Yan Yuan
燕园教育

2015考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学
历届真题15天突破
数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎清华大学　王　欢
◎北京大学　王德军　主编
◎首都师范大学　童　武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破

数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

[redacted]

◎清华大学 王 欢
◎北京大学 王德军 主编
◎首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破.数学一/王欢主编.—北京：中国石化出版社，2014.1

ISBN 978-7-5114-2527-0

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第285700号

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街58号

邮编:100011　电话:(010)84271850

读者服务部电话:(010)84289974

http://www.sinopec-press.com

E-mail:press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 12.75印张 317千字

2014年3月第1版 2014年3月第1次印刷

定价：30.00元 （赠送MP3光盘）

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》

《考研数学主观题23天突破500题　数学一》

《考研数学主观题13天突破500题　数学二》

《考研数学主观题22天突破500题　数学三》

《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》
《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第1天

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)下列曲线有渐近线的是(　　).

(A)$y=x+\sin x$　　　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　　　(D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

(2)设函数$f(x)$具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上(　　).

(A)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(B)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当$f''(x)\leqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(D)当$f''(x)\leqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(3)设$f(x)$是连续函数,则$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$(　　).

(A)$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B)$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4)若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{apeR}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$,则$a_1\cos x+b_1\sin x=$(　　).

(A)$2\sin x$　　(B)$2\cos x$　　(C)$2\pi\sin x$　　(D)$2\pi\cos x$

(5)行列式$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$(　　).

(A)$(ad-bc)^2$　(B)$-(ad-bc)^2$　(C)$a^2d^2-b^2c^2$　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

(6)设 a_1,a_2,a_3 是3维向量,则对任意常数 k,l,向量 a_1+ka_3,a_2+la_3 线性无关是向量 a_1,a_2,a 线性无关的(　　).

(A)必要非充分条件　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　(D)既非充分又非必要条件

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=$(　　).

(A)0.1　(B)0.2　(C)0.3　(D)0.4

(8)设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立,且方差均存在,X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$,随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,则(　　).

(A)$EY_1>EY_2,DY_1>DY_2$　(B)$EY_1=EY_2,DY_1=DY_2$

(C)$EY_1=EY_2,DY_1<DY_2$　(D)$EY_1=EY_2,DY_1>DY_2$

二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点(1,0,1)处的切平面方程为________.

(10)设 $f(x)$ 是周期为4的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,则 $f(7)=$________.

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$________.

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲面积分 $\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是1,则 a 的取值范围________.

(14)设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\0,其他\end{cases}$,其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本,若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计,则 $c=$________.

三、解答题:15~23小题,共94分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分10分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分10分)

设函数 $f(u)$ 具有2阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0$,

$f'(0)=0$,求$f(u)$的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设Σ为曲面$z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(19)(本题满分 10 分)设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$,$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$,

且级数$\sum\limits_{x=1}^{\infty}b_n$收敛.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{x\to\infty}a_n=0$.

(Ⅱ)证明:级数$\sum\limits_{x=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

(20)(本题满分 11 分)设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$E$为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组$Ax=0$的一个基础解系; (Ⅱ)求满足$AB=E$的所有矩阵B.

(21)(本题满分 11 分)证明n阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,在给定$X=i$的条件下,随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求Y的分布函数$F_Y(y)$;

(Ⅱ)求$E(Y)$

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的分布函数为$F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{\frac{x2}{\theta}},x\geqslant 0\\0,\ x-<0\end{cases}$,其中$\theta$是未知参数且大于零.$X_1$、$X_2$、$\cdots$、$X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.

(Ⅰ)求$E(X)$与$E(X^2)$;

(Ⅱ)求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数a,使得对任何$\varepsilon>0$,都有$\lim\limits_{x\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

参考答案与解析

一、选择题

1.【考点】 曲线的斜渐近线为

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$,其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 四个选项中,

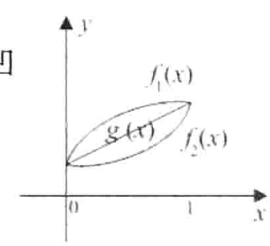
(A) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在;

(B)和(D) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$不存在;

(C) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

综上,只有选项 C 有斜渐近且为 $y=x$.

