



工业和信息化部普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目



21世纪高等学校
经济管理类规划教材
高校系列

ECONOMIC
MATHEMATICS-CALCULUS

经济数学 ——微积分

+ 杨慧卿 主编

强调概念形成，注重思想方法
增加例题配置，加强专业应用
突出问题解决，培养数学能力

ECONOMICS
AND
MANAGEMENT



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



014058336

工业和信息化普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目

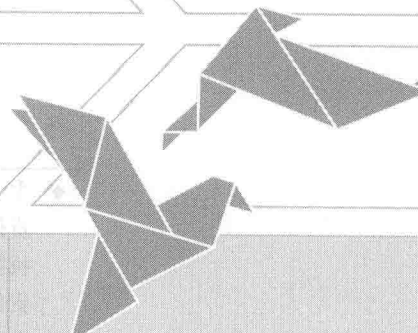


21世纪高等学校
经济管理类规划教材
高校系列

ECONOMIC
MATHEMATICS-CALCULUS

经济数学 ——微积分

+ 杨慧卿 主编



人民邮电出版社
北京

F224.0

257

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 微积分 / 杨慧卿主编. — 北京: 人民邮电出版社, 2014. 9
21世纪高等学校经济管理类规划教材. 高校系列
ISBN 978-7-115-35548-5

I. ①经… II. ①杨… III. ①经济数学—高等学校—教材②微积分—高等学校—教材 IV. ①F224.0②0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第144317号

内 容 提 要

本书针对应用型本科经济管理类专业的需求,根据教育部高等学校数学与统计教学指导委员会制订的《经济管理类数学基础课程教学基本要求》,并参考硕士研究生考研大纲数学三的要求编写而成.全书共分6章,包括函数、极限和连续,一元微分学——导数、微分及其应用,一元函数积分学——不定积分、定积分及其应用,多元函数微分学,微分方程与差分方程,无穷级数.

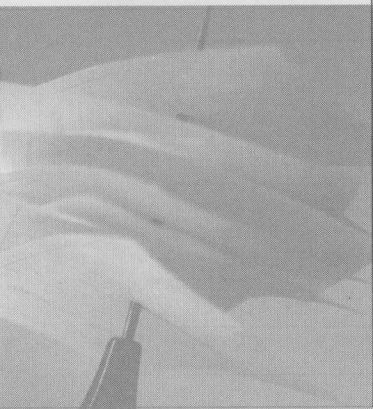
本书注重数学概念的引入和数学思想方法的分析,并利用几何直观和数值计算等方法介绍抽象的数学原理,强调知识间的联系和微积分知识在经济问题中的应用.本书结构紧凑,语言通俗,深入浅出,例题丰富,可读性强,便于自学,可作为高等学校经济管理类专业本科专科的教材或教学参考书.

-
- ◆ 主 编 杨慧卿
责任编辑 张孟玮
执行编辑 税梦玲
责任印制 彭志环 杨林杰
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 20.25 2014年9月第1版
字数: 479千字 2014年9月北京第1次印刷

定价: 45.00元

读者服务热线: (010)81055256 印装质量热线: (010)81055316
反盗版热线: (010)81055315

前言 Foreword



本书是安徽省精品资源共享课程《高等数学》的建设成果,是在考虑应用型本科高校经济管理类专业“高等数学”课程的教学现状基础上,针对应用型本科高校经济管理类专业的需求,根据教育部高等学校数学与统计教学指导委员会制订的《经济管理类数学基础课程教学基本要求》,并参考了最新《全国硕士研究生入学统一考试(数学三)》考试大纲的要求编写而成。

本书在编写过程中,参考了近年来国内外出版的多本同类教材,在教材体系、内容安排和例题配置等方面吸取了它们的优点,同时结合我们多年来在“高等数学”课程教学上的经验,形成了本书的以下主要特点:

