确定性问题数学和摄动理论及其应用

（上）

朱月锐编

上海交通大学工程力学系

一九八二年九月

目　录

序

“确定性问题数学和摄动理论及其应用”一书主要讲述自然科学和流体力学中的一些重要问题的数学模型的建立、分析、解释等内容。本书试图在数学、科学和工程之间建立密切的联系，向研究生提供广泛的感兴趣的材料，提高他们的分析问题和独立工作能力，特别是当他们遇到以往从未遇到过的问题时，有逐步深入和解决这些新问题的能力。

本书以应用数学的二个主要理论，即摄动理论和稳定性理论为主要内容，并详述了二理论在自然科学中，特别在流体力学方面的应用。其中反复强调了问题的数学模型建立的步骤及其重要性。因此从本书的内容来说，属于应用数学范畴。本书作为研究生教材已应用过二届了。讲授的初步反应是好的，许多学生确实从中找到了有益的材料及感兴趣的。

应用数学是相对于“纯”数学而言的，而“纯”数学的精华是抽象的思维和严密的逻辑推理，这是人们所共知的。应用数学所采用的研究方法与“纯”数学有很大的不同，其所采用的典型方法称之为“案例研究和试验验证”方法，即首先详细研究和掌握所要解决的科学和工程或流体力学问题的具体事实，并积累问题本身大量材料；其次是对影响因素很多的复杂的现实问题，通过合理的假设进行简化，使之成为一个保留有决定问题性质的主要因素的理想化物理模型；第三选择适用于理想化模型的物理定理；第四应用物理定理于理想化模型，用数学语言即数学公式或方程把该模型表示出来，即所谓建立数学模型；第五运用数学技巧求解所建立起来的方程，求出问题的解答；第六试验验证和解释。这是应用数学必不可少的一步，也是异常重要的一步。这是因为我们的简化假设和选取的物理定理是否正确的唯一判断标准。这一方法对搞工程技术的人来说是容易接受的，对我们国内数学家即使是搞“纯”数学的数学家来说也是可接受的，因为国内的绝大部份数学工作者也主张数学与实际问题密切结合，即主张数学要解决实际问题。但在国外则不

然，仍经引起过应用数学是否属于数学范畴的广泛争论。如在美国，“纯”数学家一开始就拒绝把数学应用于工程和其他学科的应用数学作为数学的一部份。在他们看来，应用数学至少是一门不纯的数学，而数学总是指“纯”数学，似乎“纯”这个字是多余的。在应用数学兴起的初期，“纯”数学家认为应用数学里面没有什么数学，有时甚至是无道理。但随着科学和工程技术的迅速发展，随着人们认识的深化，有许多现实问题（今后在课程中会遇到），对“纯”数学家来说是无法解决的。但对应用数学家来说解决这些问题到并不感到困难。只要利用应用数学家的一套方法，就很容易克服纯数学家所不能克服的困难。因此随着应用数学的作用和影响的不断扩大，以及应用数学人材在解决具体工程和各种复杂问题（如生物医学工程，生物流体力学、天体物理学、生化工程中的问题）所表现出的较高的技巧与水平，人們就慢慢地认识了应用数学的重要性。所以目前在美国的M.I.T和其他著名的大学里，数学系内都有纯粹数学和应用数学二部份学生和教育计划。美国数学家协会也一变过去的态度，吸收应用数学家入数学家协会，M.I.T的林家翘教授就是第一个以应用数学家身份，而不是以纯数学家身份加入数学家协会的人。一九七八年以来，国内各大学也相继设立了应用数学系。在力学系内也增开了应用数学方面的课程。所有这些都足以证明应用数学在自然科学和工程中的地位与重要性日益增强。

