

金融数学丛书

信用风险估值的 数学模型与案例分析

□ 任学敏 魏 嵬 姜礼尚 梁 进 著

高等教育出版社

金融数学丛书

信用风险估值的 数学模型与案例分析

□ 任学敏 魏 嵬 姜礼尚 梁 进 著

XINYONG FENGXIAN GZHIYU SHUXUE MOXING YU ANLI FENXI

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是《金融衍生品定价的数学模型与案例分析》的续篇，全书同样由两部分组成：理论篇与案例篇。

理论篇主要通过对公司债券的定价来全面介绍研究信用风险的两个基本方法：结构化方法和约化方法。在对两种方法比较的基础上，阐明了它们之间的关系，并进一步介绍了马氏链方法的理论基础及其应用。特别在考虑交易对手风险的环境下，建立一些信用风险产品（如利率互换、CDS等）定价的随机模型以及相应的偏（常）微分方程（组）定解问题。

案例篇针对一些含有信用风险的金融产品（如公司债、衍生产品、信用衍生产品），通过对具体实施条款的分析，建立数学模型并求出显式解或数值解，并对产品的定价以及所面临的信用风险进行估值分析，其中不少案例涉及违约的相关和传染性及交易对手风险的度量。

本书可作为金融数学专业和金融管理等领域的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

信用风险估值的数学模型与案例分析/任学敏等著

—北京：高等教育出版社，2014.4

ISBN 978-7-04-038889-3

I. ①信… II. ①任… III. ①贷款风险管理—定价模型—数学模型—案例 IV. ①F830.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 279930 号

策划编辑 赵天夫

责任编辑 赵天夫

封面设计 张楠

版式设计 王艳红

责任校对 杨凤玲

责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 高教社(天津)印务有限公司

开本 787mm × 960mm 1/16

印张 21.75

字数 400千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版次 2014年4月第1版

印次 2014年4月第1次印刷

定价 49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 38889-00

序 言

信用风险是由协议一方的信用质量的潜在变化（违约或信用等级下降）而使对方蒙受损失的概率分布。

经典的信用质量分析方法基于静态历史数据，采用传统的统计方法，预估未来可能发生的违约概率和造成的损失分布。自 1974 年 R. Merton 发表了公司债券定价的著名论文以来，随着 Black-Scholes-Merton 未定权益的定价理论的建立和发展，研究者开创了一个通过市场变量（公司资产、股价、利率……）的动态演化过程直接估计未来信用事件发生的概率以及所造成损失概率分布的新思路。随着信用衍生产品的不断发展，这个新的研究方法得到了前所未有的蓬勃发展。

众所周知，信用衍生产品开发的初衷是为了转移和分散信用风险，实现信用风险管理的目的。但由于它与其他金融衍生产品一样具有极大的杠杆比，因此它自然成为金融市场的新宠，受到广大投资者青睐，成为他们逐利的手段。但是物极必反，盲目吹捧、过度开发信用衍生产品，终于在 2007 年、2008 年由于美国利率上升，导致房价大跌，酿成一场灾难性的后果！由次贷危机引发的这场金融海啸席卷全球，并进一步蔓延到实体经济。信用衍生产品成为造成这场金融危机的众矢之的，广受人们的责难。处于后危机时代的今天，人们都在进行认真的反思，总结危机发生和蔓延的原因，吸取应有的经验教训。

信用衍生产品与其他所有金融衍生产品一样是一把双刃剑，它既是风险管理的重要工具，又是吸引投资的重要金融产品。恰当地使用信用衍生产品必将有效地提高金融市场的效率，对活跃金融市场、化解金融风险起到积极的作用，但在缺乏有效监管的情况下，过度开发和盲目滥用，必将带来难以估量的严重

后果。

因此简单地把引发这场金融危机的根源归结于信用衍生产品的开发实在是失公允。针对当前中国的金融市场现状：市场比较缺乏活力，投资品种比较有限，风险管理办法比较缺乏，特别是中小企业融资比较困难，缺乏有效的渠道，因此强调金融创新，加强信用缓释工具的开发，重视信用风险度量和管理等应该仍是当前中国金融界亟须解决的重要课题。为了增加市场的透明度，使每个发行者、经营者、投资者以及监管人员都能对所从事的信用衍生产品的风险有一个清晰的了解，有必要使每个相关的从业人员知晓所经营的信用衍生产品估值的模型、方法和原理，这将有助于他们能根据市场的变化，做出及时的判断和决策。因此，培养一支高素质的精通信用衍生产品设计、开发和风险管理的专业队伍，对当前中国金融界来说是刻不容缓的大事。本书的编著者希望本着这个目标做一点微薄的贡献。

