

Jisuan Liuti Lixue

计算流体力学

李大鸣 范玉 编著

 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

014057234

035
119

Jisuan Liuti Lixue

计算流体力学

李大鸣 范玉 编著



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS



北航

C1742194

035
119

内容提要

本书系统地介绍了计算流体力学的基本理论、方法和工程应用。内容包括:计算流体力学的基本方程、计算流体力学的有限差分方法和有限元方法以及计算流体力学在工程中的应用。第1章介绍了流体力学和计算流体力学的发展过程,并对流体力学中不同形式的方程进行了推导和说明;第2章对差分方法的原理和应用进行了介绍;第3章对有限元方法的原理和应用进行了阐述;第4章说明了不同的计算网格形式,最后列举了一个完整的工程应用实例。

本书可供水利工程专业研究生和从事计算流体力学应用和研究的师生、科研人员及工程技术人员使用,适于24~32学时的教学选用。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学/李大鸣,范玉编著. —天津:天津大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5618-5140-1

I. ①计… II. ①李… ②范… III. ①计算流体力学 - 研究生 - 教材 IV. ①O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第176359号

出版发行 天津大学出版社
出版人 杨欢
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647
网 址 publish.tju.edu.cn
印 刷 廊坊市海涛印刷有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm×260mm
印 张 11
字 数 275千
版 次 2014年9月第1版
印 次 2014年9月第1次
定 价 24.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

流体是物质存在的物理形态之一,如果将物质存在的形态归纳为固体、液体和气体,而流体就包含了液体和气体,流体所反映的物理形态占物质存在形式的三分之二,研究流体的运动规律的普遍意义则不言而喻。

流体运动的研究涉及众多的科学研究领域,如航天、航空、造船、潜海、气象、海洋、水力、环境、液压、微灌、石化、纳米疏水表面等宇观、宏观和微观工程领域,可见研究流体运动具有重要的理论意义和广泛的应用价值。

流体是可流动的物质,主要表现为易流动性。具体来讲,在重力场中,流体没有自身的形状,其外部形状可以充满或部分充满所占有的容器;静止流体不能承受微小的切应力,在微小的切应力的作用下,流体会发生变形,从而破坏静止状态,进入运动状态;静止流体内部不能承受拉力,在拉力作用下,流体会破碎,失去静止状态;静止流体的自由表面可以承受微小的拉力,并保持静止状态,这种拉力是由于流体分子与其他物质分子间的引力作用形成的,这种拉力称为表面张力。流体可以承受压力,不同流体承受一定压力使自身体积变化不明显的情况,可以用不可压缩流体的概念来处理。

流体力学是研究流体宏观运动规律的科学,宇观和微观流体运动目前没有纳入传统流体力学的研究范畴。

研究流体运动规律的方法主要有现场观测法、理论分析法,实(试)验研究法和数值模拟法。

现场观测法是置身于物理现象出现的自然环境之中,采用直接观察或借助仪器记录物理现象发生过程中的主要物理参数或摄取影像,作为第一手资料直接反映物理现象的存在形式和运动过程,为进一步研究物理现象的运动机理提供依据和验证。

理论分析法主要是通过观察自然界中的流体运动现象,分析其现象的成因、动力作用过程和数学物理描述方法,这一研究过程往往是从现象分析出发,着眼于主要影响因素,提出合理的假定条件,通过物质连续、物质守恒原理,建立数学物理方程,寻找数学物理方程的求解方法,得到对物理现象进行描述的数学表达式,最终比较物理现象与数学表达式的近似程度。流体力学中的主要基本假定是连续介质假定。

实(试)验研究法主要是突出研究对象的主要影响因素,选择合理的模型相似理论,在实(试)验场地中重塑自然环境的条件,重现流体运动过程,采集记录实(试)验过程中的数据、图像资料,根据模型比尺反算自然条件下流体运动过程的物理量,最终比较物理现象与实(试)验成果资料的近似程度。

如果现场观测的环境确实已经存在并且很容易身临其境,如果理论分析所得到的数学物理方程完全可以获得严格求解的数学表达式,如果实(试)验研究完全不受相似准则、正态比尺和经费投入等因素的限制,如果不是计算机技术发展如此迅猛,那么计算流体力学的出现和发展还要滞后相当长的时间。

