空气动力学中的有限差分方法

（六系研究生用）

南京航空学院

1984.1.

目　录

第四章 Navier-Stokes 方程的有限差分解法

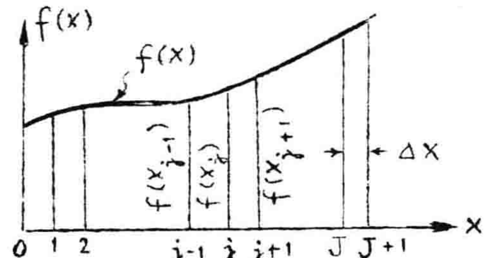
第一章　基础知识

§1　微分方程的差分近似

一、网格函数

考虑定义在区间 $[0, a]$ 上的连续函数 $f(x)$。为了近似描述该函数，我们可以将 $[0, a]$ 分成间隔为 Δx 的 $J+1$ 个等分，即 $a=(J+1)\Delta x$，分点坐标为 $x_j=j\Delta x$，$j=1, 2, 3, \cdots, J$.

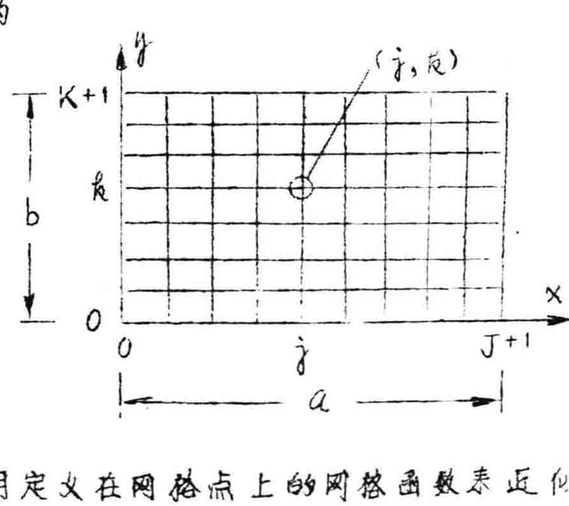
如果分割足够细，则认为定义在网格点上的函数 $f(x_j)$ 充分好地描述了连续函数 $f(x)$.



对于二维函数 $f(x, y)$，如其定义域是边长为 a 与 b 的矩形，则用平行于坐标轴的线分成网格，网格点 (j, k) 的坐标是

$$x_j=j\Delta x，\quad j=1, 2, \cdots, J$$

$$y_k=k\Delta y，\quad k=1, 2, \cdots, K$$



如果分得足够细，则认为网格函数 $f(x_j, y_k)$ 充分好地描述了连续函数 $f(x, y)$.

有限差分近似的实质是用定义在网格点上的网格函数来近似微分方程的解.

二、导数的有限差分近似

以二维函数 $u(x, y)$ 为例，利用 Talor 展开式

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)=u(x,y)+u_x(x,y)\Delta x+u_y(x,y)\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}u_{xx}(x,y)\Delta x^2+u_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}u_{yy}(x,y)\Delta y^2$$
$$+O(\Delta x^3, \Delta x^2\Delta y, \Delta x\Delta y^2, \Delta y^3)$$

可以得到u的一阶导数的近似式

$$u_x(x,y)=\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

$$u_y(x,y)=\frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+O(\Delta y)$$

定义一阶前差算子为

$$\vec{\delta}_x(\quad)=\frac{(\quad)_{j+1,k}-(\quad)_{j,k}}{\Delta x}$$

$$\vec{\delta}_y(\quad)=\frac{(\quad)_{j,k+1}-(\quad)_{j,k}}{\Delta y}$$

则导数的近似公式又可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\vec{\delta}_x u+O(\Delta x)\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\vec{\delta}_y u+O(\Delta y)$$

或者

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\vec{\delta}_x\right)u=O(\Delta x),\quad\left(\frac{\partial}{\partial y}-\vec{\delta}_y\right)u=O(\Delta y)$$

在这里，$O(\Delta x)$和$O(\Delta y)$是用前差算子近似偏导数的截断误差。对本例，截断误差是一阶的。

用同样方法定义一阶后差算子

$$\overleftarrow{\delta}_x(\quad)=\frac{(\quad)_{j,k}-(\quad)_{j-1,k}}{\Delta x}\quad,\quad\overleftarrow{\delta}_y(\quad)=\frac{(\quad)_{j,k}-(\quad)_{j,k-1}}{\Delta y}$$