本书与我们在 2008 年出版的专著《金融衍生产品定价的数学模型与案例分析》采用相同的编写风格，希望从理论与应用两个层面上，阐明基于 Black-Scholes-Merton 未定权益的定价理论，建立使用风险估值研究的数学模型、方法、原理和应用。力图体现理论与实践相结合，数学与金融相呼应，以及数学各分支（特别是随机分析、偏微分方程与计算方法等分支）之间的相互交叉和渗透。本书分成两大篇：理论篇与案例篇。前者可以作为《金融衍生产品定价的数学模型与案例分析》理论篇的延伸和发展。众所周知，信用风险估值的关键在于对公司违约风险的刻画，常用的方法有两大类：

1. 结构法 (Structure Approach)，把公司违约看成是一个内在过程。以公司资产为标的，根据它的债务状况设置违约“门槛”，以资不抵债为违约准则，在此基础上建立信用风险估值的数学模型，对此，人们称之为结构法。

2. 约化法 (Reduced Form Approach)，把公司违约看成是一个外生过程。对导致公司违约的一切因素和经济背景进行约化，把违约的发生看成是一个不可预测的概率事件，直接通过违约发生的危险率 (Hazard Rate) —— 违约强度来刻画，在此基础上建立信用风险估值的数学模型，对此，人们称之为约化法。

在理论篇，我们首先以随机分析观点深入介绍结构法和约化法的理论基础，并结合两个典型的含信用风险的金融产品 —— 公司债券和信用违约互换 (Credit Default Swap, CDS)，建立它们定价的结构法随机模型和约化法随机模型，然后进一步利用倒向 Kolmogorov 方程和 Feynman-Kac 公式导出相应的偏微分方程 (组) 的终值问题或终 - 边值问题。

在案例篇，我们介绍 20 个具有信用风险的实际案例，分别在结构化框架或

约化框架下建立它们定价和风险分析的数学模型, 并通过求解和数值计算, 求出它们的数值解, 分析它们的金融意义. 我们希望通过这些具体案例的建模、求解和分析过程, 显示应用信用风险估值的原理, 研究和解决金融实际问题的基本思路和方法, 以期通过举一反三, 对读者——特别是研究金融数学的师生和金融业界的有关从业人员有所启示.

本书的理论篇是魏崑在他的学位论文基础上经过扩充和整理写成的. 他在导师姜礼尚的推荐下, 曾以此为蓝本, 于 2012 年夏先后两次在苏州大学与同济大学举办的讨论班上做了 20 小时的系统演讲, 深得听众的欢迎, 取得了良好的教学效果. 本书的案例篇主要是由任学敏负责编撰的, 这里主要包括他本人以及他指导下的研究生所写的论文, 此外亦包含了梁进与她指导下的研究生所写的五篇论文, 以及姜礼尚、徐承龙与他们的研究生所写的论文. 姜礼尚和任学敏共同负责了本书的全面审稿、校订和编辑加工等工作.

本书可以作为金融数学专业和金融工程专业的教学用书和参考教材, 适用于这两类专业的教师、研究人员以及攻读这两类专业的本科生和研究生. 本书同时可以作为金融、保险、管理以及应用数学等领域的参考用书, 适用于这些领域的从业人员和教师, 特别是正在从事信用风险分析和衍生产品设计的金融(保险) 分析师、金融(保险) 机构和决策人员以及相关的研究工作者.

本书得到国家重点基础研究发展计划(973 计划) 子课程“信用风险分析和信用衍生产品定价”课题组的支持, 并资助出版. 此外, 还得到了高等教育出版社赵天夫编辑的热忱关心和支持. 研究生耿利芳、施林嵩、许蔚雯等做了大量文字输入、编辑工作. 为此, 我们表示深切的感谢.

姜礼尚

同济大学风险管理研究所

2013 年 3 月

目 录

理 论 篇

第 1 章 信用风险简介	3
1.1 公司债券	4
1.2 含有信用风险的衍生品的一般模型	5
1.3 数学方法	5
1.4 小结	6
第 2 章 结构化方法	7
2.1 Merton 模型	7
2.2 PDE (偏微分方程) 方法	8
2.3 首次通过模型	9
2.4 小结	10
第 3 章 约化方法	11
3.1 单个违约时间	11
3.1.1 风险过程 (Hazard Process)	11
3.1.2 违约时间的构造	12
3.1.3 违约时间的模拟	13
3.1.4 重要定理	13