计算流体力学以理论流体力学为基础,以计算数学理论为指导,以数值分析为方法,以程序实现为目标,用全新的研究视角和方法开拓了新的研究学科。理论流体力学提出的连续介质假定、流体运动的微分方程、描述流体运动的方法、流体的运动形态和阻力形式以及具体工程问题的处理过程,为计算流体力学中数学模型的建立提供了物理图案,例如不同边界的势流问题、管流问题、绕流问题、明渠水流运动、海洋潮汐运动、海洋波浪运动等。计算流体力学的精髓是以数学理论建立的流体力学微分方程或偏微分方程组和偏微分方程组的定解问题,传统的求解方程组解析解的方法只能处理简单的方程和规则的边界条件问题,面对强非线性偏微分方程组和复杂边界条件,需要从数学理论出发提出有效的解决方法。于是在正则摄动和奇异摄动理论基础上提出的渐近解、匹配解、参数展开解就应运而生,其中小参数展开法、Prandtl 匹配法、KBM(Krglov-Bogoliabov-Mitropolski)平均法、多重尺度法、PLK(Poincare-Lighthill 和郭永怀)和自变量与因变量同时展开的合成展开法等具有一定的代表意义。尽管如此,方程的近似解仍不能解决一般工程所提出的复杂流动问题,非连续局部解的概念便由匹配解的概念衍生出来,其基本思想是将整体流动域划分为若干子流动域,将子流动域中符合流动偏微分方程组和内(外)边界条件的解(或线性化的解)匹配在一起,得到整体流动域的解,达到求解偏微分方程组定解条件的目的。

为实现从子流动域到整体流动域的求解过程,需要许多计算技术和数值分析的研究方法来完成,对于不同的研究方法可以采用不同的空间、时间离散方式。例如有限差分法是将整个计算域格点化,用差分代替微分,用差商代替导数,在可控精度条件下将偏微分方程组转化为线性方程组,用线性方程组的解近似偏微分方程组的解;有限单元法是将整个计算域分割为(一维情况)线段、(二维情况)三角形或矩形、(三维情况)四面体或六面体的子计算域,这种子计算域称为单元,设定单元上具有待定系数的偏微分方程组的解,使各单元的近似解与真实解之间的误差值直接、积分、最小二乘法处理或变分法的函数极小化后趋于零,形成线性方程组。

求解线性方程组可以采用矩阵消元法,对于三对角矩阵可以采用追赶法,对大型稀疏矩阵可以采用松弛迭代法,对主元对角占优的矩阵可以用质量集中法快速求解。对特殊形式的微分方程也可以采用直接积分法或特征线法求解。线性方程组求解的实现依赖于计算机编程,现行的 Fortran、Basic、C 和 C#语言较多地被用于编程计算,计算程序中调试系数的确定应取决于计算结果与实测资料的良好对证。

虽然计算流体力学的主要研究基础是流体力学和计算数学,但实现计算流体力学成果的重要手段是数学模型。数学模型的建立、运行和成果展示等诸多研究方面,既属于计算流体力学的研究范畴,又派生出许多新的研究门类。如数据资料的整编和统计,计算点和单元数据联系的自动确定,网格点、线、面拓扑关系的自动生成,不规则网格与规则网格间的变换,网格正则性、拟一致性、结构性的判定,地形数据的插值方法,初始条件、边界条件的设定,时间、空间步长的选取等构成了数学模型前处理的研究内容;数学模型的异维模块衔接,自反馈式调试、验证,串行、并行计算控制,驾驭式决策模式,窗口友好界面等构成了数学模型运行管理的研究内容;数学模型成果列表,时程、过程关系曲线,空间表面曲面、等值线云图、矢量场分布,连续动态演示,仿真模拟渲染等构成了数学模型后处理的研究内容。

总之,计算流体力学涉及的交叉学科较多,涵盖的科学研究内容丰富。就单一方面来讲比较容易掌握,但就整体来说需要付出较多精力才能初步运用好,在此真诚希望选修计算流体力学的硕士、博士研究生通过学习有所收获,同时衷心感谢为本教材编写提供帮助的专家、学者和研究人员。

第1章 计算流体力学的基本方程	李大鸣
1.1 流体力学方程的形成和研究方法	2014年3月
1.2 流体力学方程的表达方式	
1.3 张量表示方法	33
1.4 复杂流动方程的推导	37
第2章 计算流体力学的有限差分方法	46
2.1 差分格式	50
2.2 偏微分方程的差分格式	58
2.3 差分格式的截断误差和差分方程的相容性	64
2.4 差分方程的稳定性分析	67
2.5 流体力学方程的几种差分格式	71
2.6 过程的稳定性和定解条件的恰当性	73
2.7 数值模型的ADI差分方法	75
第3章 计算流体力学的有限元方法	85
3.1 试函数与基函数	85
3.2 余量法	86
3.3 变分法	91
3.4 插值函数和形状函数	96
3.5 有限元方程建立和求解	109
3.6 二维不可压无黏流动的有限元解	119
第4章 计算流体力学的工程应用	129
4.1 模型网格的形成	129
4.2 模型的调试和验证	137
4.3 模型边界条件的选择	138
4.4 轴对称模型建立的基本步骤	140
4.5 工程应用实例	140
参考文献	168

