理工社®

[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学题源探析经典1000题

CLASSIC

（数学一）

1000 EXERCISES ON MATHS

□ Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

张宇

CLASSIC

考研数学题源探析经典1000题

（数学一）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 数学一 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5640-9099-9

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第079264号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 26.5
字　　数 / 650千字
版　　次 / 2014年5月第1版　2014年5月第1次印刷
定　　价 / 48.00元

责任编辑 / 张慧峰
文案编辑 / 张慧峰
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

巩固所学　见多识广

——与读者谈谈做数学题的学问

本书是一本考研数学习题集.看完教材,学完知识,就要做题.做题有学问吗？请读者认真阅读这个前言,尤其是下面的“五”.

一、题海战术？

曾经有文化媒体的记者问我:你是否同意“题海战术”？我对此问题感到两难.其一,如果我说同意,便会遭到批判——现在都讲素质教育,你怎么还让学生陷于题海之中？只会做题,搞得呆头呆脑;其二,如果我说不同意,那便违背了我的真实想法——不做题,怎么能够把书本上的数学知识内化为自己的本领？面对两难,如何作答？

我与读者讲,当你和别人针锋相对时,不要与其争辩甚至争吵,争来争去,最终谁也说服不了谁.怎么办？提高自己回答问题的“档次”,将他尖锐的问题化解掉——于是,我当时回答:你这个问题本身就有问题,莫说让考研的学生做几个月的数学题,就是让他们做整整一年的数学题,也不能叫题“海”,最多就是个题“河”,其实基本上就是个题“沟”,所以,实事求是地说,我们应该叫“题沟战术”,记者朋友听后大笑.这个回答,既能够低调处理问题,避免争论,也能够道出我的观点:几百道、上千道题目,算不上题海.事实上,我们不用形成题目的汪洋大海,只需**有针对性地、高质量地填满一个题目的小水沟**,就足以应对考研数学了.

这本《张宇考研数学题源探析经典1000题》就是为了实现上面这个切合实际的目标而编写的.

二、考研数学好题的标准

本书命制或者挑选的题目坚持的标准是“好题”.什么是考研数学的好题？我以为要具备以下三点:

(1)**经典性**　所谓经典性是指试题能够恰当、精准地考查考研数学的重要知识点和基本思想方法;

(2)**针对性**　所谓针对性是指试题能够与考研无缝接轨,与考研出题的风格、特点和难度达到高度一致;

(3)**预测性**　所谓预测性是指试题能够对即将到来的考研有预测性.我们承认做题的目的是为了巩固和加强对知识点的认识和理解、学会解题,但同时,如果能够起到预测未来方向的作用,则会锦上添花.

三、考研数学题源探析

根据以上三点，本书精心命制和整合了大约1000道考研数学复习的题目，其主要来源是：

(1)与考研数学命题密切相关的重要资料. 这里包括考研数学命题前的全国征题、部分考研命题的备考题(所谓考研数学B卷考题)、命题人退下来以后命制的题目、某些全国大学数学教学基地的考试题库等，**这些题一般会是综合了多个知识点的题，有一定的难度和区分度.**

(2)前苏联、全国、各省市大学生数学竞赛试题的改编题. 对经典的大学数学竞赛题如何进行改编，使其适合考研的风格和特点，这既是对未来考题的预测(因为这些竞赛题中有很多题目是"潜在的考试题")，也是本书的一大特色. **试题改编是颇费一番周折的，本书中一些重要题目后的"注"，看似题外之话、弦外之音，但是字斟句酌、涵义深刻，请读者仔细品味，必会有所收获. 当然，基于竞赛基础，这些题一般也会是综合题，难度高、区分度大.**

(3)作者在一线教学中编写和积累的经典题目. 这里，有些题目考查的是非常重要的基础知识，有些题目考查的是学生易错的、易混淆的知识，还有些题目，本应是在课堂上讲授给学生的，但是无奈于课堂时间有限，很多精彩的好题没有机会在课上详细解释，也将此选编到本书中，供学生课后巩固所学、增长见识之用. 同时也给没有上我的课程的读者提供一个有价值的习题资料. **这里的题目除了有一定难度的综合题外，还有些简单题，难度不高，但对学生的区分是明显的.**

四、本书的重大改动说明

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题与阅卷、考研数学大纲的编写与修订、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定、部分重点高校(如清华大学、中国人民大学、北京理工大学、浙江大学等)相关教材的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义.

