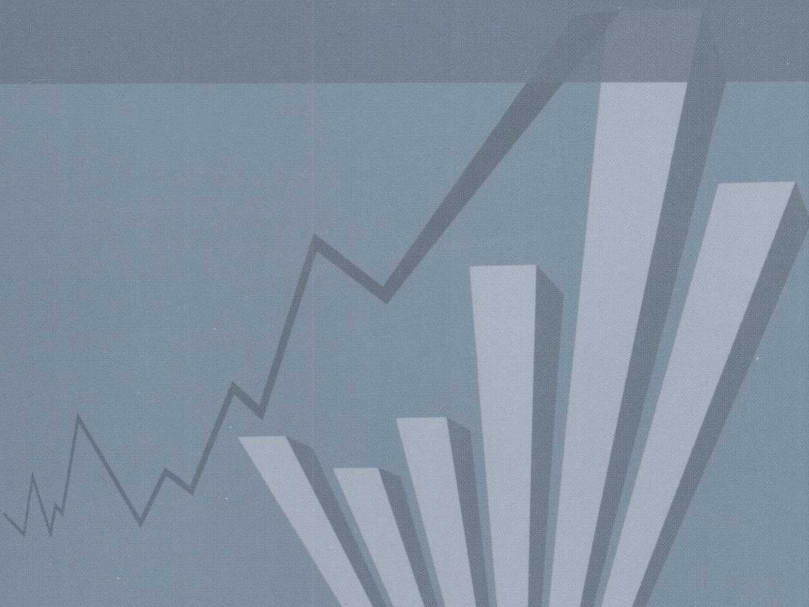
普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学（一）

（一元微积分）

林　谦　主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学(一)

(一元微积分)

主　编　林　谦

副主编　陈传明

参　编　李　薇　梁双凤

姚晓霞　黄　永

科学出版社

北　京

内 容 简 介

为适应高等学校数学类课程改革的需要，编者经过多年教学实践经验，并在吸收“十五”、“十一五”规划系列教材成果的基础上编写了本书.

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分和定积分，书后附有习题参考答案或提示.

本书可作为普通高等学校经济类各专业通用的教材，也可作为普通高等学校教师的教学参考书，还可供经济管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(一)(一元微积分)/林谦主编. —北京：科学出版社，2014

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-041455-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①林… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 167233 号

责任编辑：李淑丽 / 责任校对：彭 涛

责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2014 年 8 月第一次印刷 印张：16

字数：320 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

经济数学在社会经济活动中的应用十分广泛. 随着计算机技术及其他高科技的普及和发展，微积分在经济活动中的重要性日渐突出，这就决定了微积分的理论和方法具有广泛的应用价值. 从 1999 年我国高等学校扩大招生规模至今，我国高等教育已实现从精英教育向大众化教育的转变，但与之相应的教材建设不尽如人意，还或多或少地停留在传统教育模式上，过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践. 那么，什么样的教材才适应当今学生的特点？针对这个问题，编者根据高等学校经济类专业高等数学（微积分）的教学大纲和教学基本要求，结合编者多年的教学实践经验，并在吸收"十五"、"十一五"规划教材成果的基础上编写了本书. 在本书的编写过程中，力求体现如下特点：

（1）强调概念，淡化理论. 教材以现实、生动的实例引进数学概念，以简明通俗的语言深入浅出地阐述基本概念和基本理论，在保证数学概念的准确性及基本理论完整性的原则下，减少抽象的理论证明，并借助几何直观图形和实际意义解释概念和定理，使抽象的概念形象化，使复杂的问题简单化，从而降低难度，精简内容，以适应教学改革的时代需要.

（2）结合专业，强化实用. 在教学内容上充分体现"贴近实际，面向专业"的思想，并以"实用为目的"，以"必须、够用为度"，同时加强计算. 因此，本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容，精选了一定数量的经济应用实例，将数学知识模块与经济案例相结合，使学生能将所学基本知识和基本理论应用到解决实际问题中去，从而使学生充分感受到数学的应用价值.

（3）把方法的应用程序化、步骤化.