2.【考点】 导数几何意义的应用

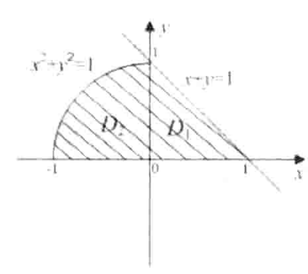


【解析】 $f'(x)$和$f''(x)$分别对应函数$f(x)$所表示曲线的斜率和凸凹性;

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$,表示$f(x)$在$[0,1]$区间内两个端点的连线。据此考虑作如右图:

根据曲线形状可知,$f_1'(x)\geqslant0$,$f_2'(x)\geqslant0$,$f_1''(x)\leqslant0$,$f_2''(x)\geqslant0$,$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$由此可判断,当$f''(x)\geqslant0$时,$f(x)\leqslant g(x)$,正确答案为 D.

3.【考点】 交换积分次序、积分坐标转换



【解析】 题设积分区域为 $-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant1-y$,$0\leqslant y\leqslant1$,如图所示.

换成极坐标为,

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta};D_2:\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant1$$

故正确答案为 D.

4.【考点】 二元函数的极值和最值

【解析】 令 $f(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$,令

$$f_a'=-2\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)\cos x\mathrm{d}x=2a\pi=0,\text{解得 }a=0;$$

$$f_b'=-2\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)\sin x\mathrm{d}x=2b\pi-4\pi=0,\text{解得 }b=2.$$

根据极值的唯一性且有最值可知,$a_1=a=0$,$b_1=b=2$ 时函数$f(a,b)$取得最小值,故正确答

案为A.

5.【考点】 行列式求值

【解析】

$$原行列式=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-)^{2\cdot 2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2$$,即正确答案为B.

6.【考点】 向量组的线性相关性

【解析】 由$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$可知,因为$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)$是二维向量组,而$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是三维向量组,所以$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关,无法推出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,条件不充分;而当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时,因为$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$,所以$r(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=2$,即$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关,条件充分.

综上,正确答案为A.

7.【考点】 随机事件概率的运算

【解析】 因为随机事件A和B相互独立,所以有$P(AB)=P(A)P(B)$.

又$P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))$,

代入$P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$可得$P(A)=0.6$,

则$P(B-A)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.6\cdot 0.5=0.2$,正确答案为B.

8.【考点】 随机变量的数学期望与方差

【解析】 $EY_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)$;

$$EY_2=E\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)=EY_1;$$

$$EY_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y^2\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)$$

$$DY_1^2=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)-\frac{1}{4}(EX_S1+EX_2)^2$$

$$=\frac{1}{4}[EX_1^2-(EX_1)^2]+\frac{1}{4}[EX_2^2-(EX_2)^2]+\frac{1}{4}(EX_1^2+EX_2^2-2EX_1EX_2)$$

$$=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}(EX_1-EX_2)^2$$

$DY_2^2=D\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{4}(DX_1+DX_2)\leqslant DY_1^2.$

综上,正确答案为 D.

二、填空题

9.**【考点】** 曲面的切平面方程

【解析】 题设曲面方程求偏导数可得,

$Z_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x,Z_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x)$,

则在点(1,0,1)处,$Z_x\big|_{(1,0,1)}=2,Z_y\big|_{(1,0,1)}=-1$

切平面方程为$2(x-1)+(-1)\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-1)=0$,即$2x-y-z-1=0$.

10.**【考点】** 函数的周期性、奇偶性

【解析】 因为$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,

所以$f(7)=f(2\cdot4-1)=f(-1)=-f(1)$,且$f(0)=0$.