第1章 计算流体力学的基本方程

第1章 计算流体力学的基本方程	1
1.1 流体力学方程的形成和研究方法	1
1.2 流体力学方程的表达方式	9
1.3 张量表示方法	35
1.4 复杂流动方程的推导	37
第2章 计算流体力学的有限差分方法	50
2.1 差分格式	50
2.2 偏微分方程的差分格式	58
2.3 差分格式的截断误差和差分方程的相容性	64
2.4 差分方程的稳定性分析	67
2.5 流体力学方程的几种差分格式	71
2.6 过程的稳定性和定解条件的恰当性	77
2.7 数值模拟的 ADI 差分方法	78
第3章 计算流体力学的有限元方法	85
3.1 试函数与基函数	85
3.2 余量法	86
3.3 变分法	91
3.4 插值函数和形状函数	96
3.5 有限元方程建立和求解	109
3.6 二维不可压无黏流动的有限元解	119
第4章 计算流体力学的工程应用	129
4.1 模型网格的形成	129
4.2 模型的调试和验证	137
4.3 模型边界条件的选择	138
4.4 数学模型建立的基本步骤	140
4.5 工程应用实例	140
参考文献	168

然相反的理论,如在球绕流问题上,要证明的结论是球的阻力为零,而实验证明球绕流时却有阻力存在。以至于流体力学与水力学在研究同一问题时,不能统一在同一理论的基础上。

例1-1 圆柱绕流理论求解圆柱绕流的阻力。

解:考虑圆柱的截面为圆形,将原点设置在圆心的极坐标中得到轴对称的柱面边界条件,选择适于圆形边界的极坐标下势流速度方程和无旋条件,有

第1章 计算流体力学的基本方程

流体力学的基本方程应用于计算、模拟流体运动,可以将这些基本方程称为计算流体力学的基本方程。认识和了解流体力学基本方程的形成过程和研究方法有助于丰富流体力学知识,增加计算流体力学的研究兴趣。

1.1 流体力学方程的形成和研究方法

流体力学方程的形成与水力学研究的发展密切相关。水力学是以实验为基础发展起来的研究水流宏观运动规律的科学。流体力学是以数学理论为基础研究流体宏观运动规律的科学。

水力学的研究发展较早,如果将早期人们为生存抵御洪水、汲取生活用水和排放污水而修建的工程归入水力学研究的启蒙阶段,在这一时期人们只是被动地为适应自然环境对水流运动规律进行研究。历史上引水、治水的事例很多,如中国远古时代的大禹治水、春秋战国时代的李冰父子建设的都江堰、秦朝时期的郑国渠(公元前256—前210年);阿基米得的《论浮体》(公元前250年)是世界上最早与水有关的论文;在中世纪,明渠输水系统已经出现,如埃及与美索布达米亚的灌溉、罗马规模宏大的供水、欧洲城市的污水排放渠道等;埃及人利用重力流从尼罗河引水、美索布达米亚人从幼发拉底河向底格里斯河引水;在印度低地也发现了用管道和砖砌成的排水道。欧洲文艺复兴时代(Renaissance),莱昂纳多·达·凡奇(Leonardo Da Vinci)对河道水流运动及流速分布已有了正确理解;达西和巴辛(Darcy和Bazin)的管流与明渠流实验在1816年由杜·布勒(Du Buat)进行了报告;明渠的阻力问题在1768年由谢才(Chezy)提出,1889年罗伯特·曼宁(Robert Manning)完善了明渠阻力公式;1738年伯努利(Bernulli)记录了关于流体运动和阻力的备忘录;在18世纪中叶牛顿(Newton)、莱布尼茨(Leibniz)、伯努利和欧拉(Euler)、拉普拉斯(Laplace)等人已为流体运动微分方程的建立准备了充分的力学理论和数学方法。1822年纳维尔(Navier)提出了流体运动与力的平衡关系,1843年Saint-Venant提出了流体应力状态,1845年斯托克斯(Stokes)提出了流体运动微分方程(即建立了应力状态与流体运动速度变化率的关系),形成了著名的纳维尔-斯托克斯(Navier-Stokes)方程。与此同时,水力学在实验的基础上也得到了长足的发展,由于当时用流体力学的势流解理论还不能解释水力学实验成果,有时甚至得出截然相反的结论,如在球的绕流问题上,势流解的结论是球的阻力为零,而实验证明球体绕流却有阻力存在。以至于流体力学与水力学在研究同一问题时,不能统一在同一理论和实验基础之上。

例1-1 运用势流理论求解绕柱体流动的阻力。

解:考虑柱体的截面为圆形,将原点放置在圆心的极坐标能够得到最简单的柱面边界条件处,选择适于圆形边界的极坐标系下势流连续方程和无旋条件,有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} = 0 \quad (1-1)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_r}{r\partial\theta} \right) = 0 \quad (1-2)$$

