高职高专“十二五”规划教材

高等数学

Higher Mathematics

◎主编　吉耀武

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高职高专"十二五"规划教材

高等数学

主　编　吉耀武
副主编　李金锁　李惠玲　王建芳
参　编　杨　帆　曹西林　吴爱莉　王　蕾
　　　　惠高峰　毛丽霞　贾　娟

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是为满足当前高职高专数学教学改革的需要而编写的，主要包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，二重积分及其应用，无穷级数，拉普拉斯变换等11章内容，每章均配有MATLAB实验.

本书贯彻“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学方针，内容以够用为度，在内容的编排上能够与高中知识衔接，在内容的组织和阐述上都有所创新. 为提高学生学习数学的兴趣，每一章都提供了与内容相适应的阅读材料以及简单的数学实验. 本书的特点是简单通俗，内容简洁，易学好教，突出应用.

本书可供高职高专工科类各专业学生使用，也可作为其他相关专业教师和学生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/吉耀武主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2012.8

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-2861-5

Ⅰ. ① 高… Ⅱ. ① 吉… Ⅲ. ① 高等数学一高等职业教育一教材 Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第160394号

策　　划　毛红兵

责任编辑　王　飞　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西光大印务有限责任公司

版　　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　16

字　　数　377千字

印　　数　1～5000册

定　　价　24.00元

ISBN 978-7-5606-2861-5/O・0135

XDUP 3153001-1

前　言

高等数学是高职高专工科类各专业重要的基础课. 为满足高职高专院校的人才培养要求与教育教学改革需要，贯彻“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学方针，培养更多的应用型人才，我们结合高等数学课程的教学改革，编写了本书.

编写时我们充分考虑到了高等职业教育的特点与学生的实际情况，以及对人才培养目标的要求，参考并吸取了同类教材的优点和课程教学改革的成功经验，且注意将数学思想与现代化的教学手段相结合. 本书的主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，二重积分及其应用，无穷级数，拉普拉斯变换等 11 章内容，每章均配有 MATLAB 实验.

在内容编排上，本书有以下几个特点：

（1）打破传统的课程体系，以实例引入概念，对每一章的定理不作理论证明，只作直观的几何解释，对有关结论、方法的叙述力求简洁明了、通俗易懂.

（2）本书中的例题、能力训练题多数选自与实际生活和工程问题贴近的数学应用案例，以培养学生的数学应用意识，充分体现高职教育的应用性和实用性.

（3）每一章都配备与内容相适应的 MATLAB 数学实验，培养学生运用软件解决问题的能力. 能力训练题都配备参考答案，便于学生学习查对.

（4）为拓展学生的知识，挖掘学生的潜力，在每一章后面都提供有数学建模方面的阅读材料，供学生学习阅读.

（5）本书在编写过程中立足于高职特色，本着学以致用的原则，将高等数学知识进行了必要的整合，使内容更加紧凑，层次更清晰. 本书以培养数学思想、突出应用为重点，以技能训练为主线，让学生通过本课程的学习，在数学思维方法上有所收获、有所提高.

本书的编写框架由吉耀武拟定，吉耀武任主编，李金锁、李惠玲、王建芳为副主编. 参加编写的人员有：毛丽霞（第一章）、贾娟（第二章）、惠高峰（第三章）、王建芳（第四章）、李惠玲（第五章）、吉耀武（第六章）、吴爱莉（第七章）、杨帆（第八章）、王蕾（第九章）、曹西林（第十章）、李金锁（第十一章）. 全书由吉耀武完成最后的统稿.

本书的编写得到了西安铁路职业技术学院有关领导的大力支持，并得到西安电子科技大学出版社的支持和帮助，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，且对高职高专数学课程和教学内容改革的探索还有待深入，书中考虑不周或疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

【学习目标】

知识目标：函数的概念，基本初等函数、复合函数；极限的概念，极限的四则运算法则，两个重要极限；无穷大与无穷小，函数连续的概念，闭区间上连续函数的性质.

