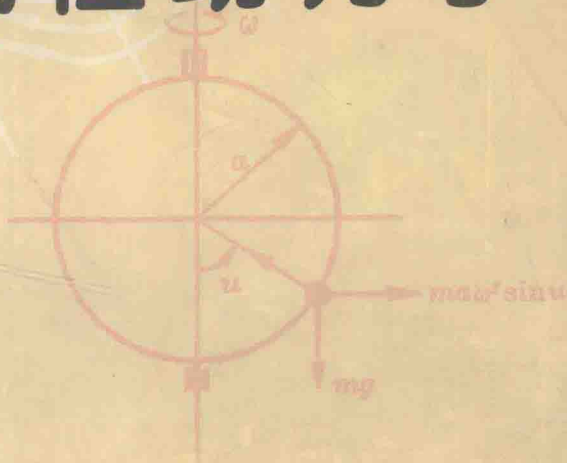
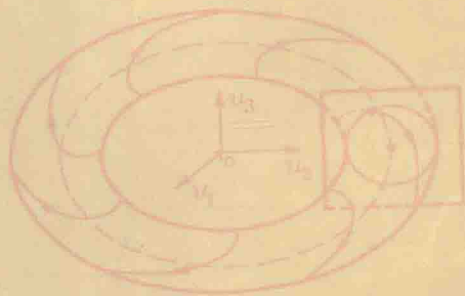
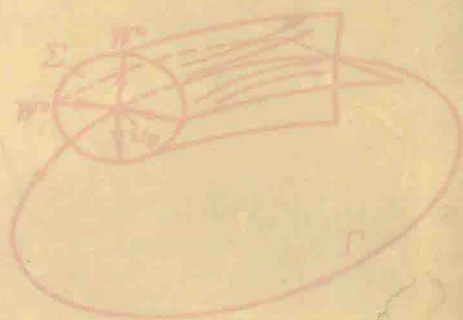


胡海岩 编著

应用非线性动力学



$$\begin{aligned} D_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma_1) &= 0 \\ D_1 \alpha_2 + \mu_2 \alpha_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma_1) &= 0 \\ a_1 D_1 \beta_1 + \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma_1) &= 0 \\ a_2 D_1 \beta_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma_1) &= 0 \end{aligned}$$



应用非线性动力学

胡海岩 编著

航空工业出版社

2000

内 容 提 要

本书是为力学专业研究生编写的教材，也可作为机械、土木、水利、动力、车辆、船舶、飞行器、自动控制等专业研究生的选修教材，适用于 60 学时左右的课程。

全书共分 8 章。第 1 章阐述非线性动力系统的理论与实验建模方法，第 2 章和第 3 章分别介绍单自由度自治系统的定性和定量分析方法，第 4 章和第 5 章侧重于分析单自由度非自治系统和多自由度系统的非线性动力学行为。第 6 章介绍非线性系统的运动稳定性及分叉理论。第 7 章阐述混沌现象及混沌的控制。第 8 章阐述如何运用数值方法分析非线性动力系统的行为，特别是系统的周期运动、分叉与混沌。书末附录阐述了如何借助计算机代数软件 MAPLE 分析非线性动力学问题。

本书内容丰富，强调分析、计算与实验的结合，吸取了国内外近期研究成果，溶入了作者的教学和研究心得，反映了本学科的新进展。

图书在版编目 (CIP) 数据

应用非线性动力学/胡海岩编著. —北京：航空工业出版社，2000.6
ISBN 7-80134-659-9

I. 应… II. 胡… III. 非线性-动力学-研究生-教材
IV. 0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 62423 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南京航空航天大学飞达印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月第 1 次印刷
开本: 787 × 1092 1/16 印张: 16.125 字数: 400 千
印数: 1 - 800 定价: 43.00 元

前 言

本书是为力学专业硕士研究生专业课编写的教材,也可供机械、土木、水利、动力、车辆、船舶、飞行器、自动控制等专业的硕士和博士研究生作为选修课教材。考虑到从事非线性动力学工作人员的需要,在内容上略加扩充,以便读者能进一步应用这些基本理论和方法去解决工程问题或者探索解决工程问题的正确途径。

本书的主要内容曾作为南京航空航天大学力学专业硕士研究生的必修课和其他专业博士研究生的选修课讲授多年,经过不断充实更新,汇集了作者多年来的教学心得和部分研究结果。撰写时,除了着重对经典内容作简明、严谨的阐述外,还吸取了国内外近期文献报道的一些研究成果,力求反映本学科的最新进展和发展趋势。