（4）强调数学思想方法. 本书注重培养学生用数学思想方法去分析和解决实际问题的能力，力求将数学的思想和方法融到经济生活中，体现学习经济数学的终极目标是解决实际生活中的经济问题，更好地为国家的经济建设服务，同时为后继相关课程的学习打下良好的数学基础.

（5）适应少学时要求，教材内容按每周 3 学时，18 周共 54 学时来编写. 教师可以根据实际情况决定教学内容的取舍.

本教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分和定积分；每章、节后都附有一定量的习题，题型较全，以帮助学生巩固和提高所学知识，同时书后附有习题参考答案或提示，以供参考. 另外，为适应不同层次、不同学科的需要，书中有的地方加了"＊"号，它相对独立，可根据需要及学时多

少进行适当删减.

本教材由6位具有丰富教学实践经验的教师,在云南省多所高等院校近十年来使用的《经济数学》讲稿基础上,结合高等院校数学类课程改革的需要编写而成.编写组为保证本书的质量,将书稿以讲义的形式印制发放到多所院校进行试用,并根据试用过程中广大师生提出的建议、意见,反复对本书进行修改和补充,形成终稿.其中第1章由姚晓霞(楚雄师范学院)编写;第2章由梁双凤(楚雄师范学院)编写;第3章由林谦(云南师范大学)编写;第4章由陈传明(云南师范大学商学院)编写;第5章由李薇(红河学院)编写;第6章由黄永(昭通学院)编写.全书由林谦教授负责框架结构安排、统稿和定稿,由郭震教授主审.

本书在编写过程中,得到了参编院校的大力支持和帮助,特别是云南省数学学会理事长、云南师范大学数学学院院长郭震教授的全力支持,并负责审阅了全书,同时提出了许多宝贵的意见和建议.

书中难免有不完善之处,敬请广大读者和同行批评指正,以便我们再版时进行纠正.

编　者

2014年6月于昆明

目　录

第1章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是微积分学研究的主要对象．本章将在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的定义和性质，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中常用的函数．

1.1　函　　数

1.1.1　集合

1. 基本概念

1）集合的含义

某些指定对象构成的总体，构成集合的对象称为集合的**元素**．

2）集合元素的三特性

（1）**确定性**——对确定集合而言，任一指定对象或者是或者不是确定集合中的元素．

（2）**互异性**——在确定集合中，任何两个元素都是不同的对象，相同对象归入一个集合时仅算一个元素．

（3）**无序性**——在确定集合中，元素的排列不分先后顺序，因此判断两个集合是否相同仅需比较它们所含元素是否相同，不需考查元素的排列顺序是否一样.

3）集合的表示

通常用大写字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示元素．

（1）**列举法**——把集合中的元素一一列举出来，然后用大括号括起来．例如，$A=\{a,b,c\}$.

（2）**描述法**——若集合是由具有某种性质 P 的全体元素所组成，则可将集合表为

$$\{a \mid a\ 具有性质\ P\}$$

的形式．例如，$A=\{a \mid a\ 为非直角三角形\}$，$B=\{x \mid x-3>2\}$.

4) 常用数集及其记号

自然数集 $\mathbf{N}$,正整数集 $\mathbf{N}^+$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,正有理数集 $\mathbf{Q}^+$,负有理数集 $\mathbf{Q}^-$,实数集 $\mathbf{R}$,正实数集 $\mathbf{R}^+$,负实数集 $\mathbf{R}^-$.

5) 集合的分类

有限集——所含元素个数有限的集合.

无限集——所含元素个数无限的集合.

6) 集合、元素间的基本关系

(1) 集合与元素间的基本关系

当 a 是集合 A 中的元素时,称元素 a **属于集合** A,并记作 $a\in A$,否则称元素 a **不属于集合** A,记作 $a\notin A$. 例如,$0\in\mathbf{N}$ 但 $0\notin\mathbf{N}^+$.

(2) 集合与集合间的基本关系

相等——若集合 A 与 B 具有相同的元素,则称 A 与 B **相等**,并记作 $A=B$.

