馮守訓 張紹堂 馬青圖 苗驥華

小學
數學競賽解題指導

山西教育出版社

小學數學
競賽解題指導

山西教育出版社

馮守訓
張紹堂
馬青圖
苗興華

小学数学竞赛解题指导

冯守训　张绍堂

马青图　苗兴华

*

山西教育出版社出版（太原并州北路11号）

山西省新华书店发行　汾阳县印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：10.875字数：221千字

1991年8月第1版　1991年8月山西第1次印刷

印数：1—9,000册

*

ISBN 7—80578—416—7

G·410　　定价：2.85元

前　言

数学是训练思维的体操，它具有高度的抽象性，严密的科学性和应用的广泛性。数学既是科学大厦的基石，同时又是大厦顶端璀灿的明珠；竞争意识的引入更增加了数学的无穷魅力，促使越来越多的人投身到数学的神奇王国中，不断地辛勤耕耘和艰苦地奋斗，一代接一代数学家的努力，对提高整个人类的科学技术水平做出了巨大贡献。青少年是人类的希望，从小培养对科学的兴趣，激发探究数学世界的雄心和毅力，是任何一个有远见国家的大事，正因为如此，各种类型的青少年数学竞赛活动活跃于世界各国。通过这些活动，锻炼了青少年的思维，了解和掌握了灵活的解题技能、技巧和规律，使许多青少年成长为人类智慧大厦的栋梁之材。

我国是从1956年开始举办一些大城市范围内的区域性高中数学竞赛的，直到1978年，全国性的高中数学竞赛才开始进行，从1983年起，全国性的初中、高中数学竞赛才正式拉开了序幕，1986年又增设了全国小学数学竞赛项目，并于同年正式开始参加国际中学生数学奥林匹克竞赛，并取得了优异成绩。我省于1978年，1979年举办了两次全省高中数学竞赛，同时加入了全国竞赛行列，并取得较好成绩。

竞赛的好成绩，来源于平时的认真学习和赛前的科学培训。1990年，太原市参加全国小学数学奥林匹克邀请赛，初

赛成绩并不理想，分数最高者刚够及格线，太原市教研室、太原市小学数学研究会决定组织赛前集训，并请我和张绍堂同志进行了赛前的集训辅导。在集训中，同学们运用平时所学的知识，在培训教师的引导下，攻克了一个又一个堡垒，解决了一个又一个难题，通过这次集训开阔了同学们的眼界，打开了解题思路。师生辛勤的劳动结出了丰硕的成果，决赛的成绩公布后，全国共有17名同学获得一等奖，其中就有两名是太原市的参赛学生，特别是太原冶金一校的蔡颖琨同学得108分，名列这次竞赛的榜首。

为了让更多的少年朋友们得到学习提高的机会，在山西教育出版社的支持下，我们将部分讲稿编汇成册，脱稿后，又经马青图和苗兴华两位同志作了审查，最后请太原师范第一附小的王国萍老师演算了全部的例题和习题。虽然如此，由于时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请批评指正。

山西省中小学数学教学研究会

理事长　冯守训

1990年11月

目　录

第一讲

小学数学奥林匹克竞赛综述

小学数学奥林匹克竞赛的试题要求能利用算术方法解决，或利用算术方法再结合某些简单的生活方面或数学方面的常识可解决的问题。特别是一些用算术方法比用代数方法来解更为简捷的题目是热门试题。近几年来通过对全国小学数学奥林匹克竞赛试题以及全国各地的小学数学竞赛与选拔赛部分试题的分析，试题主要是从下面几个方面进行选题和命题的。

一、考核学生解题的技巧、速度和准确性

例1. 计算：$(1+3+5+\cdots+1989)$

$-(2+4+6+\cdots+1988)$

（1988年小学数学奥林匹克邀请赛初赛试题）

分析：解这个问题较好的方法是利用：$3-1=5-3=\cdots=1989-1987$的规律，运用下面的竖式示意图，分别去求$1+3+5+\cdots+1989$和$2+4+6+\cdots+1988$的值。然后再算出最后结果：

$$\begin{array}{rl} & 1+3+\cdots+1985+1987+1989 \\ +) & 1989+1987+\cdots+5+3+1 \\ \hline & \underbrace{1990+1990+\cdots+1990+1990+1990}_{995\text{个}1990} \end{array}$$

$(1+3+5+\cdots+1989)-(2+4+6+\cdots+1988)$

$$=\frac{1}{2}\times 1990\times 995-\frac{1}{2}\times 1990\times 994=995.$$

但是这种解法，又不如下面的解法巧妙。

解：$(1+3+5+\cdots+1989)-(2+4+7+\cdots+1988)$

$$=1+\underbrace{(3-2)+(5-4)+\cdots+(1989-1988)}_{\frac{1988}{2}=994\text{个}1}$$

$$=995.$$

例2．计算：

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

（1990年小学数学邀请赛初赛试题）

分析：此题较好的做法是将上下两行的运算式中相同的部分作为一个整体，例如可以将上式写成：

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}\right]$$

$$-\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}\right]\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right);$$