全书共分8章。依次阐述了非线性动力系统的建模,单自由度自治系统、单自由度非自治系统和多自由度系统的分析方法及动力学行为,非线性系统的运动稳定性与分叉,混沌运动及其控制,以及非线性动力系统的数值分析方法。每章有一定数量的习题,以便读者加深对正文内容的理解,了解所学方法可能拓宽的应用范围。为了使读者能从繁琐的数学推导中解放出来,并通过数值计算和图形显示来加深理解本书内容,书末附录扼要介绍了如何借助计算机代数软件 MAPLE 分析非线性动力学问题。

本书可作为60学时课程的教材,带*号的内容可作为选修。对于30学时左右的非线性振动入门课程,可仅选用前5章,并略去带*号的内容。

南京航空航天大学振动工程研究所金栋平副教授参与了本书初稿撰写过程中一些问题的研讨和习题的编写,博士研究生王在华协助编写了部分附录。博士研究生冯志华、郭大蕾,硕士研究生钱晓勇等承担了部分书稿的校对,在此一并致以诚挚的谢意。

北京航空航天大学应用数理系陆启韶教授认真审阅了全书并提出许多宝贵意见。对此,作者表示由衷的感谢。此外,感谢责任编辑孙平凡编审为提高本书出版质量付出的辛勤劳动。

胡海岩
2000年1月

目 录

绪论	(1)
第1章 非线性动力系统的建模	(3)
1.1 系统的非线性及分类	(3)
1.1.1 保守系统	(3)
1.1.2 非保守系统	(5)
1.2 理论建模	(7)
1.2.1 分析力学方法	(7)
1.2.2 多刚体动力学方法	(9)
1.2.3 弹性力学方法	(12)
1.3 实验建模	(16)
1.3.1 参数估计	(16)
1.3.2 模型辨识	(18)
1.3.3 模型的可靠性*	(20)
习题	(21)
第2章 单自由度自治系统的定性分析	(23)
2.1 几个基本概念	(23)
2.1.1 相轨线	(23)
2.1.2 平衡点及其稳定性	(25)
2.2 平衡点的性质	(26)
2.3 保守系统的分析	(30)
2.4 非保守系统的分析	(34)
2.4.1 耗散系统	(34)
2.4.2 自激振动系统	(35)
2.4.3 极限环	(38)
习题	(40)
第3章 单自由度自治系统的定量分析	(43)
3.1 摄动法	(43)
3.1.1 直接摄动法	(43)
3.1.2 Lindstedt - Poincaré 摄动法	(46)
3.2 平均法	(48)
3.3 KBM 渐近法*	(52)
3.4 多尺度法	(57)
3.5 Galerkin 法与谐波平衡法	(60)
3.5.1 Galerkin 法	(60)
3.5.2 谐波平衡法	(61)
习题	(62)

第4章 单自由度非自治系统的振动	(64)
4.1 Duffing 系统的受迫主共振	(64)
4.1.1 一次近似解	(64)
4.1.2 定常解的幅频响应	(65)
4.1.3 定常解的稳定性	(67)
4.2 Duffing 系统的受迫次共振	(68)
4.2.1 次共振的可能性	(68)
4.2.2 1/3 次亚谐共振	(69)
4.2.3 3 次超谐共振*	(72)
4.3 Duffing 系统的受迫组合共振	(73)
4.4 van der Pol 系统的受迫振动*	(75)
4.4.1 非共振情况	(75)
4.4.2 主共振	(77)
4.5 慢时变参数系统的振动*	(80)
4.6 线性时变系统的参激振动	(82)
4.6.1 参激振动的例子	(82)
4.6.2 周期系数线性常微分方程理论	(83)
4.6.3 含阻尼 Mathieu 方程的稳定边界	(86)
4.7 非线性时变系统的参激振动*	(92)
4.7.1 参激共振的一般形式	(92)
4.7.2 平方阻尼系统的主共振	(93)
习题	(95)
第5章 多自由度系统的振动	(97)
5.1 平方非线性系统的自由振动	(97)
5.1.1 非共振情况	(98)
5.1.2 内共振	(98)
5.2 陀螺力对内共振的影响*	(104)
5.3 平方非线性系统的受迫振动	(109)
5.3.1 一次近似解	(109)
5.3.2 内共振条件下的定常解	(112)
5.3.3 定常解的特性	(114)
5.4 线性时变系统的参激振动*	(116)
习题	(118)
第6章 运动稳定性与分叉	(120)
6.1 自治系统平衡点的稳定性	(120)
6.1.1 Lyapunov 直接方法	(121)
6.1.2 根据派生系统判定稳定性	(124)
6.1.3 平衡点附近相轨线的结构	(128)
6.2 非自治系统平衡点的稳定性*	(129)
6.2.1 稳定性概念的拓广	(129)