技能目标：理解函数、极限的概念，熟练掌握极限的四则运算法则，掌握用两个重要极限求极限的方法；了解无穷大与无穷小的概念，理解无穷小的性质，掌握无穷大与无穷小之间的关系；掌握借助 MATLAB 软件作函数图像的方法；掌握借助 MATLAB 软件求函数极限的方法.

能力目标：培养学生解决问题时由简单到复杂、由特殊到一般的化归思想；培养观察、探索问题的能力；培养全面分析、抽象和概括的能力.

初等数学主要研究常量及其运算，而高等数学主要研究变量与变量之间的依赖关系.函数正是这种依赖关系的体现，也是用数学语言来描述现实世界的主要工具.极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法.本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，重点讨论函数的极限、连续以及极限与连续的实际应用等问题.

1.1　函　　数

近代数学究其本质可以说是变量数学，16 世纪对运动与变化的研究已成为科学研究的中心问题，人们迫切需要一种新的数学工具，从而导致了变量数学的产生.

“函数(function)”一词最早是在 1692 年由德国数学家莱布尼茨提出并开始使用的.1734 年，瑞士数学家欧拉引入了函数符号“$f(x)$”，并称变量函数是一个解析表达式，认为函数是由一个公式确定的数量关系.但当时的函数概念仍然比较模糊，直到 1837 年，德国数学家狄利克雷才比较清楚地说明了函数的内涵.19 世纪 70 年代以后，随着集合概念的出现，函数概念又得以用更加严谨的语言来描述.

一、函数的概念

1. 函数的定义

在工程技术和经济领域的研究中，常常遇到不同的量，例如时间、速度、温度、成本、利润等.这些量可以分为两大类：保持某一数值不变的量，称为常量；在一定范围内可以取不同数值的量，称为变量.

引例 1 ［圆的面积］ 圆的面积 A 与它的半径 r 的关系为 $A=\pi r^2$，当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值. 例如取 $r=1$ m 时，$A=3.14$ m^2.

引例 2 ［银行存款］ 银行的存款本金 A_0，年利率为 r，t 年末 A_0 将增值为 A_t，若以年为期来计算利息，则

一年末的本利和 $A_1=A_0(1+r)^1$；

两年末的本利和 $A_2=A_0(1+r)^2$；

⋮

类推之，t 年末的本利和 $A_t=A_0(1+r)^t$.

由上述例子可以看出，我们在研究事物的变化时，通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系式，这种关系式通过数量关系揭示事物的变化和发展规律，这就是我们中学已学过的函数，函数描述了变量之间的某种依赖关系.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集，如果对任意 $x\in D$，通过某个对应法则，变量 y 总有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 D 为该函数的**定义域**，x 为**自变量**，y 为**因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的变量 y 取值的全体组成的数集称为这个函数的**值域**.

注意 关于函数概念的进一步说明：

(1) 函数记号：在函数 $y=f(x)$ 的表达式中，$f(\ )$ 表示函数关系，而 $f(x)$ 表示对应于 x 的函数值，两者是有区别的.

(2) 函数的两要素：函数的定义域 D 和函数对应关系 f 称为**函数的两要素**. 函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围，而函数值 y 则是由函数对应关系 f 确定的，也就是说，只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才是相同的. 例如函数 $y=x-1$ 和函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 就是两个不同的函数，因为它们的定义域不同.

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(-x)$，$f(\mathrm{e}^t)$.

解

$$f(2)=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1-x}{1+x}$$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f(e^x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

2. 分段函数

引例 3　[脉冲电压函数] 在电子技术中以 2π 为周期的脉冲电压函数 $u(t)$ 表示为

$$u(t)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t<0\\ t, & 0\leqslant t<\pi\end{cases}$$

引例 4　[阶梯函数] 在自动控制系统中的阶梯函数 $f(t)$ 表示为

$$f(t)=\begin{cases}c, & 0\leqslant t<a\\ 2c, & a<t<2a\ (\text{其中 } a,\ c \text{ 为常数})\\ 3c, & 2a<t<3a\end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表示的函数称为分段函数. 分段函数是电子技术、工程技术中常见的一种函数，它表示一个函数，不是几个函数的组合.