也有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\overleftarrow{\delta}_x\right)u=O(\Delta x)\quad,\quad\left(\frac{\partial}{\partial y}-\overleftarrow{\delta}_y\right)u=O(\Delta y)$$

截断误差也是一阶的。

定义一阶中心差分算子为

$$\hat{\delta}_x(\ )=\frac{(\ )_{j+1,k}-(\ )_{j-1,k}}{2\Delta x}\ ,\quad \hat{\delta}_y(\ )=\frac{(\ )_{j,k+1}-(\ )_{j,k-1}}{2\Delta y}.$$

则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\hat{\delta}_x\right)u=O(\Delta x^2)\qquad,\ \left(\frac{\partial}{\partial y}-\hat{\delta}_y\right)u=O(\Delta y^2)$$

截断误差是二阶的。

二阶中心差分算子定义为

$$\hat{\delta}_{xx}(\ )=\overleftarrow{\delta}_x\overrightarrow{\delta}_x(\ )=\frac{(\ )_{j+1,k}-2(\ )_{j,k}+(\ )_{j-1,k}}{\Delta x^2}$$

$$\hat{\delta}_{yy}(\ )=\overleftarrow{\delta}_y\overrightarrow{\delta}_y(\ )=\frac{(\ )_{j,k+1}-2(\ )_{j,k}+(\ )_{j,k-1}}{\Delta y^2}$$

$$\hat{\delta}_{xy}(\ )=\hat{\delta}_x\hat{\delta}_y(\ )=\frac{(\ )_{j+1,k+1}-(\ )_{j+1,k-1}+(\ )_{j-1,k-1}-(\ )_{j-1,k+1}}{\Delta x\Delta y}$$

可以证明

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hat{\delta}_{xx}\right)u=O(\Delta x^2),\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\hat{\delta}_{yy}\right)u=O(\Delta y^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\hat{\delta}_{xy}\right)u=O(\Delta x^2,\Delta x\Delta y,\Delta y^2)$$

截断误差为二阶。

三、微分方程的差分近似

举例如下，但需指出，差分近似的形式并不是唯一的。

波动方程 $\quad u_{xx}-u_{yy}=0$

差分近似 $\quad (\hat{\delta}_{xx}-\hat{\delta}_{yy})u=0$

热传导方程　　$u_{xx}-u_y=0$

差分近似　　$(\hat{\delta}_{xx}-\overleftarrow{\delta}_y)u=0$

Poisson 方程　　$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=-f$

差分近似　　$\Delta_\delta u=(\hat{\delta}_{xx}+\hat{\delta}_{yy})u=-f$

对于最后一例，截断误差 $\tau(u)=(\Delta-\Delta_\delta)u=O(\Delta x^2,\Delta y^2)$ 为二阶。如果 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时，$\tau(u)\to 0$，则称差分方程与微分方程是相容的。

四、例：Poisson 方程的差分近似方程

将上面的有关差分近似写成具体形式，有

$$u_{j,k}=\theta_x(u_{j+1,k}+u_{j-1,k})+\theta_y(u_{j,k+1}+u_{j,k-1})+\delta^2 f_{j,k}$$

其中

$$\delta^2=\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)},\quad \theta_y=\frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)},\quad \theta_x=\frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

对于 $\Delta x=\Delta y$ 的特殊情形，$\theta_y=\theta_x=1/4$，$\delta=\Delta x/2$。这时对于 Laplace 方程（$f=0$）的特殊情形，对应的差分近似方程为

$$u_{j,k}=\frac{1}{4}(u_{j+1,k}+u_{j-1,k}+u_{j,k+1}+u_{j,k-1})$$

其物理意义是（j,k）点处的函数值等于邻近4点处函数值的算术平均。

五、适定性问题

适定的微分方程问题必须满足三个条件：1．解的存在；2．解的唯一性；　3．解连续地依赖于初边值。

差分近似问题也有类似的稳定性要求。很明显，要使差分问题稳定，其先决条件是原来的微分问题稳定。

§2 范数概念

有限差分方法是用网格函数近似微分方程的解。而网格函数本身可以看作一个多维向量，其分量的数目，即维数，等于网格点的数目。为了分析有限差分方程的解的误差以及收敛性稳定性问题，必须给这种向量的大小以一度量，这就要用范数的概念。