6.2.2 Lyapunov 直接方法	(129)
6.3 向量场在平衡点处的规范型	(131)
6.3.1 PB 规范型的概念	(131)
6.3.2 PB 规范型的计算	(133)
6.3.3 共振与非共振*	(135)
6.4 周期运动的稳定性	(137)
6.4.1 非自治系统	(137)
6.4.2 自治系统	(139)
6.4.3 Poincaré 映射与不动点的稳定性	(141)
6.5 平衡点的静态分叉	(146)
6.5.1 分叉的概念	(146)
6.5.2 一维系统平衡点的静态分叉	(147)
6.5.3 高维系统平衡点的静态分叉*	(150)
6.6 平衡点的动态分叉	(154)
6.6.1 平衡点的失稳	(154)
6.6.2 二维系统平衡点的 Hopf 分叉	(155)
6.6.3 Hopf 分叉的控制*	(159)
6.7 周期运动的分叉	(160)
6.7.1 静态分叉	(161)
6.7.2 倍周期分叉	(161)
6.7.3 Naimark - Sacker 分叉*	(163)
习题	(166)
第7章 混沌运动与控制	(169)
7.1 混沌现象	(169)
7.2 离散动力系统的混沌	(170)
7.2.1 一维映射的混沌	(170)
7.2.2 高维映射的混沌	(173)
7.3 连续动力系统的混沌	(175)
7.3.1 同(异)宿轨线	(175)
7.3.2 Melnikov 方法	(176)
7.3.3 耗散系统的混沌运动	(180)
7.3.4 通向混沌运动的途径	(181)
7.4 混沌运动的控制*	(183)
7.4.1 OGY 方法	(184)
7.4.2 OGY 方法的改进与推广	(185)
7.4.3 参数自调节控制方法	(186)
7.4.4 实现控制中的关键问题	(187)
习题	(189)
第8章 非线性动力系统的数值分析	(190)
8.1 瞬态运动计算	(190)

8.1.1 单步法	(190)
8.1.2 多步法*	(192)
8.1.3 应用中的问题*	(194)
8.2 稳态运动的计算	(195)
8.2.1 平衡点的求解	(196)
8.2.2 周期运动的求解	(197)
8.3 局部分叉的计算	(200)
8.3.1 分叉计算的任务	(200)
8.3.2 奇异点的确定	(201)
8.3.3 通过奇异点*	(201)
8.4 全局特性的计算*	(204)
8.4.1 胞映射方法	(204)
8.4.2 不变流形的计算	(208)
8.5 混沌的统计分析	(210)
8.5.1 混沌序列的判断	(210)
8.5.2 Lyapunov 指数	(212)
8.5.3 分形与分数维*	(216)
习题	(221)
附录 1 用 MAPLE 求解非线性动力学问题	(223)
附录 2 Lyapunov 方程的可解性条件	(242)
名词索引	(243)
参考文献	(247)

绪 论

工程中的真实动力系统几乎总含有各种各样的非线性因素，例如机械系统中的间隙、干摩擦、轴承油膜，结构系统的大变形、非线性材料本构关系，控制系统的非线性控制策略等等。线性系统只是真实动力系统的一种简化模型。通常，线性系统模型可提供对真实系统动力学行为的很好逼近。然而，这种线性逼近并非总是可靠的，被忽略的非线性因素有时会在分析和计算中引起无法接受的误差。特别对于系统的长时间历程动力学问题，即使略去很微弱的非线性因素，也常常会在分析和计算中出现本质性的错误。为了说明这一观点，我们列举若干种依靠线性系统理论无法解释的动力学现象。

例如，无阻尼单摆的微振动可以由单自由度线性系统来描述，其自由振动频率与摆的初始状态无关。但随着初始摆角增大，摆的自由振动将呈现非线性，自由振动频率会随着初始摆角的增加而降低。

又如，单自由度线性阻尼系统的自由振动总是随着时间衰减，系统发生周期性自由振动的前提是无阻尼，其振动幅值取决于初始状态。然而，许多未受外激励的非线性系统会发生所谓自激振动。其典型表现是：如果对处于平衡位置的系统给予一极小的扰动，系统会偏离平衡位置而发生幅值越来越大的振动，但当振动幅值大到一定程度后便趋于某一定值，形成周期振动，其振幅和周期均与系统初始状态无关。产生自激振动的原因在于这类系统具有不容忽略的非线性阻尼。