流体力学和应用数学的关系，比与其他学科关系密切得多，因为流体力学所面临的问题非常广泛和非常复杂，目前又面临着向生化、生物、天体运动、声学等学科渗透形成各边缘科学的局面。所以涉及到流体力学的问题往往影响因素很多，不采用建立物理模型和数学模型是无法解决的，即使能建立数学模型，遇到的大多数也是非线性问题，有的甚至是非常挑战性的非线性问题，不采用应用数学的渐近求解方法，一般无法获得渐近解析解。因此我们总观流体力学的全部内容，无不采用应用数学的那一套方法，这是问题的一面。然而，应用数学的一套方法很多恰是从流体力学处理方法中脱颖而出和发展而来（如在第Ⅱ部份中奇异摄动方法中的边界层技术或渐近展开匹配技术，就是从流体力学中边界层理论发展而来）。

所以我认为从研究方法来讲，流体力学和应用数学无本质区别，而就其研究范围来说，应用数学的研究范围更为广泛些，这是问题的另一面。因此把本课程作为流体力学和应用数学专业研究生的一门必修课程是合适的。

在长期的教育与科研实践中，我发觉：毕业于工科院校的工程技术人员与教师，对具体工程问题和现实物理现象简化抽象为便于研究的物理模型和数学模型，表现出较高的水平和能力，但对新建立的数学模型的求解方法和技巧又表现出相当贫乏和欠缺。相反，毕业于数学专业的科技人员与教师，恰恰相当缺乏对具体问题进行简化抽象为便于研究的物理模型和数学模型的能力，对问题所包含的物理内容的深刻了解也相当贫乏，然而一当问题已被描写成数学方程之后，对方程求解方法的熟悉以及数学技巧的应用又表现出相当高的水平。因此，早就有这样一个宿愿，想编写一本取二者之长补二者之短的课程。一九七七年我们看到了林家翘先生等著的“应用于自然科学中确定性问题的数学”一书，感到该书符合自己的想法，能起到数学和工程技术之间的桥梁作用，加之江可宗教授竭力推荐，作为流体力学研究生的教材。经二届教育实践，研究生普遍对课程内容反映较好，感到对解决实际问题有启发。所以就下了决心，以林家翘先生的著作为基础，加以必要的取舍和扩充，并结合我们自己近期的科研成果，尽量靠近流体力学专业的需要，编写成该教材。

为了使本教材具有高度的灵活性和广泛的参考价值，以及为了满足各种要求的需要，本课程分为如下完全可独立的三部份：

第Ⅰ部份：确定性问题的数学和渐近分析—— 主要讲述数学模型如何建立及渐近分析。

第Ⅱ部份：奇异摄动理论及其应用—— 主要讲述求解方法与技巧。

第Ⅲ部份：稳定性理论初步及其应用

由于本课程三部份内容具有很大独立性，所以既可作为一门课程来学习，又可作为三门课程来学习。第Ⅰ部份主要内容是讲述如

何把一个具体工程技术问题或现实物理现象，抽象简化为可根据定解（或边界）条件唯一确定的数学模型（或数学方程）的问题，即所谓确定性问题。这些问题和现象不光取材于流体力学，还取材于天天文物理、生化、生物等较广泛的领域。同时不仅讲述确定性问题，而且也讲述了如何把一个不确定的概率模型问题转变为可由定解（边界）条件唯一确定的，即确定性问题。目的是为了使学生具有广阔的视野，和培养学生有着手解决从未碰到过的新问题的能力。第一部份内容中还讲述了在建立数学模型时经常要用的一些渐近分析方法。

第Ⅱ部份，奇异摄动理论及其应用主要讲述了方程如何正确简化，以及各种求解数学方程的方法和技巧。我们尽可能完善地收集和讲述现有的各类摄动理论，包括正则摄动理论，改进型摄动理论，边界摄动理论，频率摄动理论、奇异摄动理论中的渐近展开匹配技术（边界层技术），多重尺度理论等。在讲述各种摄动理论时，我们尽量多从物理意义出发，避免纯数学化，以便于学生理解和应用。为了加深理解这部份内容和熟练应用摄动理论，我们例举了不少其他著作和我们自己的科研成果的广泛实例。