3.1.5 PDE (偏微分方程) 方法	16
3.2 多个违约时间	18
3.2.1 准备工作	18
3.2.2 条件独立	18
3.2.3 违约时间的构造	19
3.2.4 违约时间模拟	20
3.2.5 重要定理	21
3.3 含有对手信用风险的 CDS 定价 —— 约化方法应用	23
3.3.1 含有对手信用风险的衍生品的一般模型	23
3.3.2 不含对手信用风险的 CDS 定价	24
3.3.3 含有对手信用风险的 CDS 定价	24
3.3.4 交易对手风险表示定理	25
3.3.5 偏微分方程方法	27
3.4 小结	28
第 4 章 结构化方法和约化方法之间的关系	29
4.1 结构化方法框架下的信用风险产品 (回顾)	29
4.2 约化框架下的结构化方法	30
4.3 小结	37
第 5 章 马氏链方法	39
5.1 连续时间马尔可夫链	39
5.1.1 时齐马尔可夫链	40
5.1.2 非时齐马尔可夫链	41
5.1.3 与状态转移相关的鞅	43
5.2 连续时间条件马尔可夫链	44
5.2.1 条件马氏链的定义和构造	44
5.2.2 与状态转移相关的鞅	49
5.2.3 正向 Kolmogorov 方程	49
5.3 含有对手信用风险的 CDS 定价 —— 马尔可夫链模型的应用	50
5.3.1 现金流	50
5.3.2 定价模型	51
5.3.3 马氏链模型	53
5.3.4 偏微分方程方法	57

5.4 信用等级变换对 CDS 定价的影响	58
5.5 小结	61
第 6 章 风险结算	62
6.1 风险结算简介	62
6.2 风险结算下含有对手信用风险的 CDS 定价	63
6.2.1 模型建立	63
6.2.2 计算方法	64
6.2.3 数值结果	65
6.3 小结	66
参考文献	67
附录 A 约化方法下的美式期权	71
A.1 美式看跌期权	71
A.2 约化方法下的美式期权	72
A.3 总结	73
附录 B 定理证明	74
B.1 CIR 过程对应的偏微分方程的极值原理	74
B.2 定理 6.1 的证明	75
B.3 定理 6.2 的证明	76
案 例 篇	
第 1 章 约化方法下可展期企业债券定价	79
1.1 问题的提出	79
1.2 模型和求解	79
1.2.1 基本假定	79
1.2.2 定价公式	80
1.2.3 一些数值结果和分析	83
1.3 结论	87
参考文献	87

第 2 章 同时有短期和长期债券的公司债券定价	89
2.1 问题的提出	89
2.2 数学模型和求解	89
2.2.1 基本假定	89
2.2.2 短期债券 (到期日为 T_1) 的定价	91
2.2.3 长期债券 (到期日为 T_2) 的定价	92
2.3 数值结果及分析	98
2.3.1 短期债券随各个因素的变化情况	99
2.3.2 长期债券在 $[0, T_1]$ 上的变化情况	100
2.4 结论	102
参考文献	102
第 3 章 信用关联结构性存款的定价	103
3.1 引言	103
3.2 基本假定	104
3.3 定解问题的简化及求解	106
3.4 结论	111
参考文献	111
第 4 章 有偿债基金机制的公司债定价模型	113
4.1 问题的提出	113
4.2 数学模型和求解	113
4.2.1 基本假定	113
4.2.2 模型建立及求解	115
4.3 数值结果及分析	118
4.4 结论	121
参考文献	121
第 5 章 约化方法下有第三方担保的企业债券定价	123
5.1 问题的提出	123
5.2 模型和求解	123
5.2.1 基本假定	123
5.2.2 定价公式	124

5.3 金融意义分析	125
参考文献	128
第 6 章 考虑相关性的第三方担保价值评估	129
6.1 问题的提出	129
6.2 基本假定	130
6.3 模型建立	131
6.4 数值计算	133
参考文献	137
第 7 章 违约传染性 —— 公司持有其他公司的股权	138
7.1 问题的提出	138
7.2 模型和求解	139
7.2.1 基本假定	139
7.2.2 定价公式	139
7.3 模型的分析 and 金融意义	141
参考文献	142
第 8 章 违约传染性 —— 公司持有其他公司的债券	143
8.1 引言	143
8.2 基本假定和数学模型	143
8.2.1 基本假定	143
8.2.2 B 公司债券的定价和其违约时刻的概率密度函数	144
8.2.3 A 公司债券的定价	145
8.2.4 不可料事件对 A 公司违约概率的影响	150
8.3 模型计算与结果分析	151
8.4 附录	156
参考文献	162
第 9 章 双方互相担保公司债券定价与风险分析	164
9.1 引言	164
9.2 违约时间的构建	165
9.3 定价模型	166