再如，在简谐激励下，线性阻尼系统的稳态响应是唯一的、与激励频率相同的简谐振动。然而，受简谐激励的非线性系统会发生多频振动现象和多解现象。即系统的稳态振动具有周期性，但具有与简谐激励不同的频率，其 Fourier 频谱呈现多个峰；系统存在多种可能的稳态振动，不同的初始状态会导致不同的稳态振动。

此外，线性系统在确定性激励下的响应是确定性的。然而，许多非线性系统在确定性激励下的响应却难以预测，呈所谓混沌现象。即系统响应对初始状态的微小变化极其敏感，但却不散发，致使系统的长时间历程预测变得不确定。

对于这些现象，只有依靠非线性振动的理论才能得以正确解释。因此，我们有必要研究非线性动力系统的行为，揭示非线性对系统动力学行为的影响。一旦把握了某种非线性现象的内在规律，就有可能利用该现象创造出线性动力系统所不具备的功能。例如，自激振动原理已被广泛应用于振荡电路，多解现象被用来对系统状态进行切换，混沌现象被用来进行保密通讯、提高振动机械的工作效率等等。

非线性动力学问题的求解一般非常困难，只有极个别的简单问题有精确解。由于线性系统的叠加原理不适用于非线性系统，这些简单问题的解无法叠加组成复杂问题的解。此外，非线性动力学具有上述特殊的复杂现象。因此，一个多世纪来人们付出了巨大的努力试图发展各种有效的分析方法，揭示非线性动力系统的奥秘。非线性动力学已成为一个有浩瀚文献的专门研究领域，并处在不断发展之中。

本书的主要读者是攻读工学硕士学位的研究生。他们大多首次接触非线性问题，手中几乎没有什么可用的工具，而学习完本书后将开始阅读近代文献，着手解决工程中的非线性动力学问题。要在这门仅 60 学时左右的课程的学习过程中完成上述任务是很不容易的。因此，我们在本书选材和内容编排上的首要考虑就是要少而精，易于入门；其次是要适当压缩经典内容，使读者尽可能多接触一些该学科的近代发展，为今后进行从事非线性动力学的应用研究架设桥梁。我们期望这样的选材能够增加读者今后处理实际非线性动力学问题时成功的机会。

一般来说，研究非线性动力学问题的第一步是通过力学理论或实验建立研究对象的数学模型。在现有的非线性振动教科书和专著中，通常不涉及理论建模，而将其归于理论力学、材料力学、分析力学等前期课程或多体动力学、非线性弹性理论等专门课程。实验建模方法则散见于文献之中。我们认为，随着学科渗透，特别是近年来实验建模方法的发展，有必要在本书第 1 章介绍建立非线性动力系统数学模型的方法。

本书的第 2 章至第 5 章属于非线性振动的经典内容，其传统的组织体系有两种。一种是分门别类地介绍分析非线性动力系统的方法，二是由简单到复杂地介绍非线性动力系统特有的现象。这两种体系各有优点，不易兼顾。为了在比较短的篇幅内尽可能分散难点，我们先以单自由度自治系统为对象，在第 2 章和第 3 章分别介绍了定性方法和常用的几种定量分析（近似分析）方法。在第 4 和第 5 章中，则将目前最流行的多尺度方法推广到单自由度非自治系统和多自由度系统，比较全面地介绍非线性动力系统特有的现象。可以说，前两章侧重于介绍分析方法的体系，后两章侧重于介绍非线性动力学现象的体系。

本书第 6 章着重介绍非线性振动的稳定性与分叉理论，它是非线性振动经典内容向近代内容的转折。为了与近代文献相衔接并使读者接受必要的数学训练，该章的叙述比较抽象，并且有一些数学证明。这是本书的重点与难点。

第 7 章以尽可能通俗的语言介绍了混沌现象以及如何控制混沌，这是近年来非线性动力学研究的热点。

随着计算机的普及，数值计算方法在研究复杂非线性动力系统的行为，特别在研究系统的长时间历程行为中正起着重要作用。本书第 8 章将以第 6 章和第 7 章的理论为基础，介绍一些重要的数值计算方法。

非线性动力学是一门正在发展中的学科，书中许多内容并不是完全成熟的。作者衷心希望读者在阅读本书的过程中能够解决已指出的一些遗留问题，并期待读者能发现和提出有意义的新问题。

