

# 计算机辅助几何设计

李芳洁 编



华东工学院

在汽车、飞机、船舶、机械零件、玻璃制品以及服装设计和制造过程中，曲线与曲面起着关键性的作用，然而，用传统的设计方法，是不能更有效的设计自由曲线与自由曲面的。由于计算机辅助设计及数控机床技术的发展，导致了自由曲线与曲面形状的数学描述，根据数学模型（曲线与曲面方程），通过电子计算机的多点计算与存贮（所谓计算机表示）、再来控制数控机床直接而方便的生产曲线与曲面。

目前，在曲线与曲面设计上，贝赛尔、里森费尔德、孔斯等人做出了开创性的工作，提出了各种不同的解析方法，逐渐形成一门CAGD新学科。

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometrical Design)简称CAGD,它研究的主要内容是用计算机进行自由曲线与自由曲面的设计,它与计算几何是密切相关的,计算几何偏重学科理论研究,CAGD主要是工程上实际应用。苏步青教授把古典的代数几何方法引入计算几何,在计算几何中开创了一个新的方向,近年来,CAGD的设计方法,在国外一些著名的大公司已经应用于生产实际。目前在我国的造船、飞机与汽车等行业都在研究和应用方面取得了不少成果。并且深受工程技术界的重视。

本书是为工程图学专业研究生两个学分(36学时)教学计划编写的,同时也适合理工科大专院校高年级学生2个

学分的必修课和选修课的教材。内容包括：等距曲线、圆弧拟合及抛物线调配，三次样条曲线与曲面、贝赛尔曲线与曲面、B样条曲线与曲面和包络等设计方法，以及有关参考程序和附录中所述的必备的基础知识。

本书是在83年编写的“计算机图学的数学基础”和84年编写的“计算机辅助几何设计(CAGD)的基本数学方法”两讲义基础上编写而成的。其中全部插图均由朱桂香同志绘制。

由于编者水平有限，书中错误难免，欢迎读者指正。

编者 1985.4

# 目 录

第一章 等距曲线	1
§ 1 前言	1
§ 2 等距曲线及等距曲线方程	2
§ 3 渐开线的等距曲线	5
§ 4 外摆线的等距曲线	7
第二章 圆弧拟合及抛物线调配方法	10
§ 1 圆弧拟合	10
§ 2 抛物线的调配	17
第三章 样条曲线	26
§ 1 三次样条曲线	26
§ 2 贝赛尔 (Bezier) 曲线	49
§ 3 B样条曲线	66
第四章 样条曲面	86
§ 1 前言	86
§ 2 曲面的表示	87
§ 3 双线性曲面	89
§ 4 放样曲面或直纹曲面	92
§ 5 线性孔斯 (Coons) 曲面	94

§ 6	调配函数	98
§ 7	双三次曲面	103
§ 8	贝赛尔 ( Bezier ) 曲面	110
§ 9	B样条曲面	117
<b>第五章</b>	<b>包络</b>	<b>121</b>
§ 1	平面曲线族的包络	121
§ 2	曲面族的包络	127
<b>第六章</b>	<b>齿轮啮合</b>	<b>136</b>
§ 1	共轭齿形	136
§ 2	齿廓法线法	139
§ 3	齿廓方程	142
§ 4	空间啮合的接触线法	144
<b>附 录</b>		
附录A	矩阵运算	154
附录B1	矢量代数	165
附录B2	曲线的矢量方程与参数曲线	174
附录C1	抛物线调配程序	201
附录C2	三次样条程序	205
附录C3	贝赛尔曲线程序	215
附录C4	B样条曲线程序	218
附录D1	双线性曲面程序	223
附录D2	线性孔斯曲面程序	225
附录D3	双三次曲面程序	227
附录D4	贝赛尔曲面程序	230
<b>参 考 文 献</b>		<b>233</b>