一、向量范数定义

任意维向量的范数是长度概念的推广。定义向量 X 的范数为一非负的数，记为 $\|X\|$，满足下列条件：

1. 当 $X \neq 0$ 时 $\|X\| > 0$，仅当 $X = 0$ 时才有 $\|0\| = 0$
2. 对任一标量 λ 及任何向量 X，均有 $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\|$
3. 对于任意向量 X 与 Y，下列三角不等式成立

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

二、向量范数例

设有 n 维向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

1. l_2 范数 $\|X\|_2$

$$\|X\|_2 = \sqrt{(X, X)} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

这是长度概念的直接推广。

2. $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

3. $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

三、收敛条件：

如果 $k\to\infty$ 时，$\|X^{(k)}-X\|\to 0$，则称向量序列 $X^{(k)}$ 收敛于向量 X，记为 $X^{(k)}\to X$。又当 $X^{(k)}\to X$ 时，$\|X^{(k)}\|\to\|X\|$。

四、矩阵范数

1．定义：对于 $n\times n$ 阶矩阵 A，定义从属于给定向量范数的矩阵范数 $\|A\|$ 为一非负实数，有

$$\|A\|=\sup_{\|X\|\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

也可以写为

$$\|A\|=\sup_{\|X\|=1}\|AX\|$$

可以证明，如此定义的范数满足下列5个条件：

i）$A\neq 0$ 时，$\|A\|>0$；仅当 $A=0$ 时，有 $\|A\|=0$

ii）对于任意标量 λ，有 $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$

iii）$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

iv）$\|AX\|<\|A\|\cdot\|X\|$

v）$\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$

2．例：

例一：可以证明，从属于 $\|X\|_1$ 的范数 $\|A\|_1$ 为

$$\|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

所以，$\|A\|_1$ 为矩阵元绝对值的列和的最大值。

例二：可以证明，从属于 $\|X\|_\infty$ 的范数 $\|A\|_\infty$ 为

$$\|A\|_\infty=\max_{i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

所以，$\|A\|_\infty$ 为矩阵元绝对值的行和的最大值。

3．从属于 l_2 范数的矩阵范数 $\|A\|_2$

正规矩阵：如果矩阵 A 满足条件 $A^*A=AA^*$，这里 A^* 表示 A 的共轭转置，则称 A 为正规矩阵。

正规阵例子：

Hermite 阵，$A=A^*$（或 $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$）

反 Hermite 阵，$A=-A^*$（或 $a_{ij}=-\bar{a}_{ji}$）

实元 Hermite 阵，即对称阵，$A=A'$（或 $a_{ij}=a_{ji}$）

实元反 Hermite 阵，即反对称阵，$A=-A'$，$a_{ij}=-a_{ji}$

酉阵，$AA^*=A^*A=I$，或 $A^*=A^{-1}$

正交阵，即实元酉阵，$AA'=I$，或 $A^{-1}=A'$

定理 1：矩阵 A 的 l_2 范数等于矩阵 A^*A 的最大特征值的平方根。

证明：

$$\|A\|_2=\max_{\|X\|_2=1}(AX,AX)^{1/2}=\max_{\|X\|_2=1}(X,A^*AX)^{1/2}$$

显然，A^*A 是正规矩阵，而且其特征值都是非负实数，可按下列次序排列

$$\Lambda_1\geqslant\Lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\Lambda_n\geqslant 0$$

设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是与这些特征值相对应的矩阵 A^*A 的正交规一特征向量，则任意向量可表示为

$$X=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

为使 $\|X\|_2=1$，必须 $|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2=1$

因为

$$A^*AX=\Lambda_1a_1e_1+\Lambda_2a_2e_2+\cdots+\Lambda_na_ne_n$$

所以

$$\|A\|_2^2 = \max_{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2=1} (\Lambda_1|a_1|^2+\cdots+\Lambda_n|a_n|^2)$$

$$\leqslant \Lambda_1(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2) = \Lambda_1$$