第Ⅲ部份，主要讲述基本稳定性理论及其应用。因为在很多工程技术问题和自然现象中，常常会碰到流动稳定性和其他稳定性问题，因此想提供一个解决这类问题的基本步骤和方法。另一方面是由于稳定性理论是应用数学中和摄动理论同等重要的理论之一，加之稳定性理论与摄动理论有着密切的联系，故该部份也作为本课程重要内容之一。

第Ⅰ部份　确定性问题的数学和渐近分析

第一章　　什么是应用数学？

本章分五节，１．１节详细地论述了应用数学的性质，研究范围，目的和研究方法，以及应用数学和其他各学科的关系。１．２节是银　系结构导论，这是Ｍ．Ｉ．Ｔ林家翘在宇宙空气动力学方面的研究成果。１．３节是动压润滑轴承理论，这是我们自己的研究成果。1．4节是粘状阿米巴的聚集运动。1．5节二心音的数学模型在本课程一开始，我们就把大家引向应用数学的广阔天地，从无限大的宇宙空间的恒星运动，到一般工程技术问题，以及小到肉眼看不见的阿米巴运动，应用数学工作者都有能力加以研究和说明。目的无非有二个；首先是使大家及早地了解当前世界上应用数学家所研究问题的类型；其次是使大家对应用数学的功能和效果之好有一个初步认识。

通过１．１节——１．５节，我们反复详述了应用数学在建立数学模型过程中的方法和步骤，以及在不同问题中所采用的技巧。特别是连续介质模型，通过应用数学工作者的努力，被推广应用于行星之间距离以光年计，阿米巴虫间的距离明显存在的，即表面看起来是非常不连续的物质运动上去的思想是非常巧妙的和非常有启发性的。这种连续介质相对意义的思想，给连续介质模型的应用，除流体力学和固体力学之外，展现了更宽广的前景。

第1，1节　关于应用数学的性质

1．1—1　应用数学的性质

任何一门学科包括数学在内，都起源于人们的生产实践。如数论是从最简单的动物的划分基础上发展起来的，几何是从土地测量的基础上发展而来的。随着人们的生产活动的发展，数学就逐渐发展成一门独立学科。严格的逻辑推理的纯粹数学理论也是从上述基础上发展起来的。但到后来，纯粹数学已远远脱离人们的生产实践

而向前发展了。纯粹数学虽早已脱离生产实践而自成系统独自向前发展，然而它对人类所作贡献是显而易见的。如没有函数分析理论、场论和复变函数等数学工具，流体力学要取得进展是困难的，当然毫无疑问就要阻碍航空和航海事业的发展。而且有些纯数学理论在当时看来并不见得马上可应用，但随着生产和科学的发展到一定时候，就会发挥很大作用。如矩阵运算，在当时提出矩阵运算理论时，看不出有什么用处，但等到电子计算机发展起来时，矩阵运算就成为数值计算的重要工具。

然而，严守逻辑推理的纯数学的发展，不应当妨害用任何其他方法来研究数学，否则会大大减少对人类的贡献。随着自然科学和工程技术的不断发展，有许多问题需要去认识它、解决它，如飓风的形成，发展和消失过程，银河系的形成，噪音在水中的产生、传播、衰减规律等等，这些问题对纯数学家来说是些非常辣手的问题，因为他们不知道如何来建立数学模型的手段。但现实到需要迫切地加以研究和解决。因此密切结合应用的数学研究方法，即联合数学和应用二方面的研究方法，在近廿年来发展起来了。即(1)研究分析问题的事实，并占有大量材料；(2) 提出合理假设，对问题进行简化，使之成为理想化物理模型；(3) 选择适用于该模型的物理定理；(4) 建立数学模型（或方程）；(5) 求解数学方程；(6) 试验验证的应用数学的研究方法迅速发展起来了。

密切结合应用的数学研究方法能解决许多非常复杂的和人们对它的认识还非常模糊的一些问题。而且这样的研究能促进新的数学方法和理论的发展，如今后要提到的摄动理论就是一个例子。