子集——若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的**子集**,也称 A **包含于** B 或 B **包含** A,并记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,而 $A\not\subset B$ 则表示 A 不是 B 的子集.

真子集——若 $A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 是集合 B 的**真子集**,并记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

空集——不含任何元素的集合,通常用 $\varnothing$ 表示,并**规定**:空集是任何集合的子集.

显然,对任何集合 A 与 B 来说,下列关系成立(自己思考或验证):

$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$;

$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$;

若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(**传递性**).

为方便讨论起见,今后不再区分包含符号$\subseteq$与真包含符号$\subset$.

2. 集合的运算

1) 并运算

由 A 和 B 中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的**并集**,并记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

2) 交运算

由 A 和 B 中的所有公共元素组成的集合称为 A 和 B 的**交集**,并记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

3) 差运算

由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的**差集**,并记作

$A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{且} x\notin B\}.$$

4) 补运算

若 $A\subseteq I$(I 称为**全集**),则称差集 $I-A$ 为集合 A 关于全集 I 的**补集**,并记作 A^C,即

$$A^C=I-A=\{x\mid x\in I \text{ 且} x\notin A\}.$$

3. 集合的运算性质

(1) **交换律**:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **分配律**:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) **对偶律**:$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

1.1.2　实数集与数轴

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\text{无限循环小数}\\\text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$$

实数集——由全体实数构成的集合 $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,并记作 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

数轴——具有原点、方向和单位长度三要素的直线.

数轴的主要意义在于把实数用数轴上的点表示出来,且数轴上的全体点与全体实数构成一一对应的关系(图 1-1).

图 1-1

1.1.3　区间

区间——介于某两个实数之间或不超过(不小于)某一实数的全体实数或全体实数,即

$$
\text{区间}\begin{cases}
\text{有限区间}\begin{cases}
\text{开区间}(a,b)=\{x\mid a<x<b\}\\
\text{闭区间}[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}\\
\text{半开半闭区间}\begin{cases}\text{左开右闭区间}(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}\\ \text{左闭右开区间}[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无限区间}\begin{cases}
(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}\\
(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}\\
[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}\\
(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}\\
(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}
\end{cases}
\end{cases}
$$

1.1.4　绝对值

对任意实数 x,用符号 $|x|$ 表示 x 的绝对值,并规定 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 且易见 $|x|=|x-0|$ 表示数轴上的点 x 与原点之间的距离,绝对值及其运算具有下列性质:

$$|-x|=|x|,\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|;$$

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|,\qquad |xy|=|x||y|,\qquad \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}(y\neq 0);$$

$$|x|<a \iff -a<x<a(a>0),\ |x|>b \iff x<-b \text{ 或 } x>b(b\geqslant 0);$$

$$|x|\leqslant a \iff -a\leqslant x\leqslant a(a\geqslant 0),\ |x|\geqslant b \iff x\leqslant -b \text{ 或 } x\geqslant b(b\geqslant 0).$$

1.1.5　邻域

定义 1.1　若 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,则称实数集(开区间)

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为以点 a 为中心,δ 为半径的**邻域**,简称点 a 的 δ **邻域**(图 1-2(a)),并记作 $\cup(a,\delta)$,即

$$\cup(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

而将从 $\cup(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后的集合 $\mathring{U}(a,\delta)$ 称为点 a 的 δ **去心邻域**(图 1-2(b)),即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

例 1.1　解不等式 $|x+3|\geqslant 1$(用区间表示),并在数轴上表示出来.

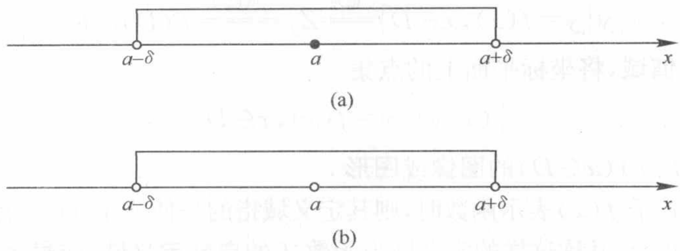


图 1-2

解 由 $|x+3|\geqslant 1\Rightarrow x+3\leqslant -1$ 或 $x+3\geqslant 1\Rightarrow x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant -2$. 用区间可表为