本书最初的版本中，收录了1987年到1999年的考研真题，这部分内容现在已经放到《张宇考研数学真题大全解》那本书里去了，这样更加合理. 于是，读者看到的这本书，事实上是做了**重大改动**的：删去的真题原本占了书中题目的大部分篇幅，**现在补充进来的题目占到全部题目的70%左右，可以说把作者"压箱底的宝贝"基本都拿出来了.**

在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将这本书奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高大学数学学习水平的读者们参考.

五、本书使用说明

首先，我非常希望读者懂得做习题集的科学的态度. 做习题集有两个目的：一是巩固所学，二是见多识广. 所谓巩固所学，读者很容易明白，就是在已经读教材、读例题后，通过演算同例题类似的习题这种重复性劳动，加强对所学知识的认识，加深对所用方法的理解. 但是，所谓见多识广，有些读者好像不会正确应对. 数学题的形式，浩瀚无垠，千变万化，即使在一定的范围内(当然我们这里就是指的在考研大纲的范围内)，想要做到无所不能，也绝非易事. 所以，适当地

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

演算一些从未见过的难题、新题，不仅可以查漏补缺，更能够增长见识，提高解题能力和数学素养，这是做习题集的重要目的. 听者有心，这本习题集中的题目，希望读者不管一开始会与不会，都要好好努力去做，然后结合答案搞清搞透，最终达到巩固所学、见多识广的目的.

接下来，有一个技术问题需要告诉读者. 作为一本习题集，可以采用**“知识分类、先易后难”的原则**来进行题目安排，大部分习题集也确实是这样安排的. 所谓知识分类，是指把考查同一知识点的题目集中在一起，比如从第 1 题到第 10 题，考查知识点甲，从第 10 题到第 20 题，考查知识点乙，以此类推. 所谓先易后难，是指按照从简单到复杂、从考查单一知识到考查综合能力的顺序来安排题目，比如考查知识点甲的第 1 题到第 10 题，一般是第 1 题最好做，越往后越难，到了第 10 题，难度最大. 听起来，这个原则很科学.

然而，本书不采用上述原则. 为什么？第一，“知识分类”会使得这部分题目对读者有明显的提示——你既然知道这一部分都是考知识点甲的，那便很容易找到问题的突破口，题目的难度会大大降低——试想，考研数学的试卷上会告诉你这个题目是考查知识点甲的吗？第二，“先易后难”好像符合人们思考、训练的习惯，但是，这也恰恰不符合考研数学命题的题目安排顺序——考研数学试卷上有两个变化无常：一是高等数学、线性代数、概率论与数理统计放在一张卷子上考，二是题目难度顺序有时难，有时易，难度可以说是“波浪式”的——所以，习题集如果按照“先易后难”的传统习惯，显然与考研数学命题与应考的实际背道而驰.

综上所述，从考研实战的角度出发，为了使考生能够在平时的训练中就逐渐适应考研数学试卷的风格，作者依据**“知识相对混编、难易变化无常”的原则**来进行题目安排：第一，出几个考知识点甲的题目，突然就换到几个考知识点乙、知识点丙的题目，然后还可能再跳回考知识点甲的题目，不出现明显的提示；第二，也许最开始的题目就很难，中间有简单题，再往后做题又会碰到难题，难度“此起彼伏”. 作者用心良苦，希望考生保持实战演练的状态，这样才能更好地使用好本书，发挥它的最大作用.

对于习题集的使用，我建议读者：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，在没有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的习题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把习题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予了作者诸多帮助，为本书增色不少. 感谢家人们，他们中的大多数并不懂书中的内容，可是他们懂得它对我和学生的意义.