密切结合应用的数学研究方法，即应用数学研究方法只所以能获得成功，是由于自然界和工程技术问题基本上是协调的和有其内在客观规律性的。换句话说，出现在自然界和工程技术中的问题，大部份是可以用数学语言表达出来。当然说一切问题都可用数学语言表达是不适当的。没有这种规律性的客观基础，那么应用数学的研究方法就会导致失败。

应当记住密切结合应用，采用案例研究和试验验证方法，而不是采用严格逻辑推理的数学研究是应用数学的性质和特征。

1.1—2 应用数学的研究范围和目的

应用数学的研究范围是非常宽广的，凡是能用数学语言表达的自然科学和工程技术问题，都是应用数学的研究范围。因此应用数学不能不涉及到各个学科领域。

应用数学的目的是非常清楚的，它的目的是通过数学的应用，来说明和描述自然科学和工程技术中所出现的现象。

1.1—3 应用数学的研究方法

在序言中我们已经简略地提到应用数学研究方法的六个步骤，这一节我们将比较详细地来阐明这六个步骤。

(1)．详细研究和了解所研究问题的具体事实，并占有有关现象的材料。

在着手解决问题之前，首先必须详细地研究和深刻认识所要解决问题的具体事实，并积累和占有该问题的大量原始资料。接着在此基础上，鉴别那些是影响问题的主要因素，那些是次要因素。只有对问题有深刻的正确的认识，才能为一步合理简化打下基础。因此这一步是其他五个步骤的基础，所以必须细仔地进行，决不能粗心大意。因为主要因素确定多了，就会使问题复杂化，增加了解决问题的困难性；主要因素确定得少了，虽然会使问题变得容易解决，但可能这一过份简化的问题已不是我们所要研究之问题了。

(2)．提出合理的简化假设，建立合理的理想化物理模型。

合理的简化假设就是把已经确定下来的，对问题性质影响不大的次要因素加以忽略，而仅保留决定问题性质的主要因素，从而得到一个抽象的在一定程度上已脱离现实的理想化物理模型。目的是便于使问题变得容易处理和容易解决。如忽略分子之间距离的连续介质模型，忽略流体压缩性和粘性的理想流体模型等。

理想化模型使问题变得容易处理和容易解决这是问题的一个方面。另一方面我们也应当认识到理想化模型，由于在简化过程中，忽略了一些因素，所以有其局限性，这也必须引起注意的问题。如不可压无粘性流体模型只能解决升力问题，而不能解决与被忽略因素粘性有关的阻力问题。

(3)．选择适合于理想化模型的物理定理

前面已提到过，自然界中所出现的现象和工程技术问题基本是协调的和有规律的，即它们必定遵守目前已有的物理定理的，这是我们能够进行研究和解决问题的基础。

一般说应用数学所能应用的物理定是十分广泛的，但限于本课程范围，我们把自己的注意力放在连续介质力学和流体力学范畴。就连续介质力学和流体力学而言，它所要遵守的物理定理如下：

(A) 质量守恒定理

质量守恒定理是指在研究区域内的质量应守恒，就是说在该区域内质量不随时间而变化。其数学表达式为：

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}\rho(x\cdot y\cdot z\cdot t)d\tau=0 \quad (1\text{—}1a)$$

对流体力学而言

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0 \quad (1\text{—}1b)$$

式中R（t）是任意研究区域；m是R(t)区域内连续介质或流体质量；ρ是他们的密度；$\vec{v}$为流体的速度向量。

(B) 动量守恒或牛顿第二定理

动量守恒是指任意一研究区域R(t)内，动量随时间的变化率应等于该区域内的连续介质或流体所受之外力的和。其数学表达式为：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}\rho\vec{v}\,dt=\iiint_{R(t)}\rho\vec{f}d\tau+\iint_{\partial R(t)}\vec{t}\,d\sigma \quad (1\text{—}2a)$$