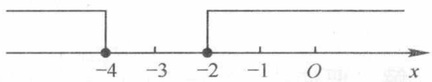


图 1-3

$$(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty),$$

用数轴表示则如图 1-3 所示． **解毕**

例 1.2 满足不等式$|x+2|<5$的全体实数，称为以(　)为中心、(　)为半径的邻域，用区间可表为(　)，并在数轴上表示出来．

解 因$|x+2|<5$ 即$|x-(-2)|<5$，故前两个括号内应填-2 和 5，而由$|x+2|<5\Rightarrow -7<x<3$，因而后一个括号内填$(-7,3)$，且在数轴上的图形如图 1-4所示． **解毕**

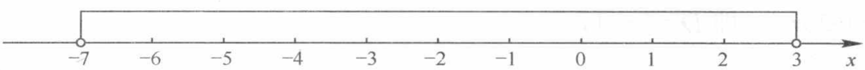


图 1-4

1.1.6　函数概念

1. 函数定义

函数，是微积分研究的主要对象，也是数学中最基本的概念之一，它反映的是两个实数集之间的一种对应关系，下面给出定义．

定义 1.2 若$\varnothing\neq D\subset R$，且 f 是由 D 到 R 的一个对应法则，使得对每个 $x\in D$，通过 f 都存在唯一的 $y\in R$ 与之对应，则称 f 为定义在D 上的**函数**，也称 **y 是 x 的函数**，并记为

$$f: D\rightarrow R \text{ 或 } y=f(x)\,(x\in D),$$

同时称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数 f 的**定义域**(还可将 D 记为 D_f，以明确 D_f 为函数 f 的定义域)，而将全体函数值构成的集合

$$\{y \mid y=f(x),x\in D\}\xlongequal{\text{记为}}Z_f\xlongequal{\text{或记为}}f(D)\subset R$$

称为函数 f 的**值域**,将坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的**图像或图形**.

如果仅用式子 $f(x)$ 表示函数时,则其定义域指的是使式子 $f(x)$ 有意义的全体实数 x 构成的集合,并称这样的定义域为函数 f 的**自然定义域(或最大定义域)**.

例 1.3 求函数 $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 的定义域 D.

解 要使式子 $(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 有意义,则必有 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 即有

$$\begin{cases}(x+1)(x-1)\geqslant 0,\\ x\neq 1,\end{cases}$$

由此可解得 $x>1$ 或 $x\leqslant -1$,即 $D=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$. **解毕**

例 1.4 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域 D.

解 要使式子 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 有意义,则必有 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,即有 $|x-1|\leqslant 2$,由此解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,即 $D=[-1,3]$. **解毕**

2. 函数的要素及相同函数的判定

由函数的定义知,确定一个函数主要由其两个要素 $\begin{cases}(1)\ \text{定义域},\\(2)\ \text{对应法则}\end{cases}$ 所决定. 因此,对给定的两个函数 f 和 g,要判断它们是否表示同一个函数,只要看它们对应的两对要素是否分别相同即可,即

$$f\text{ 和 }g\text{ 表示同一个函数}\iff\begin{cases}(1)\ \text{定义域 }D_f=D_g,\\(2)\ f\text{ 与 }g\text{ 表示的对应法则相同},\end{cases}$$

所以,一个函数用什么字母作为其自变量和因变量的符号都可以,都不影响函数的实质,如

$$y=f(x)\ (x\in D);s=f(t)\ (t\in D)\text{ 与 }v=f(u)\ (u\in D)$$

都表示同一个函数.