张宇

2014 年 5 月 于北京

Contents 目录

第一篇 高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

高等数学

第 1 章　函数、极限与连续

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设在区间$(-\infty,+\infty)$内$f(x)>0$,且当k为大于0的常数时有$f(x+k)=\dfrac{1}{f(x)}$,则在区间$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)$是　(　　)

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

1.2. 设$f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中,是奇函数的是　(　　)

(A) $f(\varphi(x))$　(B) $f(f(x))$　(C) $\varphi(f(x))$　(D) $\varphi(\varphi(x))$

1.3. 设$f(x)=\sin(\cos x)$,$\varphi(x)=\cos(\sin x)$,则在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内　(　　)

(A) $f(x)$是增函数,$\varphi(x)$是减函数　(B) $f(x)$,$\varphi(x)$都是减函数

(C) $f(x)$是减函数,$\varphi(x)$是增函数　(D) $f(x)$,$\varphi(x)$都是增函数

1.4. 设$f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$,$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$,$k=1,2,\cdots$,则当$n>1$时,$f_n(x)=$　(　　)

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

1.5. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$则$f(-x)$等于　(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

1.6. 设$f(x)=u(x)+v(x)$,$g(x)=u(x)-v(x)$,并设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$都不存在,下列论断正确的是　(　　)

(A) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在　(B) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在

(C) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在　(D) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在

1.7. 两个无穷小比较的结果是　(　　)

(A) 同阶　(B) 高阶　(C) 低阶　(D) 不确定

1.8. 函数$f(x)=x\sin x$　(　　)

(A) 在$(-\infty,+\infty)$内无界　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C) 当$x\to\infty$时为无穷大　(D) $x\to\infty$时极限存在

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.9. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$ 的充要条件是 ( )

(A) $\alpha>1$　(B) $\alpha\neq 1$　(C) $\alpha>0$　(D) 与 α 无关

1.10. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，则下述结论正确的是 ( )

(A) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.11. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，则在点 x_0 处必定间断的函数为 ( )

(A) $f(x)\sin x$　(B) $f(x)+\sin x$　(C) $f^2(x)$　(D) $|f(x)|$

1.12. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小（$\beta(x)\neq 0$），则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 ( )

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

1.13. 设当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

1.14. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

1.15. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 ( )

(A) $\lambda<0,k<0$　(B) $\lambda<0,k>0$　(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

1.16. 设 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 ( )

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.17. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 ( )

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　(B) 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个可去间断点　(D) 2 个无穷间断点

1.18. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内间断点的类型只能是 ( )

(A) 第一类间断点　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　(D) 结论不确定

二、填空题（在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.）

1.19. 设 $f(x)$ 是奇函数，且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，又 $f(1)=a$，a 为常数，n 为整数，则 $f(n)=$ ________.

1.20. 对充分大的一切x，给出以下5个函数：100^x，$\log_{10}x^{100}$，e^{10x}，$x^{10^{10}}$，$e^{\frac{1}{100}x^2}$，则其中最大的是________.

1.21. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$ ________.

1.22. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________.

1.23. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^\alpha}=\beta>0$，则$\alpha,\beta$的值为________.

1.24. 若当$x\to0$时，有$\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$，则$a=$ ________.

1.25. 当$x\to0$时，若有$\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$，则$A=$ ________，$k=$ ________.

1.26. 当$x\to\pi$时，若有$\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则$A=$ ________，$k=$ ________.

1.27. 若$f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant0\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，则$a=$ ________.

1.28. 已知数列$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=$ ________.

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均10分/题.)

1.29. 设$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2e^x-1, & x\leqslant0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$求$f[g(x)]$.

1.30. (Ⅰ)求函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$的表达式，$x\geqslant0$.

(Ⅱ)讨论函数$f(x)$的连续性.

1.31. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.32. 求下列极限.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$；

2) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$；

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$；

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$；

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2x}$；

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$；

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$；

13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$；

14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}$；

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$；

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$；

17) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$；

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$；

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$；

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

1.33. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(3)|$，$|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.34. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

1.35. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.36. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

1.37. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.38. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.39. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

1.40. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.41. 求极限

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$.

1.42. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$.

1.43. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq 1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.44. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.

1.45. 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0)$，求 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

1.46. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=10$，试求 α,β 的值.

1.47. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数 A,B.

1.48. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.49. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

1.50. 数列 $\{x_n\}$ 通项 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

1.51. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其极限值.

1.52. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.53. 如果数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，那么$\{x_ny_n\}$是否一定发散?如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散，那么$\{x_ny_n\}$的敛散性又将如何?

1.54. 分段函数一定不是初等函数，若正确，试证之；若不正确，试说明它们之间的关系?