对流体力学而言

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)=\rho\vec{f}+\nabla\cdot\vec{T} \quad (1\text{—}2b)$$

式中$\vec{f}$是单位体积力；∂R(t)是所研究区域的表面积；$\vec{t}$是

作用于边界表面连续介质或流体上的表面力；T为作用于连续介质或流体上的应力张量

$$T=-p\delta_{ij}+[\mu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i})$$

$$+(\mu^*-\frac{2}{3})\delta_{ij}\,div\,\vec{v}]$$

其中p为压强；μ为流体粘性系数；μ^*为流体第二粘性系数 δ_{ij}为 Dirac delta 符号。

(C) 能量守恒定理

能量守恒定理是指任意研究区域内能量随时间的变化率应等于单位时间内外力对该域所作功与流入该区域的热量之和。其数学表达式为：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{R(t)}(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+e)\rho d\tau=\iiint_{R(t)}(\vec{f}\cdot\vec{v})\rho d\tau$$

$$+\iint_{\partial R(t)}(-h+\vec{t}\cdot\vec{v})d\sigma \qquad (1\text{-}3a)$$

对流体力学而言：

$$\rho\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+e)=\rho(\vec{f}\cdot\vec{v})-\nabla\cdot(\vec{q}-T\cdot\vec{v})$$

$$(1\text{-}3b)$$

式中e为所研究之区域的内能；h为热通量；$\vec{t}$为表面力；$\vec{q}$为热通量密度向量。

(D) 热力学第一定理

热力学第一定理是指加入所研究区域体积V内气体的热量应等于该体积V内的内能的变化与体积膨胀对外所作功之和。其数学表达式为：

$$dQ=dE+pdv \qquad (1\text{-}4)$$

式中dQ是加入的热量，dE为内能变化，pdv为气体膨胀所作的功。

(E) 热力学第二定理

热力学第二定理是指所研究的区域内的熵只能增加或相等不能减小。其数学表达式为：

$$S_2 - S_1 \geqq \int T^{-1} dQ \qquad (1\text{-}5a)$$

或

$$dS \geqq \int T^{-1} dq \qquad (1\text{-}5b)$$

式中S_2，S_1是二个气体状态的熵；T是绝对温度。当绝热可逆过程时，$dQ=0$，则$S_2=S_1$，所以绝热可热过程就是等熵过程。

(F) 理想气体状态方程

理想气体的压力，温度和体积应满足下列关系：

$$pv=RT \quad 或 \quad p=\rho RT \qquad (1\text{-}6)$$

p、v、ρ 都是单位质量气体的压力，体积和密度。

根据具体情况，我们可以选取其中几个甚至全部定理。如 所研究问题超出连续介质或流体力学范围，可能还要选取其他学科领域中的有关定理。

(4). 建立数学模型（或数学方程式）

这一步就是根据所研究问题的具体内容和参数，把适用于理想化模型的物理定理，通过一些数学运算，表示成数学公式或数学方程式。

(5) 运用数学技巧，求解数学方程

根据具体问题所建立起来的方程，有时是简单的，有时是极为复杂的。因此要求得复杂方程的解往往需要运用许多数学技巧。如果我们把数学运用得好和巧妙，问题就比较容易解决。反之会使问题更趋复杂化。所以为了方便地获得方程解，往往需要反复探索与试凑。

(6) 用科学术语对解作出解释和对结果的试验验证。

数学形式的解，有时候是数学公式，有时候是一系列的曲线，有时候是一系列的数值表格。因此不作适当的说明是无法看出其内

在规律的。故必须对数学形式的解，用科学术语作适当的解释，才能把数学方程解应用到所研究的自然现象和工程技术问题中去。

最后的试验验证，对应用数学工作者来说是必不可少的。这是因为试验验证是判断我们的假设（简化假设和在求解过程中的假设）和选取物理定理是否正确的唯一标准。一般来说，上面所列的六个步骤是同等重要的。绝对不要误解认为只有第(5)、第(6)二步最为重要，认为这是应用数学家最有价值的贡献。相反我们到要特别强调，在某些类型的问题中，第(1)和第(2)二步比起其他几个步骤来更为艰难。