式中: v_r 为径向 r 的流速; v_θ 为周向 θ 的流速; ω_z 为垂直于 $rO\theta$ 平面的角速度。将式(1-1)和式(1-2)改写为

连续条件

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} \quad (1-3)$$

无旋条件

$$\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \quad (1-4)$$

如果存在连续函数且满足混合偏导数连续条件,即混合偏导数与偏导次序无关:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}$$

设势函数 $\varphi(r, \theta)$ 满足无旋条件式(1-4), 有 $v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $v_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$ 。势的物理意义是表示流体中具有潜在的驱动流体运动的能力。势函数是用函数形式表示势的分布。势函数存在也称为有势。

将势函数代入连续条件式(1-3)中, 得 $\frac{\partial(r\frac{\partial\varphi}{\partial r})}{\partial r} = -\frac{\partial^2\varphi}{r\partial\theta^2}$, 为极坐标系下拉普拉斯方程。

同时全微分 $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta = v_r dr + v_\theta r d\theta$, 要确定 φ 首先要确定 v_r 和 v_θ 。 v_r 和 v_θ 表示流动速度和方向, 宜在流线上确定。

设流函数 $\psi(r, \theta)$ 满足连续条件式(1-3), 有 $v_r = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$, 可见流函数的物理意义是用函数形式表示流线的分布。

将流函数代入无旋条件式(1-4)中, 得 $-\frac{\partial(r\frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r} = \frac{\partial^2\psi}{r\partial\theta^2}$, 也为极坐标系下拉普拉斯方程。

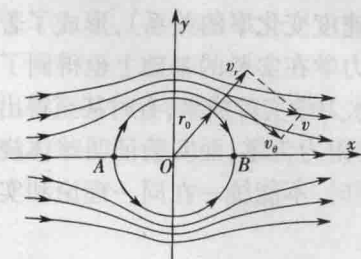


图 1-1 圆柱绕流示意图

同时全微分 $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta = -v_\theta dr + v_r r d\theta$, 注

意到极坐标系下流线方程为 $\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta}$, 则沿流线 $d\psi =$

$-v_\theta dr + v_r r d\theta = 0$, 由 $\int_{r_1}^r v_\theta dr = \int_{\theta_1}^{\theta} v_r r d\theta$ 条件可以确定 v_r

和 v_θ 的表达式, 其中积分路径沿流线为 (r_1, θ_1) 至 (r, θ) , 流线如图 1-1 所示。对简单函数形式的流线, 可直接积分求得; 对复杂问题, v_r 和 v_θ 通过函数叠加或试算的方式确定。

在本例中,给出势函数 $\varphi = v_{\infty} \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta$, 流函数 $\psi = v_{\infty} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta$, 同时满足无旋条件和连续条件, 其中 r_0 为圆柱直径, v_{∞} 为远离圆柱处的均匀来流速度。可得

$$v_r = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta, v_{\theta} = -v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (1-5)$$

圆柱表面上 $r = r_0$ 的流速为 $\begin{cases} v_r = 0 \\ v_{\theta} = -2v_{\infty} \sin \theta \end{cases}$, 垂直柱面的流速在柱面处为零; 由于势流中没有考虑黏滞性影响, 则周向流速不为零, 可由式(1-5)确定。

圆柱表面圆周的速度环量为

$$\Gamma = \oint v_{\theta} ds = -v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \int \sin \theta d\theta = 0 \quad (1-6)$$

速度环量 Γ 为速度沿封闭曲线的线积分, 单位为 m^2/s , $\frac{\Gamma}{2\pi r_0}$ 表示圆周上的平均流速, $\frac{\Gamma}{\pi r_0^2}$ 表示圆周所围面积的平均角速度, 速度环量为零时表明圆柱没有旋转运动的趋势。

流场中沿流线的压强变化符合伯努利方程, 即

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1-7)$$

式中: p_{∞} 表示远离圆柱处的压强; p 为流线上任意点压强; v 为任意点流速。

圆柱上半圆和下半圆分别为两条流线, 圆柱表面圆周的压强分布为

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho (v_{\infty}^2 - v^2) = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (1-8)$$

圆柱表面圆周的压强垂直于壁面, 求合力时需沿圆柱表面的圆周和圆柱高度积分。取单位高度, 并注意到从 A 到 B 有两条转向不同的路径。单位高度合力

$$\begin{aligned} F &= \int_A p dA = \int_{\pi}^0 \left[p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] r_0 d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \left[p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] r_0 d\theta \\ &= r_0 \left\{ \left[p_{\infty} \theta + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (\sin 2\theta - \theta) \right]_{\pi}^0 + \left[p_{\infty} \theta + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (\sin 2\theta - \theta) \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} = 0 \quad (1-9) \end{aligned}$$