第 1 章 非线性动力系统的建模

对所关心的非线性动力系统建立数学模型是后继分析的基础。通常，建模前要对系统的构成进行分析，尽可能把握系统的主要非线性因素。然后，需要根据已掌握的信息决定建模的方法。完全借助力学理论进行建模的过程一般称作**理论建模**，而以实验作为主要手段的建模过程可称作**实验建模**。实践中，通常交替采用这两种建模技术进行相互检验，或混合采用两种技术进行复杂系统的联合建模。本章先介绍造成系统非线性的一些主要力学因素，然后分别介绍这两种建模技术。

1.1 系统的非线性及分类

单自由度非线性系统的运动微分方程一般形如

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t), t) = f(t) \quad (1.1.1)$$

它反映了系统惯性力 $-m\ddot{u}(t)$ 、非线性内力 $-p(u(t), \dot{u}(t), t)$ 与外激励 $f(t)$ 的力平衡关系。本节试图通过一些具体例子，帮助读者建立对非线性力 $p(u, \dot{u}, t)$ 的认识。

1.1.1 保守系统

机械能守恒的系统称作**保守系统**，它的运动微分方程形如

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t)) = 0 \quad (1.1.2)$$

其中 $p(u)$ 是仅依赖于系统位移 u 的非线性有势力，例如重力、弹性力等。

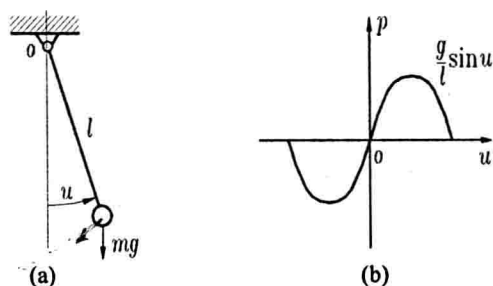


图 1.1.1 重力场中的单摆及其非线性有势力

图 1.1.1 中的重力摆是保守系统最简单的例子，其运动满足微分方程

$$\ddot{u}(t) + \frac{g}{l} \sin u(t) = 0 \quad (1.1.3)$$

该系统的非线性有势力是

$$p(u) = \frac{g}{l} \sin u \quad (1.1.4)$$

对于小摆角 u ，可利用 $\sin u \approx u$ 将系统(1.1.3)简化为线性系统。对于中等摆角 u ，采用三阶 Taylor 展开式 $\sin u \approx u - u^3/6$ ，将方程(1.1.3)简化为

$$\ddot{u}(t) + \frac{g}{l} [u(t) - \frac{1}{6}u^3(t)] = 0 \quad (1.1.5)$$

通常，将运动微分方程形如

$$\ddot{u}(t) + au(t) + bu^3(t) = 0 \quad (1.1.6)$$

的系统称作 **Duffing 系统**，其中 a 、 b 是常数。中等摆角时，重力摆运动微分方程(1.1.5)就是一个 Duffing 系统，其 $a = g/l > 0$ 、 $b = -g/6l < 0$ 。Duffing 系统的另一例子是图 1.1.2 所示端部有集中质量的弹性梁。梁的大挠度变形会产生图示非线性弹性恢复力，若梁的质量远小于端部集中质量，其大挠度自由振动近似满足方程(1.1.6)，此时 $a > 0$ 、 $b > 0$ 。

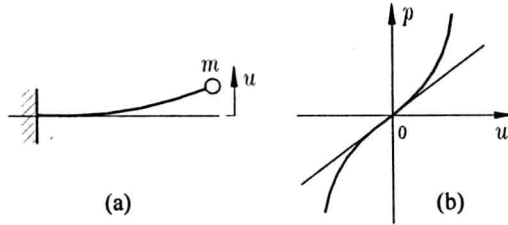


图 1.1.2 具有集中质量的大挠度梁及其非线性弹性恢复力

如果将保守系统(1.1.2)与单自由度线性系统类比，可认为有势力 $p(u)$ 相当于一非线性弹簧提供的弹性恢复力的反力。因此，可定义非线性刚度为

$$k(u) \stackrel{\text{def}}{=} p'(u) = \frac{dp(u)}{du} \quad (1.1.7)$$

这一刚度是随系统位移大小而变的。如果非线性弹簧满足 $up''(u) \geq 0$ ，则称系统**刚度渐硬**；反之则为**刚度渐软**。显然，重力摆是一刚度渐软系统，而带集中质量的大挠度梁是刚度渐硬系统。