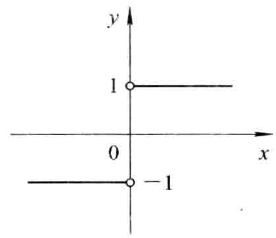

图 1-1

引例 5　[符号函数] $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\ (\text{如图 1-1 所示})\\ 1, & x>0\end{cases}$

3. 函数的表示法

在函数的定义中，并没有具体规定用什么方法表示函数. 为了能更好地研究函数，就应该采用适当的方法将其表示出来. 函数的表示法通常有三种，即解析式法、表格法和图像法.

4. 函数的几种特性

1) 有界性

若存在正数 M，使得函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**，否则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

若函数 $f(x)$ 在 I 上有界，则其图像在直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间，显然，若函数 $f(x)$ 有界，则其界不唯一.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均成立；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，而在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上有界.

2) 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**（或**单调减少**），此时区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）.

例如，函数 $y=x^3$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；函数 $y=-x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$：

若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是 D 上的偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$是 D 上的奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4) 周期性

对于函数 $f(x)$，若存在不为零的数 T，对任意 $x\in I$，均有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为 I 上的周期函数，称 T 为 $f(x)$的周期，通常所说的周期是指它的最小正周期.

二、基本初等函数与初等函数

微积分的研究对象是函数，而一切函数都是由最简单的函数组成的. 最简单的函数有幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数(包括常函数)，这些函数在中学都已经学过，我们将这些函数统称为**基本初等函数**. 为方便起见，我们将基本初等函数的定义域、值域、图像和简单性质列成表(见附录1).

现实世界丰富多彩，复杂多变，会产生许多复杂函数，复杂函数都是由一些基本初等函数构成的. 基本初等函数可以通过平移、伸缩、叠加和复合等运算方法得到各种新的复杂函数，而认识复杂函数的产生和结构将为分析问题和研究问题提供方便.

1. 平移和伸缩

(1) 平移.

通过平移能产生新的函数，例如 $y=x^2+2$ 的图像是将 $y=x^2$ 的图像向上平移 2 个单位得到的，$y=(x-4)^2$ 的图像是将 $y=x^2$ 的图像向右平移 4 个单位得到的，如图 1-2 所示.

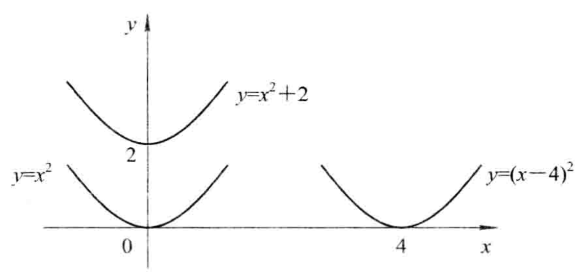

图 1-2

一般地，已知曲线 $y=f(x)$，则有：

向右平移：用 $x-h$ 代替 x，将 $y=f(x)$图像右移 h 个单位形成函数 $y=f(x-h)$；

向左平移：用 $x+h$ 代替 x，将 $y=f(x)$图像左移 h 个单位形成函数 $y=f(x+h)$；

向上平移：用 $y-h$ 代替 y，将 $y=f(x)$图像上移 h 个单位形成函数 $y=f(x)+h$；

向下平移：用 $y+h$ 代替 y，将 $y=f(x)$图像下移 h 个单位形成函数 $y=f(x)-h$.

(2) 伸缩.

用一个常数 k 乘以 $f(x)$，使函数 $y=f(x)$的图像沿垂直方向扩大或缩小 k 倍，形成函数 $y=kf(x)$.