合力 $F = 0$, 说明圆柱绕流既无阻力又无升力, 与水力学实验观测相悖。

研究初期, 流体力学与水力学的不协调, 使流体力学与水力学形成两个独立的分支, 流体力学面临的是如何提出新的理论和求解方法来解释水力学的实验成果。因为完美的数学表达式的生命力在于它能否正确表达客观事物的存在规律。水力学也有待于丰富自身的理论基础, 以便上升为理论与实验统一的完善学科。几乎所有研究者都认定忽略流体黏性是造成这种分歧的原因所在, 但如何在考虑黏性作用的条件下求解复杂的流体力学方程, 便成为摆在科学研究者面前的新问题。

特别值得提到的是 1880 年的雷诺 (Reynolds) 实验, 它界定了流体运动的两种形态, 为解决流体力学理论问题规划出新途径。水力学中的尼古拉斯实验、莫迪实验进一步丰富和完善了管流流态的划分。同时期考虑黏性影响的流体力学问题也得到了充分的研究, 如 1851 年 Stockes 对考虑黏性的小雷诺数球体绕流问题得到了严格的理论解。1840—1947 年间对不同简单规则边界问题的纳维尔-斯托克斯方程的解析解有了一些研究成果。详细情况如下所述。

(1) 波依塞(Poiseuille)平面流动(1840—1846年),即在两静止无限长平行平板间,在压力作用下稳定状态的流动,流体速度呈抛物线分布(图1-2)。

(2) 波依塞管内流动(1840—1846年),即在静止无限长常管径圆管内,在压力作用下稳定状态的流动,流体速度呈抛物线分布(图1-3)。

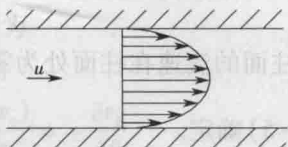


图1-2 波依塞平面流动

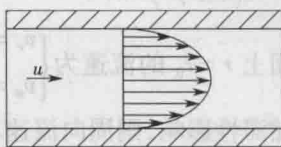


图1-3 波依塞管内流动

(3) 简单古艾特(Couette)流动(1840—1846年),即在两无限长平行平板间错动,下平板静止,上平板以速度 u_0 水平匀速运动,流体中压力梯度为零,流体速度呈直线分布(图1-4)。

(4) 蠕动流绕球流动问题(1851年),即圆球形刚性物体在充满整个空间的不可压缩黏性流体中很缓慢地运动,或流体缓慢绕过球体的流动(图1-5),球体不发生旋转。流体速度与径向坐标呈3次多项式分布。

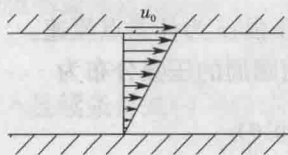


图1-4 简单古艾特流动

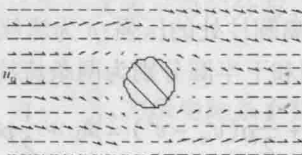


图1-5 绕球流动

(5) 一般古艾特流动(1890年),即在简单古艾特流动基础上,考虑沿流动方向存在压力梯度的稳定流动,可以是正压梯度或逆压梯度。压力增加方向与流速方向相反时为正压梯度,压力增加方向与流速方向相同时为逆压梯度(图1-6)。

(6) 旋转古艾特流动(1890年),即在两同心圆形壁面之间的流体,当外圆静止、内圆以均匀角速度旋转时,流速沿径向呈指数曲线分布(图1-7),与轴承中的油膜运动相似。

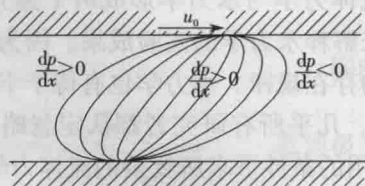


图1-6 一般古艾特流动

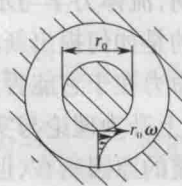


图1-7 旋转古艾特流动

(7) 突然加速流动(1851年),或称为斯托克斯(Stokes)第1问题,也称为瑞利(Reynolds)问题,即一无限长平板沿平板放置方向突然从静止加速到 u_0 ,并以 u_0 作匀速运动,在黏性作用下,流速沿平面垂线呈指数曲线分布(图1-8)。

(8) 平板振荡流动(1851年),或称为斯托克斯(Stokes)第2问题,即一无限长平板沿平板放置方向来回振荡,在黏性作用下,流速沿平面垂线呈扭曲型曲线分布(图1-9)。