或写成：

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$-\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}\right]\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]$$ 等形式。

然后把括号内的数“看”作一个“整体”，即具体的数，再进行运算。为了使关系更明朗化，更方便运算，可用下面介绍的方法进行。

解：设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=a$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=b$

则有$a-b=1$。将其代入原式，则有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=a\cdot\left(b+\frac{1}{5}\right)-\left(a+\frac{1}{5}\right)\cdot b$$

$$=a\cdot b+\frac{1}{5}a-ab-\frac{1}{5}b$$

$$=\frac{1}{5}(a-b)$$

$$=\frac{1}{5}.$$

上面的这种方法叫做:“引入字母代换法”。这种方法对于“显化”题目中的关系,简化解题步骤,简化运算有重要作用,希望同学们能逐渐掌握。

例 3. 已知下面一些数:

$$1.64;\ 1.64+\frac{1}{30};\ 1.64+\frac{2}{30};\ \cdots;\ 1.64+\frac{28}{30};$$

$$1.64+\frac{29}{30}.$$

如果取每个数的整数部分,试求这些整数的和。(1990年小学数学奥林匹克初赛试题)

分析:此题只要找出从哪个数开始,它的整数部分是2即可。这是因为:$1<1.64<2$,

而$2<1.64+\frac{29}{30}<1.64+\frac{30}{30}<3$.

因为 $1.64+\frac{10}{30}=1.64+0.333\cdots<2$,

$$1.64+\frac{11}{30}=1.64+0.3666\cdots>2.$$

所以所有这些整数的和$=1\times 11+2\times 19=49$.

例 4. 求数: $\dfrac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{19}}$ 的整数部

分是几？

（1988年小学数学邀请赛复赛试题）

分析：这个题如果直接去计算它的结果，然后再决定它的整数部分是几，势必将非常麻烦，而且容易出错。如果结合这个题的具体情况，它是要决定一个数的大概大小，因此只要稍稍放宽一些范围，定出它在那两个数之间即可，这种方法数学上叫“估值”法。例如这个题目，较简便的估值方法是：

解：设这个数为x，于是有：

$$\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}}_{10个}}<x<\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{19}}_{10个}},$$

即：$1<x<1.9$，

所以这个数的整数部分是1。

例5．计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$.

分析：一看题目，应该马上知道题中“暗示”了一个信息：不要把中间的数字补齐后再进行计算，而应该连系课堂上学了的知识，特别是这些知识的正向、逆向、变相的应用，然后分析此题的规律和结构特点，其特点是：

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3},\cdots,\frac{1}{90}=\frac{1}{9\times10},$$

$$\frac{1}{110}=\frac{1}{10\times11}.$$

由分母中的乘积，联想到异分母分数相加减的运算法则，则有可能发现：

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{10\times 11}$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}.$$

到此则可能发现下面的算法：

解：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$

$$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{9\times 10}+\frac{1}{10\times 11}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$

$$+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$

$$=1-\frac{1}{11}$$

$$=\frac{10}{11}.$$

例6. 小明买了一件上衣和两条裤子，小华买了同样的一件上衣和同样的一条裤子，结果他们用去的钱数之比是3:2。已知一件上衣的价钱是3.5元，那么一条裤子的价钱是多少元？

（1988年小学数学邀请赛初赛试题）

此题的一般解法是：

解：设一条裤子的价钱是x元，根据题意列出比例式：$(3.5+2x):(3.5+x)=3:2$。然后再解。

也可设一件上衣与一条裤子之比是$1:x$，则小明和小华用去的钱数之比是：

$(1+2x):(1+x)=3:2$

根据内项的积等于外项的积可得：

$3(1+2x)=2(1+2x)$

由此解得$x=1$。所以一件上衣和一条裤子的价钱相等。

分析：注意到小明和小华用去的钱数之比是$3:2$，而小明买了一件上衣和两条裤子共三件；小华买了一件上衣和一条裤子共两件，件数比也恰好是$3:2$，这就可以得到这种上衣和裤子的单价是相等的，所以一条裤子也是3.5元。

二、能否深刻理解和灵活应用基本知识

例1. 求$1\times2\times3\times\cdots\times98\times99$运算结果的末尾有几个0。

分析：注意到$2\times5=10$，只要知道：$1\times2\times3\times\cdots\times98\times99$中的质因数分解式中有几个$(2\times5)$即可，再注意到乘积式中所含的因数2的个数比含因数5的个数多，因此只要考查乘积式中含几个因数5即可。