2. 复合函数

引例 6 ［原油扩散面积］油轮在海洋发生原油泄漏事故，假设原油污染海水的面积 A 是被污染圆形水面的半径 r 的函数：$A=\pi r^2$. 同时由于原油在海面上不断扩散，则污染半径 r 又是时间 t 的函数 $r=\varphi(t)$. 因此，原油扩散面积 A 与时间 t 的函数关系是

$$A=\pi r^2=\pi[\varphi(t)]^2=\pi\varphi^2(t)$$

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在某一区间上取值时，相应的 u 使 y 有意义，则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可构成函数 $y=f[\varphi(x)]$，此时 u 称为**中间变量**，y 称为 x 的复合函数. 称 $y=f(u)$ 为**外层函数**，它是因变量 y 与中间变量 u 的函数关系；$u=\varphi(x)$ 为**内层函数**，它是中间变量 u 与自变量 x 的函数关系.

例 2 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的，而函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的.

要认识复合函数的结构，必须清楚其复合过程，也就是要理解如何对复合函数进行分解. 通常采取由外层到内层分解的办法，将 $y=f[\varphi(x)]$ 拆分成若干基本初等函数或简单函数的复合. 习惯上我们将基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数称为简单函数.

例 3 将下列函数分解为简单函数.

(1) $y=(5x-1)^{13}$；　　(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=\ln\sin x$；　　(4) $y=\sqrt{2-5x^2}$.

解 (1) $y=u^{13}$，$u=5x-1$；

(2) $y=\sin u$，$u=x^2$；

(3) $y=\ln u$，$u=\sin x$；

(4) $y=\sqrt{u}$，$u=2-5x^2$.

例 4 将下列函数分解为简单函数.

(1) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{3}}$；　　(2) $y=2^{\cos\sqrt{x^2-1}}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{3}$；

(2) $y=2^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2-1$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算构成，并能用一个解析式来表示的函数，称为初等函数，否则称为非初等函数.

例如，函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=e^{\sin\sqrt{2x+1}}$ 是初等函数. 但工程上常用的分段函数绝大部分不是初等函数，因为在其定义域上不能用一个式子来表示.

能力训练 1.1

1. 下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一个函数，为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=|\cos x|$，$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(3) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

2. 将下列函数分解为简单函数.

(1) $y=\sqrt{1-x}$；　　(2) $y=5(x+2)^2$；

(3) $y=\sin^2(3x+\pi)$；　　(4) $y=\ln 5^{3x-1}$.

3. [仪器的初始价值]设某种仪器由于长期磨损，使用 x 年后的价值是由下列函数模型确定的：$Q(x)=Q_0 e^{-0.04x}$. 已知仪器使用 20 年后的价值为 8986.58 元，当初此仪器价值是多少？

4. [水池造价] 拟建造一个容积为 V 的长方形水池，水池底为正方形，四周单位面积造价为 a 元，如果水池底所用材料的单位面积造价是四周单位面积造价的 2 倍，请写出由水池总造价与底边边长确定的函数关系.

1.2　极限的概念

一、数列的极限

极限是高等数学重要的概念之一，产生于求某些实际问题的精确解. 极限的思想和分析方法广泛地应用于社会生活和科学研究的各个领域. 因此，掌握极限的概念和运算是学好微积分的前提和基础.

引例 7　[庄子名言]　我国战国时期哲学著作《庄子》中有这样的记载："一尺之棰，日取其半，万世不竭". 这句话的意思是：有一尺长的木棍，每天截取它的一半，永远截不完. 这可以用数列表示为：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

每天木棍的长度$\frac{1}{2^n}$是一个变量，随着天数 n 的增大，木棍的长度$\frac{1}{2^n}$越来越短，天数 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，木棍的长度$\frac{1}{2^n}$会无限趋近于常数 0.