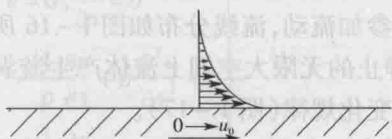


图 1-8 突然加速流动

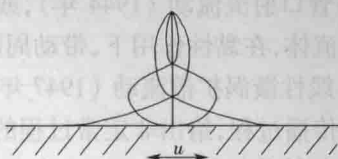


图 1-9 平板振荡流动

(9) 非定常古艾特流动(1911年),或称为斯托克斯-古艾特流动问题,即在简单古艾特流动基础上,上平板静止,下平板突然从静止加速到 u_0 ,并以 u_0 作水平匀速运动,在黏性作用下,流速从指数型曲线分布发展为直线型分布(图 1-10)。

(10) 管内起始流动(1930年),或称为齐曼斯基(Szymanski)流动问题,即在静止无限长常管径管内,流体从静止加速到某一稳定流速,流体速度从右凸曲线发展为抛物线分布(图 1-11)。

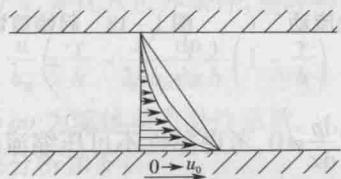


图 1-10 非定常古艾特流动

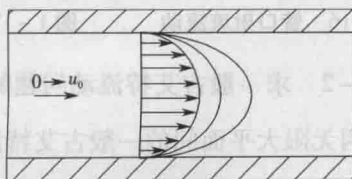


图 1-11 管内起始流动

(11) 二维滞止区域流动(1911),或称为赫麦茨(Hiemenz)流动问题,即在二维垂面上,来流在直线壁面上滞止,流线分布如图 1-12 所示。

(12) 三维滞止区域流动(1936),或称为霍曼妮(Homann)流动问题,即在三维垂面上,来流在平面壁面上滞止,流线分布如图 1-13 所示。

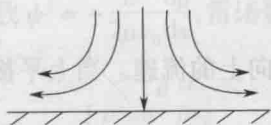


图 1-12 二维滞止区域流动

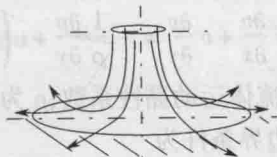


图 1-13 三维滞止区域流动

(13) 旋转圆盘上流动(1921年),或称为卡门(Karman)流动问题,即圆盘在三维空间内的水平面上旋转,流线分布如图 1-14 所示。

(14) 收缩、扩张管道内流动(1916年),或称为海迈尔(Hamel)流动问题,即在充分长收缩及扩张管道内的稳定流动情况,流体速度分布如图 1-15 所示。

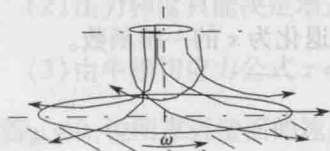


图 1-14 旋转圆盘上流动

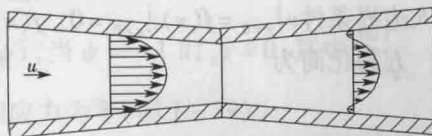


图 1-15 收缩、扩张管道内流动

(15) 管口射流流动 (1944 年), 或称为朗道 (Landau) 流动问题, 即在无限大空间内从管口喷射出流体, 在黏性作用下, 带动周围静止流体参加流动, 流线分布如图 1-16 所示。

(16) 线性漩涡扩散流动 (1947 年), 即初始静止的无限大空间上流体产生漩涡后, 在流体中扩散传播过程, 给出非定常过程的速度、压力变化规律 (图 1-17)。

(17) 起始剪切层流动 (1947 年), 或称为卡斯洛-吉杰 (Carslaw-Jaeger) 流动问题, 即两静止流层以流速 u_0 分别向左右两个方向流动, 由于黏性作用, 在两剪切流层之间流速从外部 u_0 变化为静止层 0, 流速分布如图 1-18 所示。

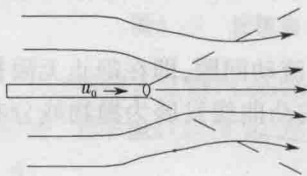


图 1-16 管口射流流动

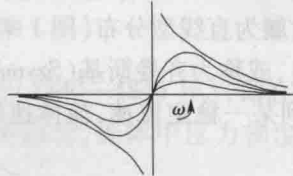


图 1-17 线性漩涡扩散流动

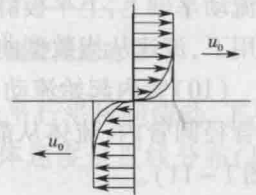


图 1-18 起始剪切层流动

例 1-2 求一般古艾特流动问题的解析解。

解: 两无限大平面间的一般古艾特流动, 压力梯度 $\frac{dp}{dx} \neq 0$, 考虑黏性不可压缩流体运动符合纳维尔-斯托克斯方程。由于两平面无限大, 可以简化为垂面二维流动。