(1) 在书的体系和内容上,对有关内容进行了整合,调整了一些内容的先后顺序,显得更加紧凑,加强了知识间的联系。

(2) 对于抽象的概念和定理尽量通过几何直观和数值计算帮助学生进行理解,对于部分理论要求较高的定理的证明采取小字处理,供学生选读。

(3) 注重与中学数学在内容上的衔接,安排了中学未学而又需要用到的相关内容。

(4) 注重数学知识的实际应用,选编了大量与生活、经济密切相关的实际问题,为学生后续课程的学习提供方便。同时在涉及经济学相关符号的表达上,与现行的经济学教材保持一致。

(5) 注重学法指导,每节前列出学习要求,使学生明确目标,帮助学生把握学习重点,设置【思考】栏目,提出一些启发性的问题激发学生思考。

(6) 注重数学知识中所蕴含的数学思想方法的分析与揭示,使读者受到一定的数学思想方法的训练。

(7) 在习题的配备上,为不同学习阶段和不同需求的学生提供了更多的选择。课后习题分为每节后习题和每章后复习题(A)组、(B)组。每节后的习题注重基本要求知识的巩固和理解;每章后复习题(A)组在题型上更为多样,在难度上较每节后的习题有所提高,每章后复习题(B)整理汇编了自2009年以来的考研真题,可供学有余力和

有志报考研究生的学生选用.

(8) 内容简明, 层次清晰, 语言表述准确、通俗易懂、例题丰富, 可读性强, 便于自学.

本书各章课时安排建议如下.

第1章	函数、极限和连续	18 课时 (含 2 课时习题课)
第2章	一元函数微分学——导数、微分及其应用	26 课时 (含 4 课时习题课)
第3章	一元函数积分学——不定积分、定积分及其应用	26 课时 (含 4 课时习题课)
第4章	多元函数微积分学	28 课时 (含 4 课时习题课)
第5章	微分方程与差分方程	12 课时 (含 2 课时习题课)
第6章	无穷级数	14 课时 (含 2 课时习题课)
合计	124 课时 (含 18 课时习题课)	

本书由杨慧卿任主编, 程潘红、胡贝贝、张梅、范媛媛等老师参与了课后习题的演算和习题参考答案的编写.

在本书的编写过程中, 得到了滁州学院教务处、数学与金融学院、经济与管理学院的大力支持, 得到了数学与金融学院大学数学教研室、经济与管理学院经济学系多位老师的帮助, 特别是王雄亮、金洪、李宏亮、周晖、张晴等老师对本书提出了许多宝贵的意见和建议. 在此一并表示衷心感谢.

虽然我们希望能编写一本质量较高、适合当前教学实际的教材, 但限于水平, 书中仍可能有未尽人意之处, 敬请读者批评指正.