# 第一章 等距曲线

## § 1 前 言

随着科学技术的发展，应用电子计算机进行设计和解决生产实际问题，很多生产实际课题可以归结为求某一条曲线的等距曲线的问题，所以等距曲线应用比较广泛。

例如在用数字程序控制机床切割工件时，利用钼丝和工件间加接高频电源产生的高频脉冲使钼丝对金属起腐蚀作用，从而达到切割的目的，电子计算机控制钼丝中心的运动，使工件得到一定的形状。若加工一直线段 $L_1$ ，就要控制钼丝中心运动轨迹是 $L_1$ 的平行线 $L$ ，它和 $L_1$ 的距离等于钼丝半径（图1—1(a)）。又如加工一段圆弧 $C_1$ ，就是控制钼丝中心运动轨迹是 $C_1$ 的同心圆 $C$ ，它的半径等于 $C_1$ 的半径和钼丝半径之差（图1—1(b)）。

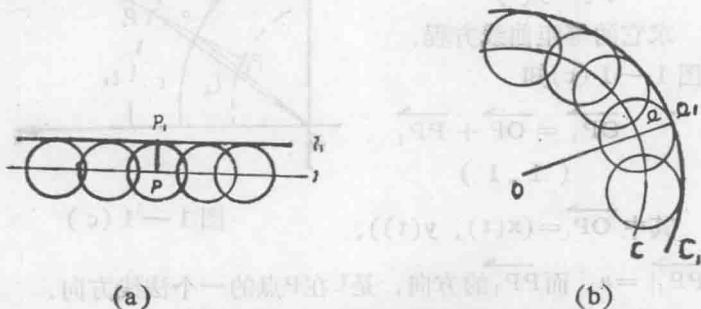


图 1—1

由于 $L$ 与 $L_1$ 是平行线， $C$ 与 $C_1$ 是同心圆，把 $P$ 与 $P_1$  ( $Q$ 与 $Q_1$ )叫作对应点。则对应点间连线是两条直线(两段圆弧)的公垂线，它的长度是一定的。除了上述简单的直线和圆弧外，还有不少地方应用等距曲线，因此介绍等距曲线。

## § 2 等距曲线及等距曲线方程

### 一、等距曲线

设两条曲线为 $L$ 与 $L_1$ ，若 $L$ 上的任意一点 $P$ 都有 $L_1$ 上的一点 $P_1$ 与之对应，并且对应点间的连线 $PP_1$ 是 $L$ 与 $L_1$ 的公法线， $PP_1$ 长度是定值，即 $L$ 与 $L_1$ 之间距离处处相等，称 $L$ 和 $L_1$ 是等距曲线。

### 二、等距曲线方程

设曲线 $L$ 的方程是

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

求它的等距曲线方程，

由图 1—1 (c) 知

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_1} \\ &= (x(t), y(t)) + (1, 1) \end{aligned}$$

其中  $\overrightarrow{OP} = (x(t), y(t))$ ,

$|\overrightarrow{PP_1}| = a$ ，而 $\overrightarrow{PP_1}$ 的方向，是 $L$ 在 $P$ 点的一个法线方向。

对方程 $y=f(x)$ 表示曲线的单位切向量是

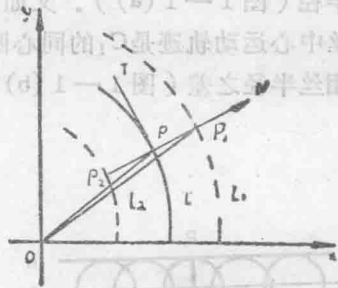


图 1—1 (c)

$$T_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \right) \quad (1.2)$$

单位法向量是

$$N_0 = \left( \mp \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \right) \quad (1.3)$$

在(1.3)式中, 双重符号表示法线的两个方向。

我们已知L的参数方程, 利用参数方程求导法则得到

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (1.4)$$

把(1.4)式代入(1.2)和(1.3)式中得到

$$T_0 = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \quad (1.5)$$

$$N_1 = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \quad (1.6)$$

和



$$\vec{N}_2 = -\vec{N}_1 = \left( \frac{-y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right) \quad (1.7)$$

假定切线  $\vec{PT}$  是沿着参数  $t$  增加方向，它的单位向量是  $T_0$ ， $\vec{PP}_1$  的方向应该是  $\vec{PT}$  顺时针转动  $90^\circ$  得到的，而  $T_0$  顺时针转动  $90^\circ$  得到  $N_1$ ，所以

$$\vec{PP}_1 = a\vec{N}_1 \quad (1.8)$$

将 (1.8) 式代入 (1.1) 式得

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP} + a\vec{N}_1 \quad (1.9)$$