例 1.5 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$; (2) $f(x)=x,g(x)=|x|$;

(3) $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　(1) 因 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_g=(0,+\infty)$，故 $D_f\neq D_g$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同，从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示两个不同的函数．

(2) 虽然 $D_f=(-\infty,+\infty)=D_g$，但由于 $f(-1)=-1\neq 1=g(-1)$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示两个不同的函数．

(3) 因 $D_f=(-\infty,+\infty)=D_g$，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}=g(x)$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同的函数．　　**解毕**

3. 函数的三种表示法

1) 公式法（或解析法）

用一个公式（或解析式子）表示函数的方法，如例 1.3～例 1.5 中的函数采用的就是公式法．

优点：便于作理论上的推导；　　　　　**缺点**：不直观．

2) 图像法

用平面上的一条曲线表示函数的方法．

优点：直观；　　　　　**缺点**：不便于作理论上的推导．

3) 表格法

用表格表示函数的方法．

优点：计算简便；　　　　　**缺点**：数据不全．

通常在讨论函数时，常将公式法和图像法综合起来使用，这样就既直观又便于作理论上的推导，而表格法现在使用的不多．

4. 分段函数

有些函数，在其定义域内自变量 x 取不同值时，不能用一个统一的数学式子来表示，而要用两个或两个以上的数学式子才能表示，这类函数通常称为**分段函数**．但要注意，分段函数在其定义域内只代表一个函数，而不代表几个或无穷多个函数．

例 1.6　以下函数均为**分段函数**：

(1) **符号函数**（图 1-5）：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) **绝对值函数**（图 1-6）：

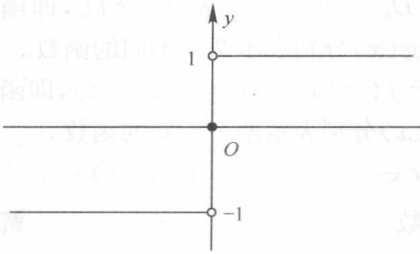


图 1-5

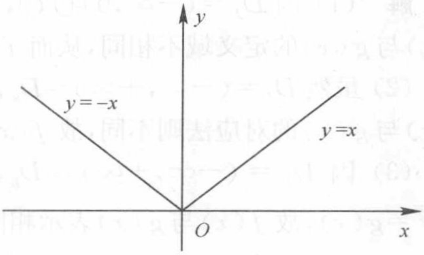


图 1-6

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}=x\cdot\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}=x\cdot \operatorname{sgn}x.$$

(3) **狄利克雷**(Dirichlet)**函数**(图 1-7)：$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

(4) **取整函数**(图形为阶梯型曲线，见图 1-8)：

$$y=[x]=n(n\leqslant x<n+1, n\in\mathbf{Z}),$$

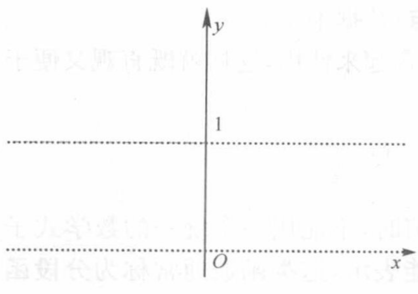


图 1-7

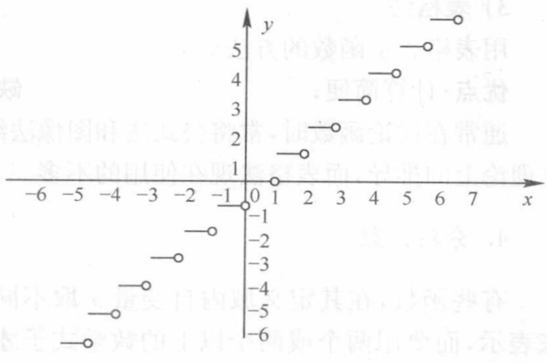


图 1-8

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，且显然有$[x]\leqslant x<[x]+1(\forall x\in\mathbf{R})$. 例如，

$$[2.3]=2,\quad [4]=4,\quad [-0.3]=-1,\quad [-2.3]=-3.$$

例 1.7　已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2.\end{cases}$ (1) 求 $f(x)$的定义域；(2) 求分界点；(3) 求函数值 $f(0)$，$f(2)$和 $f(-1)$；(4) 作出函数的图形 .

解　(1) 因仅当$|x|<1$及$1<|x|\leqslant 2$，即

$$-1<x<1 \text{ 及}(-2\leqslant x<-1 \text{ 或 } 1<x\leqslant 2)$$

时函数才有定义，故 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

(2) 由 $f(x)$的表达式易见分界点为 $x=-1$ 和 $x=1$.