编者
2014 年 4 月

目录 Content

第1章 函数、极限与连续

1.1 函数的概念和性质 /1

1.1.1 区间和邻域 /1

1.1.2 函数的概念 /2

1.1.3 函数的表示法 /3

1.1.4 函数的几何特性 /5

习题 1.1 /7

1.2 反函数与复合函数 /8

1.2.1 反函数 /8

1.2.2 三角函数与反三角函数 /9

1.2.3 复合函数 /11

1.2.4 基本初等函数与初等函数 /12

习题 1.2 /13

1.3 常用的经济函数介绍 /13

1.3.1 单利与复利公式 /14

1.3.2 需求函数与供给函数 /14

1.3.3 成本函数与平均成本函数 /16

1.3.4 收益函数与利润函数 /16

习题 1.3 /18

1.4 数列、函数的极限 /19

1.4.1 中国古代数学的极限思想 /19

1.4.2 数列的极限 /20

1.4.3 函数的极限 /21

习题 1.4 /25

1.5 无穷小与无穷大 /26

1.5.1 无穷小与无穷大的概念 /26

1.5.2 无穷小的性质 /27

1.5.3 无穷小的阶的比较 /28

习题 1.5 /28

1.6 极限的运算法则 /29

1.6.1 极限的四则运算 /29

1.6.2 复合函数的极限运算法则 /33

习题 1.6 /33

1.7 极限存在准则与两个重要极限 /34

1.7.1 极限存在准则 /34

1.7.2 两个重要极限 /35

1.7.3 利用无穷小等价替换定理进行极限计算 /38

1.7.4 连续复利 /40

习题 1.7 /41

1.8 函数的连续性 /41

1.8.1 函数的连续与间断 /42

1.8.2 连续函数的性质及初等函数的连续性 /45

1.8.3 闭区间上连续函数的性质 /46

习题 1.8 /48

第 1 章复习题 /48

第 2 章 一元函数微分学——导数、微分及其应用

2.1 导数的概念 /52

2.1.1 引例 /52

2.1.2 导数的概念 /54

2.1.3 几种基本初等函数的导数公式 /54

2.1.4 左导数与右导数 /56

2.1.5 导数的几何意义 /57

2.1.6 函数的可导与连续的关系 /57

习题 2.1 /58

2.2 导数的运算 /59

2.2.1 导数的四则运算法则 /59

2.2.2 复合函数的求导法则 /61

2.2.3 隐函数的求导方法 /63

2.2.4 对数求导法 /65

2.2.5 基本导数公式和求导法则 /66

2.2.6 高阶导数 /67

习题 2.2 /69

2.3 导数在经济学中的简单应用 /70

2.3.1 边际与边际分析 /70

2.3.2 弹性与弹性分析 /73

习题 2.3 /75

2.4 函数的微分 /76

2.4.1 微分的概念 /76

2.4.2 微分的几何意义 /78

2.4.3 微分在近似计算中的应用 /78

2.4.4 微分基本公式和微分的运算法则 /80

习题 2.4 /81

2.5 微分中值定理 /81

2.5.1 罗尔定理 /81

2.5.2 拉格朗日中值定理 /83

2.5.3 柯西中值定理 /86

习题 2.5 /86

2.6 洛必达法则 /87

2.6.1 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 /87

2.6.2 其他类型未定式 /89

习题 2.6 /91

2.7 函数的单调性、极值与最值 /92

2.7.1 函数的单调性 /92

2.7.2 函数的极值与求法 /93

2.7.3 最大值与最小值 /96

习题 2.7 /98

2.8 曲线的凹凸性、拐点及函数作图 /100

2.8.1 曲线的凹凸性、拐点 /100

2.8.2 曲线的渐近线 /102

2.8.3 函数作图 /103

习题 2.8 /105

第 2 章复习题 /106

第 3 章 一元函数积分学——不定积分、定积分及其应用

3.1 不定积分的概念和性质 /110

3.1.1 原函数和不定积分的概念 /110

3.1.2 不定积分的性质 /112

3.1.3 不定积分的基本公式 /113

习题 3.1 /115

3.2 不定积分的换元积分法 /115

3.2.1 第一换元积分法(凑微分法) /116

3.2.2 有理函数的积分 /119

- 3.2.3 第二换元积分法 /121
- 习题 3.2 /125
- 3.3 不定积分的分部积分法 /126
- 习题 3.3 /130
- 3.4 定积分的概念 /130
- 3.4.1 定积分概念的引入 /130
- 3.4.2 定积分的概念 /132
- 3.4.3 定积分的几何意义与经济意义 /133
- 习题 3.4 /134
- 3.5 定积分的性质 /135
- 习题 3.5 /137
- 3.6 微积分基本定理 /137
- 3.6.1 变速直线运动的路程 /137
- 3.6.2 积分上限函数与原函数存在定理 /138
- 3.6.3 牛顿-莱布尼兹公式 /139
- 习题 3.6 /141
- 3.7 定积分的换元积分法与分部积分法 /142
- 3.7.1 定积分的换元积分法 /142
- 3.7.2 定积分的分部积分法 /144
- 习题 3.7 /146
- 3.8 反常积分 /147