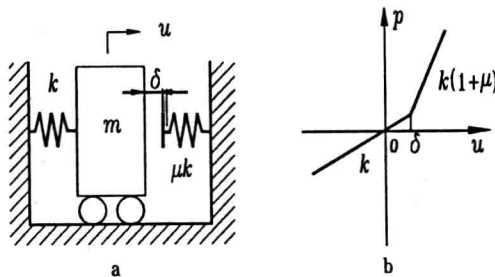


图 1.1.3 含弹性约束的系统及其分段线性弹性恢复力

间隙与弹性约束在机械系统中比比皆是。图 1.1.3 是一含弹性约束的单自由度系统，其非线性有势力是位移 u 的分段线性函数

$$p(u) = \begin{cases} ku, & u \leq \delta \\ k\delta + k(1 + \mu)(u - \delta), & u > \delta \end{cases} \quad (1.1.8)$$

故称作分段线性系统。显然，它是一刚度渐硬系统。

1.1.2 非保守系统

非保守系统的机械能不守恒，系统或是内部存在耗能因素，或是从外界吸收能量。下面讨论几种造成系统非保守的非线性因素。

(1) 非线性阻尼

由阻尼耗能导致的非保守系统为

$$m\ddot{u}(t) + q(\dot{u}(t)) + ku(t) = 0 \quad (1.1.9)$$

其中阻尼力的反力形如

$$q(\dot{u}) = c|\dot{u}|^{n-1}\dot{u}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.10)$$

a. 当 $n = 0$ 时，式(1.1.10)可写作

$$q(\dot{u}) = c \operatorname{sgn} \dot{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mu N \operatorname{sgn} \dot{u} \quad (1.1.11)$$

$-q(\dot{u})$ 是 Coulomb 干摩擦力，其中 N 为摩擦界面间正压力， μ 为干摩擦系数。

b. 当 $n = 1$ 时， $-q(\dot{u})$ 是人们非常熟悉的线性粘性阻尼力，适用于描述物体在空气或液体中作低速运动所受到的阻力。

c. 当 $n = 2$ 时， $-q(\dot{u})$ 是低粘度流体阻尼力，适用于描述物体在空气或低粘度液体中作中高速运动所受到的阻力。

(2) 非线性迟滞

众所周知，当弹性结构的应力超过某一门槛值后结构会发生塑性变形。此时即使完全卸载，结构仍有残余应变。这说明，结构塑性变形后的应力不仅与当前应变有关，而且与应变历史有关，从而使应变-应力曲线呈现多值。

描述理想弹塑性材料的简单唯象模型如图 1.1.4 所示，其对应的非线性力表达式为

$$p(u, t) = k_1 u + z(t), \quad dz = \begin{cases} k_2 du, & |z| \leq z_s \\ 0, & |z| > z_s \end{cases} \quad (1.1.12)$$

该模型所确定的非线性力 $p(u, t)$ 是分段线性的，并且需要由增量形式的微分方程来描述。若 $u(t) = u_0 \sin \omega t$ ，则 $p(u, t)$ 随 t 周期性变化，在 (u, p) 平面上形成图 1.1.4(b) 所示的迟滞回线。该模型除了描述理想弹塑性材料，还可描述许多可类比为图 1.1.4(a) 系统的力学问题，例如由钢丝绳、钢丝网垫作为主要弹性、阻尼元件的隔振器等。

更一般的情况下，对非线性迟滞的描述需要用分段曲线。例如，采用磁流变体的阻尼器具有如下形式的阻尼力

$$q(\dot{u}, \ddot{u}) = a_1 \dot{u} + a_2 \arctan[a_3(\dot{u} - a_4 \operatorname{sgn} \ddot{u})] \quad (1.1.13)$$

其对应的典型迟滞回线如图 1.1.5 所示。近年来，工程界已提出了许多非线性迟滞模型，文献[1]对其一般形式进行了归纳和抽象。

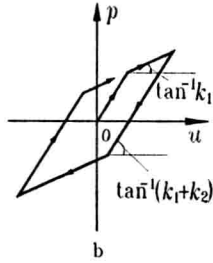
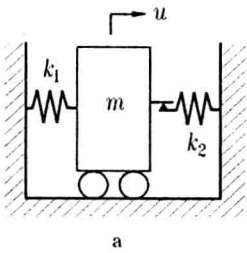