由$f'(x)=2(x-1$ 可得$f'(x)=x^2-2x+c$,

又$f(0)=0$,则$c=0$,即$f(x)=x^2-2x$ 且$f(1)=-1$,

则$f(7)=-f(1)=1$.

11.**【考点】** 微分方程的解

【解析】 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 两边同时除以 x 可得 $y'-\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=0$,

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入上式可得 $u+x\frac{du}{dx}-u\ln u=0$

经整理得$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$,

两边积分得$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$,即$\int\frac{d(\ln u-1)}{\ln u-1}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln u-1=cx$

从而 $u=e^{cx+1}$,即 $y=xe^{cx+1}$,

将 $y(1)=e^3$ 代入上式可得 $c=2$,故 $y=xe^{2x+1}$.

12.**【考点】** 曲面积分

【解析】 根据柱面和平面方程可令

$x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=-y=-\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$

$$\begin{aligned}\text{则}\int_L z\,dx+y\,dz&=\int_0^{2\pi}[-\sin\theta(\sin\theta)+\sin\theta(-\cos\theta)]d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1-\cos2\theta-\sin2\theta]d\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{4\pi}[1-\cos t-\sin t]dt=\pi\end{aligned}$$

13.**【考点】** 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,设其三个特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则$\lambda_1$

$+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为 1,所以有且只有一个特征值为负值,不妨设 $\lambda_1<0$,则 $\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$,从而有 $|A|=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$.

当 $|A|=a^2-4=0$,即 $a=\pm2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -a\\ 0 & \lambda+1 & -2\\ -a & -2 & 0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,满足题意。故综上有,$-2\leqslant a\leqslant2$.

14.【考点】 无偏估计量

【解析】 $EX^2=\int_\theta^{2\theta}\frac{2X}{3\theta^2}\cdot x^2\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3\mathrm{d}\theta=\frac{x^4}{6\theta^2}\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5}{2}\theta^2$,

则 $E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=cE(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=c\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2$,$c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【解析】 函数 $f(x)$ 两边分别对 x,y 求偏导数可得,

$3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0$,则 $y'=-\dfrac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}$;

令 $y'=-\dfrac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}=0$,则得 $y=-2x$,代入原方程可得 $x=1,y=-2$;

又 $y''=-\dfrac{(2y\cdot y'+2y+2x\cdot y')(3y^2+2xy+x^2)-(y^s2+2xy)(6y\cdot y'+2y+2x\cdot y'+2x)}{(3y^2+2xy+x^2)^2}$,

则代入 $x=1,y=-2$ 可得 $y''=\dfrac{4}{9}>0$,故 $x=1$ 为极小值点,极小值为 $y=-2$.

17.【解析】 由 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot\mathrm{e}^x\sin y$

$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=f''\cdot(\mathrm{e}^x\cos y)^2+f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y,\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=f''\cdot(\mathrm{e}^x\sin y)^2-f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y$

则 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}f''=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x},f''=4z+\mathrm{e}^x\cos y$

令 $u=e^x\cos y$，则 $f''(u)=4f(u)+u$，$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$

又 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，则有 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=\frac{1}{16}$，$C_2=-\frac{1}{16}$，

故综上有，$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

18.【解析】 令 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant1)$，取其下侧，则 Σ_1 和 Σ 可围成封闭的几何体 Ω. 则由高斯公式可得，

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}v=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x^2+y^2)-6x-6y+7]\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x^2+y^2)+7]\mathrm{d}v=-\int_0^1\mathrm{d}z\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}[3(x^2+y^2)+7]\mathrm{d}s$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}(3r^2+7r)r\mathrm{d}r=-2\pi\int_0^1(\frac{3}{4}r^4+\frac{7}{2}r^2)\Big|_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi\int_0^1(\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{2}z)\mathrm{d}z=-2\pi(\frac{1}{4}z^3+\frac{7}{4}z^2)\Big|_0^1=-4\pi.$$

19.【考点】 幂函数及其敛散性

【解析】

（Ⅰ）因为 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，且 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$，

所以 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$，且 $a_n<b_n$，即 $0<a_n<b_n$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{n}b_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，根据极限的夹逼准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，得证.