设  $P_1$  点坐标是  $(x_1, y_1)$  则  $L_1$  的参数方程是

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) + a \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \\ y_1(t) = y(t) - a \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \end{cases} \quad (1.10)$$

同理

设  $P_2$  点坐标是  $(x_2, y_2)$ ，则  $L_2$  的参数方程是

$$\begin{cases} x_2(t) = x(t) - a \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \\ y_2(t) = y(t) + a \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \end{cases} \quad (1.11)$$

记

$$\begin{cases} N_x = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \\ N_y = \frac{-x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \end{cases} \quad (1.12)$$

于是  $N_1 = (N_x, N_y)$ ,  $N_2 = -(N_x, N_y)$ , 方程 (1.11) 和 (1.12) 可以合并成

$$\begin{cases} x_1 = x(t) \pm aN_x \\ y_1 = y(t) \pm aN_y \end{cases} \quad (1.13)$$

当 (1.13) 式同时取 + 号时, 表示  $L_1$  方程 (外等距曲线方程); 而同时取 - 号时, 则表示  $L_2$  的方程 (内等距曲线方程)。

### § 3 渐开线的等距曲线

圆的渐开线大家都很熟悉, 它在齿轮设计制造与传动方面是很有用的, 在电器方面也有渐开线变压器等。特别是渐开线的等距曲线也是渐开线, 该性质可以应用于生产实际。

#### 一、渐开线方程

如图 1-2(a) 以  $O$  为极点, 以  $OA$  的连线为极轴的极坐标系, 设  $B$  是渐开线上的任意一点,  $(\rho, \theta)$  是它的极坐标, 其中  $\theta$  为弧度, 基圆半径  $r$  已知, 假定  $\angle BOC = \alpha$  (弧度), 可知渐开线的极坐标参数方程是

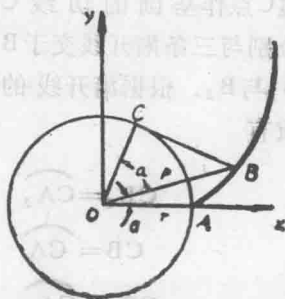


图 1-2(a)

$$\begin{cases} \rho = \frac{r}{\cos\alpha} \\ \theta = \text{tg}\alpha - \alpha \end{cases} \quad (1.14)$$

用  $\angle AOC = \varphi$  做参数,  $\varphi = \alpha + \theta$ , 由 (1.14) 得到 B 点在 xoy 的直角坐标系中的方程

$$\begin{cases} x = r(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi) \\ y = r(\sin\varphi - \varphi \cos\varphi) \end{cases} \quad (1.15)$$

它在 B 点的切线斜率是

$$K = \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{r(\cos\varphi - \cos\varphi + \varphi \sin\varphi)}{r(-\sin\varphi + \sin\varphi + \varphi \cos\varphi)}$$

$$= \text{tg}\varphi$$

## 二、渐开线的等距曲线也是渐开线

设  $L$ 、 $L_1$  和  $L_2$  是同一个基圆上起点不同的三条渐开线,

$\widehat{AA_1} = \widehat{AA_2}$  (图 1.2(b)).

过 C 点作基圆的切线  $CB_1$  分别与三条渐开线交于 B、 $B_1$  与  $B_2$ 。根据渐开线的性质有

$$\widehat{CB_2} = \widehat{CA_2}$$

$$\widehat{CB} = \widehat{CA}$$

$$\widehat{CB_1} = \widehat{CA_1}$$

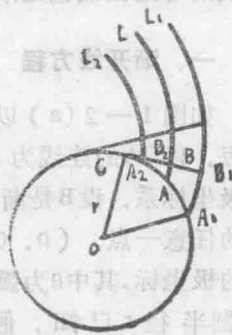


图 1-2(b)

因此

$$B_2B = \widehat{AA_2}$$

$$BB_1 = \widehat{AA_1}$$

无论C点在基圆上如何变化， $B_2B$ 与 $BB_1$ 的长度是定值，故 $L_1$ 与 $L_2$ 都是L的等距曲线。实际上，若将L绕O点适当地转过一个角度可以得到 $L_1$ 与 $L_2$ ，该角度等于 $\frac{\widehat{AA_1}}{r}$ ，所以渐开线的等距曲线也是渐开线，它们仅是起点不同的渐开线，或者说，仅仅相差一个角度。