图 1.1.4 双线性弹塑性宏观模型及其迟滞现象

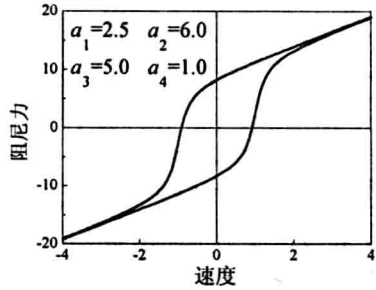


图 1.1.5 磁流变阻尼器的迟滞现象

(3) 参数激励

图 1.1.6 所示基础作铅垂运动的重力摆，其运动微分方程为

$$ml^2 \ddot{u}(t) = ml[\ddot{v}(t) - g] \sin u(t) \quad (1.1.14)$$

若基础作铅垂简谐振动 $v(t) = a \sin 2t$ ，则上式成为

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{l}(g + 4a \sin 2t) \sin u(t) = 0 \quad (1.1.15)$$

将上式与式(1.1.3)比较可见，非线性项 $\sin u(t)$ 的系数由常数 g/l 变为时间 t 的函数 $(g + 4a \sin 2t)/l$ 。

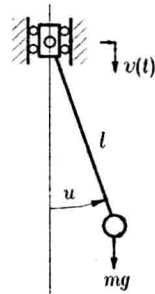


图 1.1.6 基础激励下的重力摆

在本例中，环境对系统的激励以时变参数的形式反映在系统运动微分方程中，因此被称作参数激励，相应的振动称作参激振动。若该系统的摆角足够小，方程(1.1.15)可线性化为著名的 Mathieu 方程

$$\ddot{u}(t) + (\delta + 2\varepsilon \sin 2t)u(t) = 0 \quad (1.1.16)$$

其中

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l}, \quad \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a}{l} \quad (1.1.17)$$

尽管式(1.1.16)是一线性常微分方程，但其系数是随时间变化的。本书 4.6 节将指出，这类系统的动力学行为明显有别于读者所熟悉的线性定常系统的振动。

对非线性系统的分类除了按保守与非保守之外，还可按自治与非自治进行分类。自治系统是指方程(1.1.1)的特殊形式

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t)) = 0 \quad (1.1.18)$$

其非线性力不显含时间 t ；不具备这种形式的系统称作非自治系统。在本书中，自治系统可理解为作自由振动的系统，以及将要介绍的自激振动系统；而非自治系统可理解为受外激励或参数激励的系统。

1.2 理论建模

以 Newton 力学为根基的各个动力学分支都涉及如何就研究对象进行建模这一问题，而不同的研究对象决定了该动力学分支的特色。

简单质点系或单个刚体的理论建模通常运用理论力学和分析力学方法，分析力学中的 Lagrange 方程是最受欢迎的方法。但像机器人这类由多刚体和关节组成的复杂系统，则需采用多刚体动力学方法，借助计算机来完成建模。这些系统的特点是具有有限个自由度。

相比之下，具有无限自由度的连续介质系统的建模非常复杂。系统的非线性来自两方面，一是系统的运动（如大变形），二是构成系统的材料。对于计入上述非线性的杆、轴、梁、板和简单的壳体，高等材料力学和弹性力学提供了一些建模的手段。至于更复杂的结构，则需要采用非线性有限元、多柔体动力学等方法，在计算机上完成建模。

面对理论建模所涉及的上述多个动力学分支，本书仅就几个分支各介绍一种方法，供不同专业的读者作为入门向导。

1.2.1 分析力学方法

最常用的分析力学方法是第二类 Lagrange 方程。其特点是基于系统的能量来建立系统运动微分方程，从而无需对系统取分离体进行受力分析。此处不打算重复分析力学的理论体系，只是扼要介绍一些与非线性动力系统建模有关的概念。

(1) 广义坐标

若系统运动能用一组独立坐标来完备描述，则这组坐标称为该系统的**广义坐标**。广义指坐标的量纲不限于长度和角度，模态坐标、机电耦合系统的电压、电流均可作为广义坐标。

广义坐标的选择是人为的，有无穷多种方式，建立系统力学模型时用的物理坐标是其中一组。为了客观描述系统，任意两组广义坐标须能相互转换。譬如， N 自由度系统的物理坐标 $u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N]^T$ 与另一组广义坐标 $q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T$ 之间应有可逆的联系。最简单的可逆联系就是线性振动理论中多次使用的线性变换。

(2) 系统的能量

考察由 n 个质量为 $m_i, i=1, 2, \dots, n$ 的质点和 s 个完整定常约束^①组成的系统，其自由度为 $N = 3n - s$ 。取一组广义坐标 $q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T$ ，将各质点相对于空间某定点的矢径记为

$$r_i = r_i(q), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1)$$

系统的动能是各质点动能之和

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{r} \cdot \dot{r}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.2.2)$$