（Ⅱ）由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 可得 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$，

$$从而\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{2\sin(\frac{b_n+a_n}{2})\sin(b_n-a_n)}{2},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 且 $0<a_n<b_n$，所以 $0<\frac{b_n+a_n}{2}<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{b_n-a_n}{2}<\frac{\pi}{2}$

$$且\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+a_n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-a_n}{2}=0,0<\frac{\sin(\frac{b_n+a_n}{2})}{\frac{b_n+a_n}{2}}<1,0<\frac{\sin(\frac{b_n-a_n}{2})}{\frac{b_n-a_n}{2}}<1$$

$$从而\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin(\frac{b_n+a_n}{2})\sin(\frac{b_n-a_n}{2})}{\frac{b_n+a_n}{2}\cdot\frac{b_n-a_n}{2}}\cdot\frac{2\cdot\frac{b_n+a_n}{2}\cdot\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}<\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\frac{b_n}{2}$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{n} b_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{b_n}{2}$ 收敛，由比较收敛法可知，$\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛，得证.

20.【**考点**】 矩阵方程组的解

【**解析**】

（Ⅰ）先对矩阵作初等变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

则可得方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$.

（Ⅱ）令矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$，

$$\text{则 } AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}&x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}&x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}\\x_{21}-x_{31}+x_{41}&x_{22}-x_{32}+x_{42}&x_{23}-x_{33}+x_{43}\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}&x_{12}+2x_{22}-3x_{42}&x_{13}+2x_{23}-3x_{43}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

则可得三个方程组，

$$\begin{cases}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}=1\\x_{21}-x_{31}+x_{41}=0\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}=0\end{cases},\begin{cases}x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}=0\\x_{22}-x_{32}+x_{42}=1\\x_{12}+2x_{22}-3x_{42}=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}=0\\x_{23}-x_{33}+x_{43}=0\\x_{13}+2x_{23}-3x_{43}=1\end{cases}$$

对各方程组的增广矩阵实行初等变换分别可得，

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}$$

据此可解方程组得到,

$$\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\\x_{41}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+2\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\\x_{42}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+6\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\\x_{43}\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3-1\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix},$$

综上可得,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$(其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数).

21.**【考点】** 矩阵的相似性

【解析】依题可令矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots\lambda_n=0$;

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=n,\mu_2=\cdots\mu_n=0$;

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;

又 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,对应有 $n-1$ 个特征向量,故 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

综上,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同且均可对角化,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,得证.

22.**【考点】** 随机变量的分布函数及数字特征

【解析】

(Ⅰ)$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid x=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$

当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $0<y\leqslant 1$ 时,$F_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{3y}{4}$;

当 $1<y<2$ 时,$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{y}{4}+\frac{1}{2}$;

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$,

综上得 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3y}{4}, & 0<y\leqslant 1\\ \dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}, & 1<y\leqslant 2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$

（Ⅱ）由 Y 的分布函数可得其分布概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y\leqslant 1\\ \dfrac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

据此，$EY=\int_0^1\dfrac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2\dfrac{1}{4}y\mathrm{d}y=\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}$.

23.【考点】 参数估计

【解析】

（Ⅰ）由题设分布函数求导可得其分布概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0\end{cases}$,

则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{2x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 } t=\frac{x^2}{\theta}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

$=\sqrt{\theta}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$;

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{2x^3}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 } t=\frac{x^2}{\theta}}\theta\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta.$

（Ⅱ）似然函数 $L(\theta)=\dfrac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta}}$

则 $\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}$,

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2}=0$，得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

（Ⅲ）由大数定律可知，$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $EX^2=\theta$,

故存在 $a=\theta$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon\}=0$.