9.4 定价公式	167
9.5 金融意义分析	172
9.6 数值结果和分析	175
9.7 结论	179
9.8 附录	179
参考文献	185
第 10 章 标准 CDS 定价	186
10.1 问题的提出	186
10.2 模型的建立	189
10.3 模型的求解	191
10.4 数值计算	192
参考文献	194
第 11 章 一篮子信用违约互换定价	196
11.1 问题的提出	196
11.2 模型的建立	198
11.3 模型的求解	199
11.4 数值计算	203
参考文献	204
第 12 章 结构化模型下考虑交易对手风险 CDS	
合约定价模型	205
12.1 前言	205
12.1.1 交易对手风险	205
12.1.2 信用风险模型	207
12.1.3 错向风险	207
12.1.4 信用违约互换	208
12.2 考虑交易对手风险 CDS 合约定价模型	209
12.2.1 现金流分析	209
12.2.2 模型建立	210
12.2.3 模型求解	212

12.3 数值计算	214
12.4 结论	216
参考文献	216
第 13 章 结构化模型下的贷款违约互换定价	218
13.1 前言	218
13.2 模型建立	219
13.2.1 符号假设	219
13.2.2 模型建立	220
13.3 模型求解	221
13.3.1 LCDS 的预期赔付	221
13.3.2 截至违约时刻 LCDS 合约已经支付的保费	222
13.4 解的性质分析与算例	223
13.4.1 预期损失与利率 r , 房价 H 和时间 t 的关系	223
13.4.2 保费率与利率 r 和房价 H 的关系	225
13.4.3 保费率与相关性系数的关系	225
13.4.4 保费率与早偿强度之间的关系	227
13.5 结论	228
13.6 附录	228
参考文献	231
第 14 章 考虑交易对手违约的单名 LCDS 定价 及其 CVA 计算	232
14.1 引言	232
14.2 LCDS 问题的研究	233
14.2.1 条件独立假设下的约化模型	233
14.2.2 单名 LCDS 定价公式	234
14.2.3 单因子反 CIR 模型及模型求解	235
14.3 单名 LCDS 的 CVA 计算模型	238
14.4 数值分析	240
14.5 对错位风险的讨论	244
14.6 小结	245
参考文献	245

第 15 章 信用攸关的利率互换定价研究	247
15.1 引言	247
15.2 CCIRS 定价的 PDE 模型	248
15.2.1 模型假设	249
15.2.2 模型推导	249
15.3 模型计算与结果分析	251
15.3.1 两种格式选择的定性分析	251
15.3.2 CCIRS 价格函数的计算结果	253
15.3.3 CCIRS 价格函数与相关参数的关系	254
15.3.4 参数取值与计算结果的进一步说明	257
15.4 小结	257
参考文献	257
第 16 章 结构化方法下欧式价差期权定价	259
16.1 前言	259
16.2 数学模型	260
16.2.1 基本假定 (对发行债券的公司)	260
16.2.2 关于价差期权的假定	261
16.3 问题的求解	262
16.3.1 公司债券价格的确定	262
16.3.2 信用价差期权的定价	263
16.4 附录	264
参考文献	267
第 17 章 本外币贷款风险比较及定价模型	269
17.1 问题的提出	269
17.2 模型的基本假设	270
17.3 模型的建立	271
17.3.1 公司违约概率的数学模型	271
17.3.2 本外币贷款价值的数学模型	273
17.4 数值计算及分析	274
17.5 结论	277
参考文献	277

第 18 章 具有违约观察期公司债券的定价	279
18.1 引言	279
18.2 Nash 均衡分配	281
18.2.1 基本假定	281
18.2.2 Nash 均衡分配	282
18.3 给定违约边界时股票和公司债券定价模型	282
18.4 自由边界下股票定价模型	287
18.5 股票和公司债券定价公式和最佳违约边界	289
18.6 清算概率、最优杠杆和信用利差	291
18.6.1 清算概率	291
18.6.2 最优杠杆	292
18.6.3 信用利差	293
18.7 数值计算	293
18.8 结论	299
18.9 附录	300
参考文献	306
第 19 章 一类创新型权证的数学模型	307
19.1 问题的提出	307
19.2 数学模型	308
19.2.1 基本假定	308
19.2.2 建立方程	308
19.2.3 有担保和无担保时的定解条件与求解	309
19.3 数值分析	313
参考文献	318
第 20 章 由股票期权报价计算违约强度	319
20.1 引言	319
20.2 基本模型	320
20.2.1 股票价格模型	320
20.2.2 标的股票可违约的期权定价模型	321

20.3 违约强度的期限结构	322
20.3.1 模型提出	322
20.3.2 基于正则化方法的数值微分	324
20.4 实例计算	325
20.4.1 基本模型: 常数违约强度	325
20.4.2 违约强度的期限结构	326
20.5 结论	328
20.6 附录	328
参考文献	331

理 论 篇