连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-10)$$

动量方程为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1-11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1-12)$$

式中: ν 为流体运动黏性系数; ρ 为流体密度; u, v 为 x, y 方向上的流速。当上平板运动速度为 u_0 时, 边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u|_{y=0} &= 0 \\ u|_{y=h} &= u_0 \\ v|_{y=0} &= 0 \\ v|_{y=h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中: h 为两平板的间距。由于垂直于平板方向的速度变化率为零, 得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = f(x)$$

代入边界条件 $v|_{y=0} = f(x)|_{y=0} = 0$, $f(x)$ 表示二维 (x, y) 函数退化为 x 的一维函数。

方程化简为

$$\left. \begin{aligned} v=0, \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

由积分式(1-14)的第3式得 $p=f(x)$, 说明 p 与 y 无关; 由第1式得 u 与 x 无关。

偏导数可用全导数代替, 有 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy}$ 。

由第2式得 $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$, 使该式成立的条件为各项等于常数 c , 即

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = c \quad (1-15)$$

积分 u , 并代入边界条件, 整理得

$$\frac{u}{u_0} = \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu u_0} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (1-16)$$

式中: $\mu = \rho\nu$ 为流体动力黏性系数。

结果分析如下:

(1) 当 $\frac{dp}{dx} = 0$ 时, $\frac{u}{u_0} = \frac{y}{h}$, 流速为线性分布;

(2) 当 $\frac{dp}{dx} < 0$ 时, $-\frac{h^2}{2\mu u_0} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$ 为正, 使流动加速, 流速分布线右凸;

(3) 当 $\frac{dp}{dx} > 0$ 时, $-\frac{h^2}{2\mu u_0} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$ 为负, 使流动减速, 流速分布线左凸, 在式(1-13)

中, 当负值大于线性分布的正值时, 出现部分反向流动现象。

令常数 $\psi' = -\frac{h^2}{2\mu u_0} \frac{dp}{dx}$, 雷诺数 $R = \frac{\rho u_0 h}{\mu}$, 无量纲化后得

$$\psi' = -\frac{1}{2} \frac{\rho u_0 h}{\mu} \frac{d \frac{p}{\rho u_0^2}}{d \frac{x}{h}} = -\frac{1}{2} R \frac{d[p]}{d[x]} \quad (1-17)$$

式中: $[p]$ 为无量纲压强; $[x]$ 为无量纲距离。

进一步分析表明:

(1) 选择不同断面的两点, 可以确定压力梯度 $\frac{dp}{dx}$;

(2) 压力梯度只能决定增速还是减速, 不能决定速度方向;

(3) 由牛顿切应力公式 $\tau = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h} (1 + \psi)$, 当 $\psi = -1$ 时, $\tau = 0$, 其中 $\left. \frac{du}{dy} \right|_{\psi=-1} =$

0, 而 $\mu \neq 0$, 说明靠近壁面的速度梯度等于零, 则剪切应力为零(图1-19)。

这一时期研究中迷惘的是流体力学方程复杂, 只能对部分简单规则边界问题求解, 而对一些特殊情况和复杂边界的实际问题求解困难, 有些解仅为势流解, 缺乏实用价值。如对黏

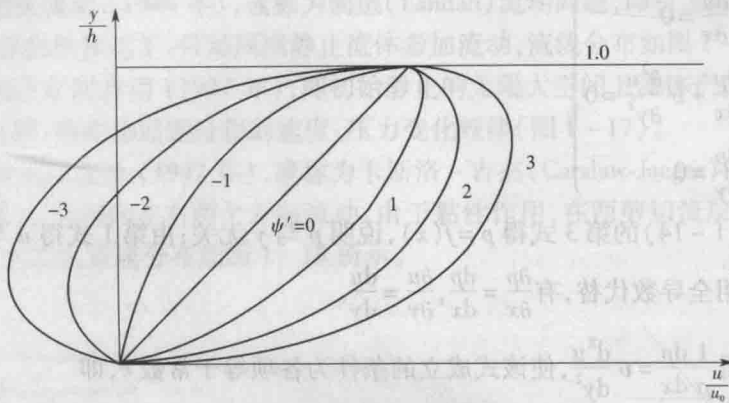


图 1-19 速度分布曲线

性流体中圆球绕流问题可以求得解析解,而圆柱绕流问题却无法求得解析解,出现 Whitehead 佯谬(待定系数多于边界条件)情况。

1904 年普朗特(Prandtl)提出了边界层理论(认为固壁边界上的流体无滑移运动),将流体运动在运动空间上划分为主流区和边界层两个区域。主流区采用势流解,边界层采用黏性流解。分区求解方法的提出,为流体力学的研究提供了新思路,同时解释了水力学与流体力学相悖的实验和理论现象,为水力学与流体力学两个分支的统一奠定了基础。