由于渐开线有上述性质，所以把横截面为矩形的砂钢片弯成相同的渐开线，一片片形状、大小完全相同的渐开线形的砂钢片能相互紧贴，中间不留一点空隙地迭成圆柱形的铁芯，因此可以制成体积小，容量大的渐开线变压器。

#### § 4 外摆线的等距曲线

如图 1—3 所示，建立了一个平面直角坐标系，设开始时， $O_r$ 点和P点都在x轴上，圆 $O_r$ 上的A点和圆O上的B点相切，当圆 $O_r$ 滚到新位置时，两圆在I点相切。

令， $O_rP = e$ ， $\angle IOB = \alpha$ ， $\angle IO_rA = \theta$ 。因此圆 $O_r$ 在圆O上作滚动，所以滚过的弧长相等

$$R\alpha = r\theta$$

P点轨迹由向量 $\overrightarrow{OP}$ 的端点P描出，只要求出 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表达式，即可得到P点的轨迹方程。

由向量加法知

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_r} + \overrightarrow{O_rP}$$

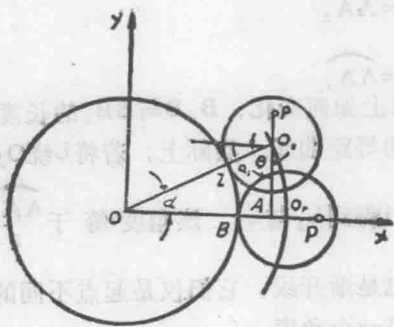


图 1-3

而

$$\overrightarrow{OO_1} = ((R+r)\cos\alpha, (R+r)\sin\alpha)$$

$$\overrightarrow{O_1P} = (e\cos(\alpha+\theta), e\sin(\alpha+\theta))$$

$$= \left( e\cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha, e\sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha \right)$$

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = & \left( (R+r)\cos\alpha + e\cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha, \right. \\ & \left. (R+r)\sin\alpha + e\sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha \right) \end{aligned}$$

例如P点的直角坐标为  $(x, y)$ ，则以公转角  $\alpha$  作参数的外摆线方程为

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\alpha + e\cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha \\ y = (R+r)\sin\alpha + e\sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha \end{cases} \quad (1.16)$$

P点的运动由两个运动合成：一是它随圆 $O_r$ 一起绕O点的公转运动；二是圆 $O_r$ 绕 $O_r$ 点的自转运动。 $\alpha_1$ 是自转角。

$$\alpha_1 = \alpha + \theta = \left(1 + \frac{R}{r}\right)\alpha$$

或

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}} \alpha_1 = \frac{r}{r+R} \alpha_1$$

把它代入(1.16)式，得到外摆线用自转角 $\alpha_1$ 作参数的方程

$$\begin{cases} x = e \cos \alpha_1 + (R+r) \cos \frac{r}{R+r} \alpha_1 \\ y = e \sin \alpha_1 + (R+r) \sin \frac{r}{R+r} \alpha_1 \end{cases} \quad (1.17)$$

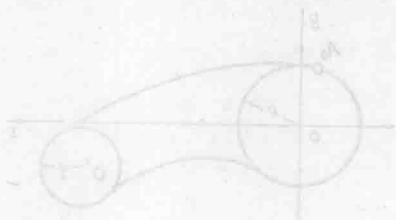


图 1-1

## 第二章 圆弧拟合及 抛物线调配方法

### § 1 圆弧拟合

圆弧拟合是用分段圆弧代替曲线，并且相邻两个圆弧有公切线。圆弧拟合有连续的斜率。

举实例如图 2—1 所示，介绍圆弧拟合的方法。

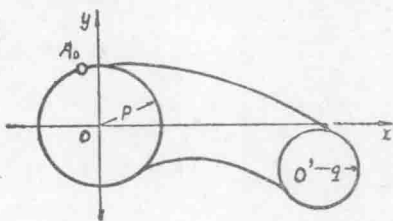


图 2—1

设圆  $O$  半径为  $P$ ，圆  $O'$  的半径为  $q$ ， $O'$  的坐标为  $(a, b)$ ，弯板上缘的一些离散点是  $A_i(a_i, b_i)$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ )。要用分段圆弧光滑地连接这些离散点并使它和圆  $O$  及圆  $O'$  都相切。

