subset\overline{A}$　　(C)$A\overline{B}=\varnothing$　　(D)$\overline{A}B=\varnothing$

解 $A\cup B\subset B$ 即 $A+B=B$,知 $A\subset B$,进而有 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$,知 $\overline{B}\subset\overline{A}$. 在等式 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$ 两边乘 A,有 $A\overline{A}\,\overline{B}=A\overline{B}=\varnothing$,由排除法,$\overline{A}B=\varnothing$ 与 $A\cup B\subset B$ 不等价,故选择(D).

例 1.8 试问下列命题是否成立?

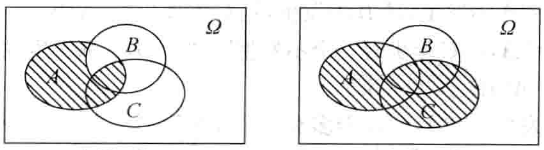
(1)$A-(B-C)=(A-B)\cup C$;

(2)若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;

(3)$(A\cup B)-B=A$;

(4)$(A-B)\cup B=A$.

解 (1)不成立,$A-(B-C)=A-B\overline{C}=A\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC=(A-B)\cup AC\neq(A-B)\cup C$;也可由图 1-3 快速判断.



$A-(B-C)$　　　　$(A-B)\cup C$

图 1-3

(2)成立,因 $C\subset A$,有 $BC\subset AB=\varnothing$,故 $BC=\varnothing$;

(3)不成立,因 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B\neq A$;

(4)不成立,因 $(A-B)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B\neq A$.