- 3.8.1 无穷区间上的反常积分 /147
- 3.8.2 无界函数的反常积分 /149
- 3.8.3 Γ 函数 /150
- 习题 3.8 /152
- 3.9 定积分的几何应用与经济应用 /152
- 3.9.1 微元法 /153
- 3.9.2 定积分的几何应用 /153
- 3.9.3 定积分在经济中的应用 /158
- 习题 3.9 /161
- 第 3 章复习题 /162
- 第 4 章 多元函数微积分学**
- 4.1 空间解析几何基础知识 /167
- 4.1.1 空间直角坐标系 /167
- 4.1.2 常见的空间曲面及其方程 /169
- 4.1.3 空间曲线及其在坐标面上的投影
- 曲线 /172
- 习题 4.1 /172
- 4.2 多元函数的概念 /173
- 4.2.1 平面区域的相关概念 /173
- 4.2.2 多元函数的概念 /175
- 4.2.3 二元函数的极限 /176
- 4.2.4 二元函数的连续性 /178
- 习题 4.2 /179
- 4.3 偏导数及其应用 /180
- 4.3.1 偏导数 /180
- 4.3.2 高阶偏导数 /182
- 4.3.3 偏导数在经济分析中的应用 /184
- 习题 4.3 /186
- 4.4 全微分及其应用 /187
- 4.4.1 全微分 /187
- 4.4.2 全微分在近似计算中的应用 /191
- 习题 4.4 /191
- 4.5 多元复合函数与隐函数的求导公式 /192
- 4.5.1 多元复合函数的求导公式 /192
- 4.5.2 隐函数的求导公式 /196
- 习题 4.5 /197
- 4.6 多元函数的极值及其应用 /198
- 4.6.1 多元函数的极值 /198
- 4.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法 /200
- 4.6.3 多元函数的最值 /202
- 习题 4.6 /205
- 4.7 二重积分的概念和性质 /205
- 4.7.1 二重积分的概念 /205
- 4.7.2 二重积分的性质 /208
- 习题 4.7 /209
- 4.8 直角坐标下二重积分的计算 /210
- 4.8.1 直角坐标下二重积分的计算 /210
- 4.8.2 交换二次积分次序 /214
- 习题 4.8 /215
- 4.9 极坐标下二重积分的计算 /216
- 4.9.1 极坐标系 /216
- 4.9.2 极坐标下二重积分的计算 /218

- 4.9.3 无界区域上的反常二重积分 /221

习题 4.9 /222

第 4 章复习题 /223

第 5 章 微分方程与差分方程

- 5.1 微分方程的基本概念 /228
- 5.1.1 微分方程的概念 /228
- 5.1.2 微分方程的解 /230
- 习题 5.1 /231
- 5.2 一阶微分方程 /231
- 5.2.1 可分离变量的微分方程 /232
- 5.2.2 齐次方程 /234
- 5.2.3 一阶线性微分方程 /237
- 习题 5.2 /240
- 5.3 二阶常系数线性微分方程 /241
- 5.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程 /242
- 5.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 /245
- 习题 5.3 /248
- 5.4 差分方程 /248
- 5.4.1 差分的概念 /249
- 5.4.2 差分的运算法则 /249
- 5.4.3 差分方程的概念 /250
- 5.4.4 常系数线性差分方程的解的结构 /251
- 5.4.5 一阶常系数线性差分方程的解法 /251
- 习题 5.4 /256
- 第 5 章复习题 /257

第 6 章 无穷级数

- 6.1 常数项级数的概念和性质 /259
- 6.1.1 常数项级数的概念 /259
- 6.1.2 常数项级数的性质 /262
- 习题 6.1 /263
- 6.2 正项级数及其审敛法 /264
- 6.2.1 正项级数收敛的充分必要条件 /264
- 6.2.2 比较审敛法及其极限形式 /265
- 6.2.3 比值审敛法和根值审敛法 /267
- 习题 6.2 /269
- 6.3 任意项级数敛散性的判别 /270
- 6.3.1 交错级数与莱布尼兹判别法 /270
- 6.3.2 绝对收敛与条件收敛 /271
- 习题 6.3 /273
- 6.4 幂级数 /273
- 6.4.1 函数项级数的概念 /273
- 6.4.2 幂级数 /274
- 6.4.3 幂级数的运算 /277
- 习题 6.4 /279
- 6.5 函数的幂级数展开 /280
- 6.5.1 泰勒公式 /280
- 6.5.2 泰勒级数 /281
- 6.5.3 将函数展开成幂级数 /282
- 习题 6.5 /286
- 第 6 章复习题 /286
- 习题参考答案 /289**
- 附录 常用三角公式 /315**
- 参考文献 /316**

第 1 章

函数、极限与连续

函数表示了变量之间的相依关系,是微积分的研究对象.极限是一种有关无穷变动的量的运算,是研究微积分的重要工具.连续则是函数的一种性质.本章将在回顾函数的概念和性质的基础上,进一步认识反函数和复合函数,在介绍极限的概念和运算的基础上,讨论函数的连续性,并介绍常见的几种经济函数.