另一方面，当取 $X = \dot{e}_1$ 时，有

$$(X, A^*AX) = \Lambda_1$$

所以

$$\|A\|_2 = \sqrt{\Lambda_1}$$

证毕

4．谱半径：

定义：矩阵B的谱半径是其特征值模的最大值，记为 $\rho(B)$。

矩阵的 l_2 范数可以用谱半径表示为

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

可以证明：

定理2：如果A是正规矩阵，则 $\|A\|_2 = \rho(A)$

定理3：矩阵的任何一种范数都不小于其谱半径，即

$$\rho(A) \leqslant \|A\|$$

§3 迭代方法

一、迭代法收敛性的充要条件

1．迭代解法：

设有线性方程组

$$AX = F$$

为了用迭代法求解，我们将A分解为

$$A = N - P$$

其中N为便于求逆的矩阵，例如对角阵，下三角阵，三对角阵等等。则求解方程的迭代格式可设计为：

$$NX^{(n+1)}=PX^{(n)}+F$$

或者

$$X^{(n+1)}=GX^{(n)}+C \qquad (a)$$

其中 $G=N^{-1}P$ 为迭代矩阵，$C=N^{-1}F$. 为了分析收敛性，令

$$e^{(n)}=X-X^{(n)}$$

为第 n 次迭代的误差，这里 X 为精确解. 代入(a)式，有

$$e^{(n+1)}=Ge^{(n)}$$

所以，$$e^{(n)}=Ge^{(n-1)}=G^2e^{(n-2)}=\cdots=G^ne^{(0)}$$

为使迭代过程收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}X^{(n)}=X$ ，必须

$$\lim_{n\to\infty}e^{(n)}=0$$

因为 $X^{(0)}$ 为任意，故 $e^{(0)}$ 也为任意。从此得出，迭代过程收敛的充分与必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}G^n=0$$

2．定理——对任意 $X^{(0)}$ ，迭代过程收敛的充分与必要条件是G的谱半径小于一．

证明：设G为 m 阶，并且有 m 个线性独立的特征向量 v_s ，$s=1,\cdots,m$ ，故可表示

$$e^{(0)}=\sum_{s=1}^{m}c_s v_s$$

故

$$e^{(1)}=Ge^{(0)}=\sum_1^m c_s G v_s=\sum_1^m \lambda_s v_s c_s$$

$$e^{(2)}=\cdots$$

$$\vdots$$

$$e^{(n)}=\sum_1^m c_s \lambda_s^n v_s$$

故当且仅当 $\rho(G)<1$，也即对所有 S，$|\lambda_S|<1$ 时，$e^{(n)}\to 0$。

证毕

3．收敛速度

由前式：$e^{(n)}=\sum_1^m c_s \lambda_s^n v_s$

$$=\lambda_1^n\left\{c_1 v_1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n c_2 v_2+\cdots+\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n c_m v_m\right\}$$

由于第一特征值的模假设比其余的大，则当 n 为很大时，有

$$e^{(n)}\simeq\lambda_1^n c_1 v_1$$

同样地

$$e^{(n+1)}\simeq\lambda_1^{n+1} c_1 v_1$$

因此

$$e^{(n+1)}\simeq\lambda_1 e^{(n)}$$

所以

$$\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(n+1)}\|}\simeq\frac{1}{|\lambda_1|}=\frac{1}{\rho(G)}$$

或者

$$\log\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(n+1)}\|}=-\log\rho(G)$$

收敛速度以 $-\log\rho(G)$ 度量。

二、迭代收敛性的加速方法

1. Lyusternik 方法：

由前节 $e^{(n+1)} \simeq \lambda_1 e^{(n)}$

准确解为

$$
\begin{aligned}
X &= X^{(n)} + e^{(n)} \\
&= X^{(n+1)} + e^{(n+1)} \\
&\doteq X^{(n+1)} + \lambda e^{(n)}
\end{aligned}
$$

消去 $e^{(n)}$，得到

$$X \simeq \frac{X^{(n+1)} - \lambda_1 X^{(n)}}{1-\lambda_1} = X^{(n)} + \frac{X^{(n+1)} - X^{(n)}}{1-\lambda_1}$$

如果 $\lambda_1 \approx 1.0$，上式表明，相邻两次迭代的解之间的差别如果很小，这并不意味着近似解与准确解很接近。为了利用上式估计准确解的近似值，必须估计 λ_1

由所述近似，我们有

$$e^{(n+1)} - e^{(n)} \simeq \lambda_1 (e^{(n)} - e^{(n-1)})$$

或者

$$\underbrace{X^{(n+1)} - X^{(n)}}_{\parallel \text{令} \; d^{(n)}} \simeq \lambda_1 (\underbrace{X^{(n)} - X^{(n-1)}}_{\parallel \text{令} \; d^{(n-1)}})$$

所以

$$|\lambda_1| = \rho \simeq \frac{\| d^{(n)} \|}{\| d^{(n-1)} \|}$$

这里 $d^{(n)}$ 的范数可以取各种不同的型式，例如

$$\| d^{(n)} \| = \max_i \left| X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)} \right|, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