1.55. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

1.56. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$.

1.57. 利用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

1.58. 设$f(x)$在$x=0$处二阶导数连续，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

试求$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$以及极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.59. 计算$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

1.60. 设$a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$，$n=1,2,\cdots$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.61. 试讨论函数$g(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant 0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性.

1.62. 求函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$的间断点，并判断它们的类型.

1.63. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求$f(x)$的间断点并判定其类型.

1.64. 设函数$f(x)$连续可导，且$f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,dt$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.65. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$，为了使$f(x)$对一切$x$都连续，求常数$a$的最小正值.

1.66. 设$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x<0\end{cases}$，求$f(x)$的间断点，并说明间断点的类型，如是可去间断点，则补充或改变定义使它连续.

1.67. 设$f(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$$((x-1)(t-1)>0,x\neq t)$，函数$f(x)$由下列表达式确定，

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x,t),$$

求出$f(x)$的连续区间和间断点，并研究$f(x)$在间断点处的左右极限.

1.68. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，是$[a,b]$上一个点列，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

1.69. 设函数 $f(x)$ 在 $0<x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^{\sin x}$，其他的 x 满足关系式 $f(x)+k=2f(x+1)$，试求常数 k 使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

1.70. 设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明：函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

答案与解析

一、选择题

1.1. (C) 【解析】因为 $f(x+2k)=\dfrac{1}{f(x+k)}=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数.

1.2. (D) 【解析】令 $g(x)=\varphi(\varphi(x))$，注意 $\varphi(x)$ 是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi(\varphi(-x))=\varphi(-\varphi(x))=-\varphi(\varphi(x))=-g(x).$$

【注】复合函数的奇偶性：若 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则在4个复合函数 $f(\varphi(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$ 中，只有 $\varphi(\varphi(x))$ 是奇函数，其余均为偶函数.

1.3. (B) 【解析】注意在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，$\sin x$ 是增函数，$\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，有 $\cos x_1>\cos x_2$，所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即 $f(x)$ 是减函数；由于 $\sin x_1<\sin x_2$，所以 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【注】复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$，是增函数，而 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$ 是减函数.

1.4. (C) 【解析】$f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

设
$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\ (k\geqslant 1),$$

则

$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant 1$，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故选(C).

1.5. (D) 【解析】$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.6. (C) 【解析】令 $u(x)=\dfrac{2}{x}$，$v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x)=v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x)=\dfrac{1}{x}$，$v(x)=-\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(D).

1.7. (D) 【解析】如 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较高低.

1.8.（A）【解析】对于任意给定的正数 M，总存在着点 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2},n>\frac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)|=|2n\pi+\frac{\pi}{2}|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(C) 错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x$（只要 $|n|>\frac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.9.（B）【解析】令 $\frac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}=\dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha\neq1)$.

1.10.（D）【解析】设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x)=x$，当 $x\to0$ 时为无穷小，可排除(A). 设 $x\to0$ 时，令 $f(x)=x^2,g(x)=\frac{1}{x}$ 可排除(B)，(C).

1.11.（B）【解析】**方法一**　若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续，则

$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$

在点 x_0 处也连续，与已知矛盾.

方法二　排除法. 设 $f(x)=\begin{cases}0,x\neq0,\\1,x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，$f(x)\sin x=0$ 在 $x=0$ 处连续. 若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\-1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $f^2(x)=1$，$|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A)，(C)，(D).

1.12.（A）【解析】有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小量.

1.13.（C）【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left(e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right)}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq0,$$

则 $n=3,C=\frac{1}{3}$ 时成立.

1.14.（A）【解析】由泰勒公式

$$\sin ax=ax-\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)(x\to0)$$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1$$

$$\Rightarrow a=1,-\frac{1}{6b}=1\Rightarrow a=1,b=-\frac{1}{6}.$$

1.15.（D）【解析】分母不为零，故 $\lambda\leqslant0$；又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，故 $k>0$.

1.16.（D）【解析】由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0,x=1$ 为其间断点.

$x\to1^+,x-1\to0^+,\frac{x}{x-1}\to+\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty,f(x)\to0,$

$x\to1^-,x-1\to0^-,\frac{x}{x-1}\to-\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to0,f(x)\to-1,$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com