引例 8　[割圆术]　我国古代数学家刘徽在《九章算术》中提出了"割圆术"，成功地推算出圆周率和圆的面积. 先作圆内接正六边形，其面积记为 A_1；再作圆内接正十二边形，其面积记为 A_2；循此下去，圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n. 于是得到一系列圆内接正多边形的面积

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

从几何直观上不难看出，随着 n 的增大，对应的圆内接正多边形的面积 A_n 与圆的面积 A 越来越接近(即 $A_n\approx A$)，当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积 A_n 就会无限地接近圆的面积 A. 这种思想就是刘徽提出的割圆术——"割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣".

为描述数列的这种变化趋势，下面我们引入数列极限的概念.

定义 1　对于数列 $\{x_n\}$，当项数 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，数列的项 x_n 无限地趋近

于一个确定的常数 A，那么称 A 是数列 $\{x_n\}$ **当 $n\to\infty$ 时的极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** A，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n\to\infty)$$

例如，在引例 1 中 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，引例 2 中 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$. 如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何确定的常数，即数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

例 5　某企业对生产设备的投资额是 3 万元，每年的折旧费为该设备账面价格（即以前各年的折旧费用提取后余下的价格）的 $\frac{1}{10}$，那么这一设备的账面价格（单位:万元）逐年用数列表示为

$$3,\ 3\times\frac{9}{10},\ 3\times\left(\frac{9}{10}\right)^2,\ \cdots,\ 3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1},\ \cdots$$

随着年份 n 无限增大，账面价格无限接近于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=0$.

例 6　判断下列无穷数列的极限.

(1) $\{x_n\}=\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$；(2) $\{x_n\}=\{3\}$；(3) $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$.

解　(1) 通过观察，当 n 无限增大时，数列通项 $x_n=\frac{n+2}{n+3}$ 无限趋近于常数 1，所以 1 是数列 $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$ 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$$

(2) 通过观察，当 n 无限增大时，数列通项 x_n 总等于 3，所以 3 是数列 $\{3\}$ 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}3=3$$

(3) 数列 $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$ 按项数展开应该是 $\sin\frac{\pi}{2}$，$\sin\pi$，$\sin\frac{3\pi}{2}$，$\sin2\pi$，$\cdots$，$\sin\frac{n\pi}{2}$，$\cdots$，即

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ \sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots$$

显然，当 n 无限增大时，x_n 摆动于 1，0，-1 三个数之间，并不趋于某个确定的常数，所以数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 没有极限.

二、函数的极限

在我们的实际生活中，常常需要考虑连续变化的问题，如某地区野生动物数量的增长规律，某种传染病的传播趋势等，这些问题都涉及函数的极限问题. 我们将数列极限概念中的变量 n 换成函数中的自变量 x，就得到函数极限的概念.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $|x|>M(M>0)$ 时有定义，对于函数 $f(x)$，当 $|x|$ 无限增大时（记为 $x\to\infty$），函数值 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ **当 $x\to\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

定义 2 中 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它既可以沿正方向无限增大（$x\to+\infty$），也可以沿负方向无限增大（$x\to-\infty$），相应的函数值都会无限地趋近于常数 A.

例如，如图 1－3 所示，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，既有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 也有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

但有时 x 的变化趋向只沿其中一种方向（$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$）时，相应的函数值也无限地趋近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，也可记作 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$ 或 $f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

注意　（1）$x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的极限，反映了自变量单方向变化时函数的极限，称为**单向极限**.

（2）不难得出，整体极限（$x\to\infty$）存在的充要条件是单向极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$ 而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 不存在（如图 1－4 所示）.