如果说雷诺在流体运动时间序列上对流体运动形态进行了界定,那么可以说普朗特在流体运动空间范围上对流体运动形式进行了界定。

自 1950 年以后,几乎没有再找到严格的解析解,普朗特提出边界层理论后,可以将流动区域化为两部分求解,给渐近展开匹配近似解法提供了理论基础。20 世纪 60 年代前后以奇异摄动理论为基础的流体力学方程近似解法得到了长足的发展。近似解法主要有小参数展开法、匹配(Prandtl)方法、KBM(Krylov-Bogoliubov-Mitropolski)平均法、多重尺度法、PLK(Poincare-Lighthill 和郭永怀)方法、合成展开法。

计算机与计算方法的发展使数值解广泛应用于工程实际问题之中,解析解、近似解不再是从理论上研究流体运动问题的唯一手段。1965 年 Harlow(美国)发表《流体力学的计算机实验》,模拟卡门涡街。同年,Macagno(法国)发表《水力学模拟的某些新方向》,使用计算机计算管道突然扩张情况下的突然扩大管流。

进入 20 世纪七八十年代,随着计算机技术的迅猛发展,计算流体力学应运而生。伴随着计算机应用和计算方法的完善,计算流体力学已逐渐发展起来,成为流体力学的一个重要分支。

计算流体力学研究的三大基础是流体力学方程、数值计算方法和程序设计语言。

流体力学方程的主要类型列于表 1-1。

表 1-1 流体力学方程的类型

流动形式	方程类型
位势流	拉普拉斯
非定常可压缩无黏流	双曲型(一般情况)
非定常可压缩黏性流	抛物型(一般情况)
非定常不可压缩无黏流	双曲型(一般情况)
非定常不可压缩黏性流	抛物型(一般情况)
定常亚音速流	椭圆型
定常超音速流	双曲型
定常跨音速流	混合型

数值计算方法一般有差分法、有限元法、边界元法、有限体积法、无网格法和光滑粒子法等。

程序设计语言一般采用 Fortran、Basic、C 和 C#(C Sharp) 语言。

1.2 流体力学方程的表达方式

在研究计算流体力学方法前,首先要认识流体力学微分方程。流体力学微分方程的表达形式依赖于坐标系的选择和数学方法的应用。

1.2.1 坐标系

常用的坐标系有笛卡儿坐标系、柱坐标系(在平面问题时转化为极坐标系)、球坐标系、曲线坐标系和贴体坐标或仿边界坐标等。

笛卡儿坐标系下的流体连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-18)$$

式中: (x, y, z, t) 为空间和时间坐标; (u, v, w) 为速度分量; ρ 为流体密度。

式(1-18)第一项为微元体内相对 ∂t 时间的密度变化量;第二项为通过微元体以 x 方向为法线断面的单位面积密度流量相对 ∂x 长度的变化量;第三、四项意义同第二项。

笛卡儿坐标系下实际(可压缩、考虑黏性作用)流体运动微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1-19)$$

式中: (X, Y, Z) 为质量力分量; p 为理想流体的压强; ν 为流体运动黏滞性系数。第一个方程中,第一项为时变(当地)加速度;第二、三、四项为位变(迁移)加速度;第五项为单位质量力;第六项为 x 方向法线断面的单位面积压强相对 ∂x 长度的变化量;第七、八、九项为对应

速度 u 的黏性切应力项;第十、十一、十二项为 x 方向法线断面的各方向相对速度之和平均变化量相对 ∂x 长度的变化量, $\frac{\nu}{3}$ 为第二运动黏滞性系数。

为了解释连续方程(1-18)的物理意义,进行以下变换。由式(1-18)得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

或写为
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

则

$$\frac{d\rho}{\rho} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt = 0 \quad (1-20)$$

又因为 $dm = d(\rho V) = 0$, 其中 m 为质量, V 为体积, $dm = 0$ 表示质量守恒。可得 $\rho dV + V d\rho = 0$, 则

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (1-21)$$

将式(1-21)代入式(1-20)得 $\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$, 则

$$\frac{dV}{V dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-22)$$

该式说明, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 为相对体积对 dt 时间的变化量, 或称为相对体积的变化速率。当 $dV = 0$ 时, 表示流体体积不变, 即流体不可压缩。流体不可压缩连续方程表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-23)$$

在流体不可压缩条件下, 笛卡儿坐标系下的实际流体运动微分方程简化为 N-S 方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

若不考虑流体黏性作用, 式(1-24)可简化为理想流体运动微分方程, 或称为欧拉(Euler)运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

若引入速度矢量模和旋转角速度分量表达式, 则

$$U^2 = u^2 + v^2 + w^2$$