其中系数

^① 完整定常约束是指系统的约束可以表示为不显含时间的代数方程组。

$$m_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.2.3)$$

称作系统的**质量系数**，是广义坐标 q 的函数。当研究系统微振动时，可取其在平衡位置 $q=0$ 的值。

在定常约束下，系统的势能仅是广义坐标 q 的函数，记作 $V(q)$ 。如果取平衡位置为零势能参考点，并考虑到势能在平衡位置取极值，则有条件

$$V(0)=0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=0} = 0, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.2.4)$$

(3) Lagrange 方程

在分析力学中，通常基于虚位移原理和 D'Alembert 原理来导出一般完整约束系统的 Lagrange 方程，其过程比较复杂。此处仅以完整定常约束系统为例，导出其 Lagrange 方程。但该方程与一般完整约束系统的 Lagrange 方程形式相同。

先将系统的约束分为两类，一类是理想约束，其约束反力不作功。刚体的内力、不可伸长的绳索、光滑固定面、光滑铰链等都属于此列。另一类是非理想约束，例如摩擦等。以下将非理想约束的反力与外力归在一起。

根据功能原理，外力和非理想约束反力作的元功 dW 等于系统总能量 $T+V$ 的微分，即

$$d(T+V) = dW \quad (1.2.5)$$

现在来看这一原理在具体广义坐标 $q=[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N]^T$ 下的结果。记外力和非理想约束反力之和在这组广义坐标下的分量为 $f=[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N]^T$ ，它们的元功可写作

$$dW = f^T dq = \sum_{j=1}^N f_j dq_j \quad (1.2.6)$$

定常约束系统的势能仅是广义坐标 q 的函数，故

$$dV = \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_j} dq_j \quad (1.2.7)$$

定常约束系统的动能是广义坐标及其导数的函数，故

$$dT = \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (1.2.8)$$

注意到质量系数仅是广义坐标 q 的函数，由式(1.2.2)可写出

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \quad (1.2.9)$$

对上式两端微分得

$$2dT = \sum_{j=1}^N d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)dq_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (1.2.10)$$

由式(1.2.10)减去式(1.2.8)得

$$dT = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)dq_j - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j \quad (1.2.11)$$

将式(1.2.6)、(1.2.7)和(1.2.11)代入式(1.2.5), 得到功能原理的具体形式

$$d(T+V-W) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - f_j \right] dq_j = 0 \quad (1.2.12)$$

根据广义坐标 q_j 的独立性, 诸 dq_j 不可能同时为零, 从而得到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = f_j, \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.2.13)$$

例 1.2.1 考察图示弹簧摆, 其弹簧质量可忽略不计, 试建立系统自由振动微分方程组。

解: 这是二自由度系统。取静平衡位置为零势能参考点, 在图示广义坐标下系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{m}{2} [(l+u_2)^2 \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] \quad (a)$$

$$V = mg[l - (l+u_2)\cos u_1] + \frac{k}{2} u_2^2 \quad (b)$$

代入方程(1.2.13)得

$$\begin{cases} m(l+u_2)\ddot{u}_1 + 2m\dot{u}_1\dot{u}_2 + mg\sin u_1 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - m(l+u_2)\dot{u}_1^2 - mg\cos u_1 + ku_2 = 0 \end{cases} \quad (c)$$

如果保留到二阶非线性项, 则方程(c)化为

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \frac{g}{l} u_1 = \frac{g}{l^2} u_1 u_2 - \frac{2}{l} \dot{u}_1 \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_2 + \frac{k}{m} u_2 = g - \frac{g}{2} u_1^2 + l\dot{u}_1^2 \end{cases} \quad (d)$$

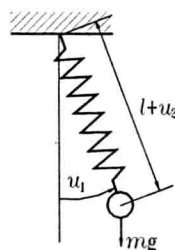


图 1.2.1 弹簧摆的自由振动

1.2.2 多刚体动力学方法

(1) 概述

多刚体动力学的研究对象是由多个刚体、关节、不计质量的弹性元件和阻尼元件等构成的系统, 主要任务是采用程式化的方法来建立系统的动力学方程, 并计算系统的运动。因此, 它是理论力学和分析力学的自然延伸和技术发展。自 20 世纪 60 年代起, 机器人、汽车等工业的需求推动了多刚体动力学理论的发展, Roberson 和 Wittenburg, Schiehlen 和 Kreuzer, Kane 等学者提出了一系列新方法。随后兴起的各种计算机代数语言为程式化建模的实现提供了平台, 出现了 NEWEUL、MESA VERDE、ADAMS 等建模和分析软件。