(3) 因当$|x|<1$时,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,故$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$;

当$1<|x|\leqslant 2$时,$f(x)=x^2-1$,故$f(2)=2^2-1=3$;

当$x=-1$时,函数$f(x)$无定义,故$f(-1)$不存在.

(4) 图形见图1-9. 解毕

例1.8 已知某函数在闭区间$[-1,1]$上的图形如图1-10所示,试用解析式表示该函数.

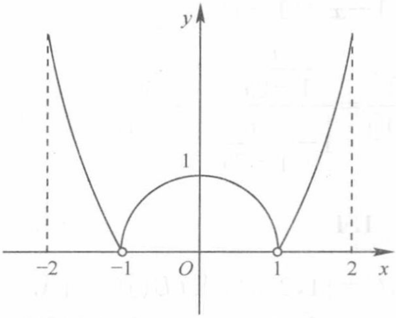


图1-9

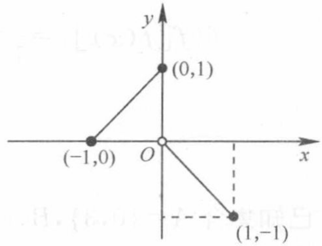


图1-10

解 如图1-10所示,函数在y轴左方的图形是连接点$(-1,0)$和点$(0,1)$的直线段,而在y轴右方的图形是连接原点$O(0,0)$和点$(1,-1)$且去掉原点的直线段,故由直线的两点式方程及函数的定义域可得

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$ 解毕

5. *正确运用函数记号求函数值及函数的表达式*

按函数定义,$\forall x\in D$,将法则f所对应的因变量y记作$f(x)$,称为函数f在点x处的函数值.当x取定值x_0时,所对应的因变量的值记作$y_0=f(x_0)$或$y_0=y|_{x=x_0}$.

当$f(x)$仅是由一个表达式表示的函数时,则将表达式中的x代之以x_0便得到$f(x_0)$,但当$f(x)$为分段函数时,则要根据x_0所在的子集合(或小区间),用$f(x)$相对应的表达式来计算函数值$f(x_0)$.

例1.9 已知$f(x)=x^2$,求$f(x_0+a)-f(a)$.

解 因$f(x)=x^2$,故$f(x_0+a)-f(a)=(x_0+a)^2-a^2=x_0^2+2ax_0$. 解毕

例1.10 若$f(x-1)=x^2$,求$f(x+1)$.

解法一 令$x-1=t+1$即$x=t+2$,则结合$f(x-1)=x^2$,有

$$f(t+1)=(t+2)^2 \quad 即 \quad f(x+1)=(x+2)^2.$$

解法二 因$f(x-1)=x^2$,故$f(x+1)=f[(x+2)-1]=(x+2)^2$. 解毕

例 1.11　设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$和 $f\{f[f(x)]\}$.

解　因 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,故

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1-2x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x};$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}.$$

解毕

习　题　1.1

1. 已知集合 $A=\{0,3\}$,$B=\{0,3,4\}$,$C=\{1,2,3\}$,求$(B\cup C)\cap A$.
2. 设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$N=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$,求 $M\cup N$,$M\cap N$.
3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x+4}{x+|x|}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x^2-x-2}$;　　(4) $y=\dfrac{x+2}{|x|-1}\sqrt{-x^2-3x+4}$;

(5) $y=\log_2(2+x-x^2)$;　　(6) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{4}$.

4. 已知函数 $f(3x)=\log_2(9x^2+6x+1)$,求 $f(1)$.
5. 已知函数 $f(x)=x^2+2x-1$,求 $f(x+1)$.
6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$ (1) 求 $f(x)$的定义域;(2) 求分界点;

(3) 求函数值 $f(-1)$,$f(0)$和 $f(1)$;(4) 作出函数的图形.

1.2　函数的特性

1.2.1　单调性

定义1.3　(1) 对定义在区间 I 上的函数 $f(x)$,若 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$