应用数学方法的熟悉和数学技巧运用得精通显然是需要的。只有对应用数学方法有比较全面了解的人，才能够在研究问题时灵活应用、得心应手。我们必须把自己培养成，在问题如何着手，如何简化、求解过程中采用何种近似解法等方面具有判断力。这有助于独立研究和对书中没有碰到过的新问题的研究。

1.1—4 应用数学和其他科学的关系

(1).应用数学和纯数学的关系

必须认识到应用数学和纯粹数学之间在目标和动力上的差别，以及在重点和形式上的重要差别。纯数学经常用抽象概念来处理问题，而且逻辑推理是判断理论正确与否的唯一工具。然而对应用数学来说，合理的假设对问题进行简化，以及最后的试验验证是必不可少的，且是理论正确与否的强有力的判断依据。

我们可举一个流体力学中的例子来说明二者之间的差别。Navier —— stokes 方程解的存在性唯一性从纯数学家角度来看，是还未得到证明的事，因为还未从纯数学的逻辑推理上加以严格证明，因此认为Navier —— stokes 方程到底是否存在有唯一的解还是一个问题，至少认为是还未解决的问题。而对应用数学家来说则不然，认为只要找到有适合于Navier —— stokes 方程的解，事实上适合于Navier—— stokes 方程的经典解已有多个，就认为Navier—— stokes 方程解的存在性唯一性已得到证明了。而应用数学家往往用这种方法来证明方程解的存在性与唯一性。而对纯数学家来说这不能算是证明。

然而应用数学和纯数学之间仍然存在着密切的联系。这表现在

应用数学家既要应用纯数学理论又能推进和激发新的数学思想和新的数学理论的发展。今后要讲到的摄动理论就是一个最好的例子。

如果一个自然科学和工程技术问题不可能根据现有的数学概念作出数学公式，那么新的数学概念就会产生。如果现有的数学方法不能解决所列出的数学方程，或解的性质不能用现有理论加以适当解释时，那么新的数学方法和新的数学理论必然会发展起来。因此应用数学还有一个非常重要的任务是：

通过创建、综合、抽象和公式化来科学地建立有关新的数学理论。

新理论的创立，必然是对数学的一种贡献，虽然少数几个理论的出现，对纯数学不会引起重大影响，但必须正确评价它对应用数学的作用，即新的数学理论的出现，肯定是对应用数学的重大贡献。因为应用这种新理论，解决了以往现有理论所不能解决的问题。

(2) 应用数学和理论研究（主要对物理学）的关系

应用数学和理论研究（物理学）之间的差别经常是含糊不清的，因为他们每一个都可用对方的思想和方法来进行研究。当理论物理学家的问题不能从正面着手解决时，有时也从研究数学模型着手。而这种方法应用数学家在自己的研究工作中也是经常采用的。同时为了与试验证明进比较，应用数学家必须从理论分析中得出科学的结论，为了有效的做到这一点，应用数学家必须具有对所研究问题的大量科学知识。在这一方面又与理论物理学家有相似之处。

从理论物理学家对实际对象的长期研究中，他有比较深的某一定学科的知识，这是常见的现象。而应用数学家则与比相反，他可以在多个学科知识领域内工作，以及可以从理论研究中，在各个学科中相互补充而得益。

总的来说，理论物理学家更偏重于新的物理定理和原理的发现，因此甚至当只能得到部份成功的情况下，对这类研究也给予高度评价。理论物理学家在研究工作性质上更有综合性和更有推测性。而应用数学家则更关心现象的固有的数学描述，更倾向于已知的定理和原理中获得结论，换句话说，应用数学家偏重于应用已知的物理定理。为了给出一个说明，我们来看一看理论物理学家和应用数学