我们对图示问题作如下分析：

过  $A_1, A_2$  作圆  $P_1$  使和圆  $O$  相切，过  $A_2, A_3$  作圆  $P_2$  使它和圆  $P_1$  相切，一般地，过  $A_i, A_{i+1}$  作圆  $P_i$  使它和圆  $P_{i-1}$  相

切, ..., 过  $A_0, A_{10}$  作圆  $P_9$ , 使它和圆  $P_8$  相切, 最后过  $A_{10}$  作圆  $P_{10}$ , 使它和圆  $P_9$  与圆  $O'$  都相切。由下边三种情况, 来确定这些圆。

一、已知圆  $O$  和圆外两点  $A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2)$ , 求圆  $P$ , 使它通过  $A_1, A_2$  且和圆  $O$  相切。

如图 2-2 所示,

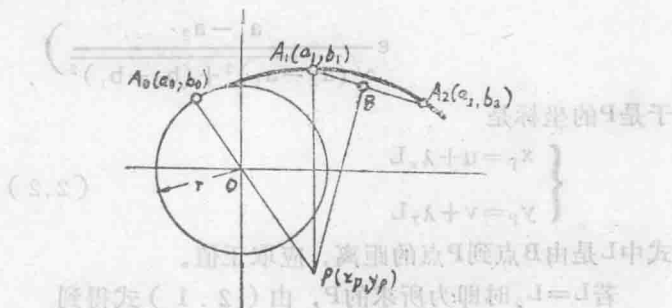


图 2-2

设定圆  $O$  的半径为  $r$ , 切点  $A_0$  坐标为  $(a_0, b_0)$ , 只要确定圆  $P$  的圆心  $P(x_p, y_p)$  即可。

因为  $PA_1$  是它的半径,  $A_0$  点是圆  $O$  和圆  $P$  的切点, 所以  $P$  必在  $OA_0$  直线上, 且有

$$PA_1 = PA_0 = PO + \varepsilon r \quad (2.1)$$

其中  $\varepsilon = \pm 1$ , 若圆  $O$  和圆  $P$  内切  $\varepsilon = 1$ , 若圆  $O$  与圆  $P$  外切, 则  $\varepsilon = -1$ 。  $P$  又在  $A_1A_2$  的垂直平分线上, 令  $B$  为  $A_1A_2$  的中点, 则

$$\vec{OB} = (u, v) = \frac{1}{2} (\vec{OA_2} + \vec{OA_1})$$

$$= \left( \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2} \right)$$



$$\vec{A_1A_2} = \vec{OA_2} - \vec{OA_1} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$$

则和  $\vec{A_1A_2}$  垂直的向量是

$$\lambda(\lambda_x, \lambda_y) = \left( \varepsilon \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}}, \varepsilon \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}} \right)$$

于是P的坐标是

$$\begin{cases} x_p = u + \lambda_x L \\ y_p = v + \lambda_y L \end{cases} \quad (2.2)$$

式中L是由B点到P点的距离，应取正值。

若  $L = L_0$  时即为所求的P，由(2.1)式得到

$$\begin{aligned} & \sqrt{(u + \lambda_x L_0 - a_1)^2 + (v + \lambda_y L_0 - b_1)^2} \\ &= \sqrt{(u + \lambda_x L_0)^2 + (v + \lambda_y L_0)^2} + \varepsilon r \end{aligned}$$

经过展开整理得到

$$GL_0 - H = \varepsilon \sqrt{(\lambda_x L_0 + u)^2 + (\lambda_y L_0 + v)^2}$$

令

$$G = -\frac{a_1 \lambda_x + b_1 \lambda_y}{r}$$

$$H = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + r^2}{2r}$$

两边平方结果是

$$LL_0^2 - 2ML_0 + N = 0$$

式中  $L = G^2 - 1$ ， $M = GH + \lambda_x u + \lambda_y v$ ， $N = H^2 - u^2 - v^2$ ，