或者取

$$\| d^{(n)} \| = \sum_{i=1}^{m} | X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)} |$$

或者取

$$\| d^{(n)} \| = \left(\sum_{i=1}^{m} (X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)})^2 \right)^{1/2} .$$

2．Aitken方法

前面已经证明

$$e^{(n)} \simeq \lambda_1 e^{(n-1)}, \text{ 也即 } X - X^{(n)} \simeq \lambda_1 (X - X^{(n-1)}),$$

以及

$$e^{(n+1)} \simeq \lambda_1 e^{(n)}, \text{ 也即 } X - X^{(n+1)} \simeq \lambda_1 (X - X^{(n)}) .$$

对上面二向量方程的第 i 个分量，消去λ_1得到：

$$\frac{x_i - x_i^{(n)}}{x_i - x_i^{(n+1)}} \simeq \frac{x_i - x_i^{(n-1)}}{x_i - x_i^{(n)}} .$$

解出 x_i ，得到

$$x_i \simeq x_i^{(n+1)} - \frac{\left\{ x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right\}^2}{x_i^{(n+1)} - 2 x_i^{(n)} + x_i^{(n-1)}}$$

以上二种方法，已有人应用在跨音速流的计算中。需指出，上面二种方法，只有当迭代矩阵有一个占主要的特征值时，才有效。

§4 椭圆型方程的有限差分解法

一、差分近似方程

以Poisson方程为例，设有如下微分边值问题

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -f(x,y) \qquad (x,y) \in D$$
$$u(x,y) = g(x,y) \qquad (x,y) \in \partial D$$

对应的差分近似问题可表示为

$$\Delta_\delta u = -f_{i,j} \qquad (i,j) \in D_\delta$$
$$u_{i,j} = g_{i,j} \qquad (i,j) \in \partial D_\delta$$

如果D是矩形区域，用中心差分近似二阶导数，则对每一个内点，可以写出一个差分方程

$$-\theta_x(u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) + u_{j,k} - \theta_y(u_{j,k+1} + u_{j,k-1}) = \delta^2 f_{j,k}$$

总共有JK个内点，可以写出JK个方程，用来解JK个未知数，即网格点上的u值.

现将所有内网格点上的未知量$u_{j,k}$排成一列。构成一未知向量U．如果排列次序是逐行从下到上，而对每一行则自左到右，则有

$$U^T = (u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{J1}, \cdots, u_{1k}, u_{2k}, \cdots, u_{Jk}, \cdots, u_{1K}, u_{2K}, \cdots, u_{JK})$$

差分方程组可用矩阵形式写成

$$AU = \delta^2 F$$

很明显，矩阵A为对称矩阵，而且对角元都是1，我们可将矩阵A分解为

$$A = I + B + C$$

其中I为单位矩阵，B为对角元都等于零的下三角矩阵，C为对角元都为零的上三角矩阵.

二、误差估计

首先我们估计用有限差分近似所得的解相对于微分问题精确解的误差。

按照截断误差定义

$$\tau(u_e)=\Delta_\delta u_e-\Delta u_e$$

如果认为其中的 u_e 是微分方程问题的精确解，则 $\Delta u_e=-f$。再设 u 为差分近似问题的精确解，则又有 $\Delta_\delta u=-f$ 一起代入上式，得到

$$\tau(u_e)=\Delta_\delta u_e-\Delta_\delta u=\Delta_\delta(u_e-u)$$

此式可用矩阵形式表为

$$A(u_e-u)=\delta^2\tau$$

故

$$u_e-u=\delta^2A^{-1}\tau$$

或者

$$\|u_e-u\|\leqslant\delta^2\|A^{-1}\|\cdot\|\tau\|$$

因为 A 是对称阵，因而又是正规阵，用 l_2 范数最为方便。为了估计 $\|A^{-1}\|_2$，首先必须计算 A 的特征值。由于 A 的阶次很高，采用常规的求解特征多项式的办法是困难的。由于矩阵 A 的特殊形式，可以用如下的简便办法。

先以二阶中心差分算子为例：

$$-\hat{\delta}_{xx}u=-u_{j+1}+2u_j-u_{j-1}$$

对应的 J 阶矩阵是三对角的，可写为

$$M=\begin{bmatrix}2&-1&&&\bigcirc\\-1&2&-1&&\\&-1&2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&-1\\\bigcirc&&&-1&2\end{bmatrix}$$