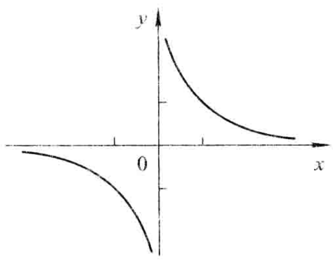

图 1－3

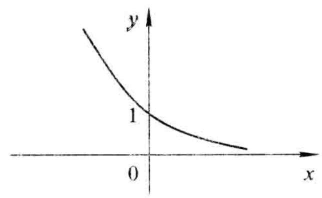

图 1－4

例 7　利用图形说明下列极限是否存在，若存在则求出极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　（1）由图 1－5 可知：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

（2）由图 1－6 可知：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

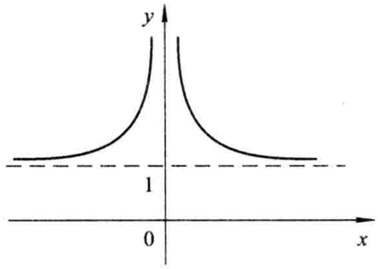

图 1-5

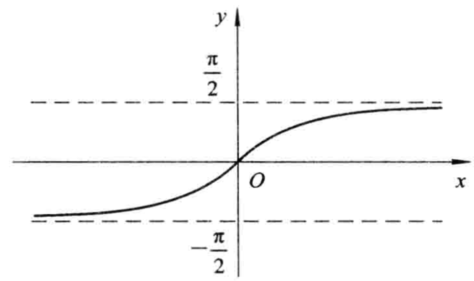

图 1-6

2. $x \to x_0$ 时函数的极限

研究函数 $f(x)$的变化趋势时发现，不仅在 $x\to\infty$时函数有极限，在另一种情况下，即 x 无限趋向于某一定点 x_0(记为 $x\to x_0$)时，函数也会无限地趋近于一个确定的常数.

引例 9　［影子长度］　某人晚上沿直线走向路灯正下方的一点，由常识知道，此人越靠近目标，其影子长度越短，当人越来越接近目标($x\to 0$)时，其影子长度 y 趋于 0.

解　设灯高为 H，人高为 h，人与灯正下方一点的距离为 x，人影的长度为 y.

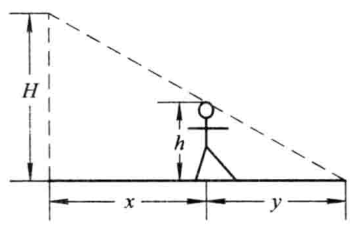

图 1-7

如图 1-7 所示，当人向灯下不断地移动，即 $x\to 0$ 时，人影的长度 y 趋于 0，因为$\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{h}{H}$，由此解得人影的长度 y 是 x 的函数：$y=\dfrac{h}{H-h}x$，其中$\dfrac{h}{H-h}$是常数. 当 x 越来越趋近于 0 时，函数值 y 也越来越趋近于 0，即$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h}{H-h}x=0$，也就是说当人逐渐走向灯的正下方时，人影的长度逐渐为 0.

定义 3　设函数 $f(x)$在 x_0 点附近有定义(x_0 可除外)，对于函数 $f(x)$，当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是**函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限**，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

定义 3 中 $x\to x_0$ 是指 x 趋于 x_0 的方式是任意的，它包含两种情况：

$$x\to x_0\begin{cases}x\to x_0^- & (\text{从 } x_0 \text{ 左侧趋于 } x_0)\\ x\to x_0^+ & (\text{从 } x_0 \text{ 右侧趋于 } x_0)\end{cases}$$

如果当 $x\to x_0^-$(或 $x\to x_0^+$)时函数 $f(x)$的极限存在，则称其为函数 $f(x)$的左极限(右极限)，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\(x\to x_0^+)}}f(x)$或 $f(x_0^-)(f(x_0^+))$. 左极限和右极限反映了自变量从 x_0 一侧变化时函数的极限，称为**单侧极限**.

与 $x\to\infty$情况类似有：整体极限($x\to x_0$)存在的充要条件是单侧极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

例 8　函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$在 $x\to 0$ 时的极限存在吗？为什么？

解　不存在. 因为