含因数5的数有：

5、10、15、20、30、35、40、45、55、60、65、70、80、85、90、95，每个各含有一个5的因数；25、50、75、

每个各含有2个5的因数，因此乘积式结果的末尾共含有22个零。

下面介绍此类问题的一种简便算法。

取乘积式中最后一个数（即最大数）99。

99÷5得商19余数是4，99÷25得商3余数是24，又因99＜5×5×5，运算到此结束，然后将商数19和3相加得22即为所求的结果。例如：求1×2×3×…×1982中末尾0的个数。

解：1982÷5＝396……2，

1982÷（5×5）＝79……7，

1982÷（5×5×5）＝15……107，

1982÷（5×5×5×5）＝3……107，

又1982＜5×5×5×5×5，

故乘积式末尾零的个数＝396＋76＋15＋3

＝493（个）。

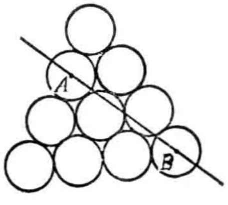

图1—1

例2．已知两个数的最大公约数是4，最小公倍数是1428，且其中一个数是84，求另一个数。

这个题请同学们自己试一试。（答案是68）

例3．十个半径相等的圆摆成如图的形状。过图1—1中所示的两个圆的圆心A、B作直线，那么直线右上方圆内图形的面积总和与直线左下侧圆内面积的总和的比是多少？（1988年小学数学邀请赛初赛试题）

分析：这儿主要是用了“对称图形”的概念和性质。常见的“对称”有两种，一种是图1—2，它由一个圆和过圆

心的一条直线组成，我们将直线两侧的图形看成两个图形，把其中的一个图形沿直线折转过来，如果能与另一个图形完全重合，我们就说这两个图形是关于这条直线对称，这条直线称为对称轴。同学们平常做剪纸游戏或剪纸手工，为了剪出花瓶、茶杯等有对称性的图案，一般是将一张纸对折，沿折线画出半个图案，沿画好的线剪好展开后即可。另一种对称如图1—3，图中$ABCD$是平行四边形，O是平行四边形

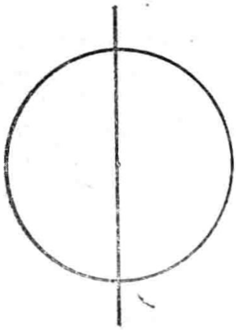

图1—2

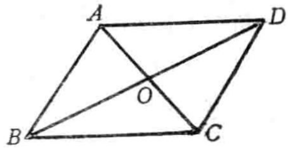

图1—3

两条对角线AC与BD的交点，同学们可以在纸上画上一个这样的图形，然后把其中一个三角形例如三角形ABC或三角形ODC沿线剪开，然后从原位置开始绕O点旋转180°，之后同学们就会发现，此时三角形ABC与三角形ADC会完全重合，或者三角形ODC将会与与三角形OAB完全重合。满足这样性质的两个图形，称为这两个图形关于O点对称，O点称为对称中心。

对称图形有许多性质，其中一个很显然的性质就是：对称的图形一定是“全等的图形”，也就是前面说的这两个图

形可以完全重合。能完全重合的两个图形，它们的面积当然相等了。这个简单的知识（数学上称之为“性质”）在面积计算中常常用到。在这一个题中，同学们只要能发现图1—4是一个中心对称图形即可解决问题。其中直线上面的图形和直线下面的图形关于P点对称。因为图中共有四个圆，因此直线上面图形的总面积等于两个圆的面积，到这儿为止，则很容易发现原图中直线右上方共四个圆面积，左下侧共有六个圆面积，直线两边的面积比是2：3。

例4．把正三角形每边三等分，将各边的中间线段取来向外面作小正三角形，得到一个六角形。再将这个六角形的六个“角”（即小正三角形）的两边三等分，又以它的中间段向外作更小的正三角形。这样就得到如1—5所示的图形。如果这个图形的面积是1，那么原来的正三角形的面积是多少？（1988年小学数学邀请赛复赛试题）

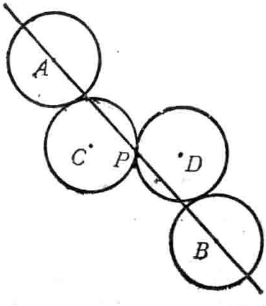

图1—4

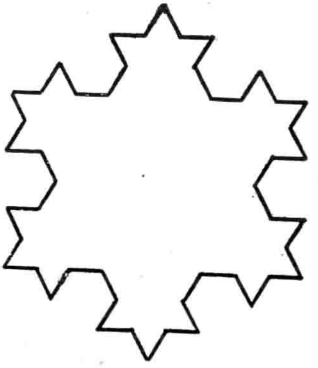

图1—5

分析：小学数学中分数定义是：把单位1分成几等份，表示这样的一份或者几份的数。为了形象地表示和理解这一