1.1

函数的概念和性质

学习要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会求函数的定义域,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的单调性、周期性、奇偶性和有界性,会判断函数的奇偶性和有界性.

1.1.1 区间和邻域

区间是一类常用的数集,分为有限区间和无限区间.

设 a 和 b 均为实数,且 $a < b$,则有限区间表示如下.

$$\text{开区间 } (a, b) = \{x | a < x < b\}$$

$$\text{闭区间 } [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

$$\text{半开半闭区间 } [a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

引入记号 $+\infty, -\infty$,则无限区间表示如下.

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

$$(-\infty, +\infty)$$

邻域是一种特殊的区间,是后续学习中常用的一个重要概念.

定义 1.1 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}$$

点 a 称为 $U(a, \delta)$ 的中心, δ 称为 $U(a, \delta)$ 的半径(如图 1.1 所示).

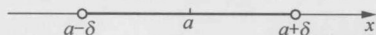


图 1.1

在数轴上, $U(a, \delta)$ 表示到点 a 的距离小于 δ 的点的全体.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a , 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

其中, $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 记为 $U^-(a, \delta)$, $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域, 记为 $U^+(a, \delta)$.

1.1.2 函数的概念

在实际问题中, 常常涉及多个变量, 这些变量并不是彼此孤立存在, 而是按照一定的规律相互联系着. 例如, 圆的面积 S 与圆的半径 r 之间的关系就是 $S = \pi r^2$; 一天中每个时刻 t 都对应着一个确定的气温值 T . 这种存在于变量之间的相依关系, 就是函数关系.

定义 1.2 设 x, y 是两个变量, D 是一个非空的数集. 如果按照某个对应法则 f , 对于每个 $x \in D$, 变量 y 都有唯一确定的值与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数. 数集 D 称为这个函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

函数 f 的定义域 D 通常记为 D_f . 当 $x_0 \in D_f$ 时, 与自变量 x_0 对应的因变量 y 的值 $f(x_0)$, 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值, 当 x 遍取 D_f 的所有数值时, 对应的全体函数值所组成的数集

$$W_f = \{y | y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 f 的值域.

按照上述定义, f 与 $f(x)$ 的含义是有区别的(【思考】区别在哪里?). 但习惯上也常用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 表示函数.

函数的记号 f 也可改用其他字母表示, 如 F, φ 等, 相应地, 函数可记作 $y = F(x), y = \varphi(x)$ 等. 有时还直接利用因变量的记号来表示函数, 如 $y = y(x)$, 这里字母 y 既表示因变量, 又表示函数.

从函数的定义可知, 定义域和对应法则是函数的两个要素. 只有两个函数具有相同的定义域和相同的对应法则时, 它们才是相同的函数; 否则, 就不是相同的函数.

函数的定义域通常按如下两种情形来确定: 一是对于具有实际背景的函数, 其定义域由变量的实际意义确定; 二是对于由抽象的算式表达的函数, 其定义域就是使得算式有意义的一切实数所组成的集合, 称为函数的自然定义域. 在求函数的自然定义域时, 常考虑以下几点.

- (1) 偶次方根下被开方数大于或等于零;
- (2) 分母不能为零;
- (3) 对数的真数大于零;
- (4) 在 $y = \tan x$ 中, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$; 在 $y = \cot x$ 中, $x \neq k\pi$;
- (5) 在 $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 中, $|x| \leq 1$.

若一个函数是由有限个函数经四则运算而得, 其定义域是这有限个函数的定义域的交集, 并去掉使分母为零的点.

* $y = \cot x$ 称为余切函数, 将在本章第 2 节介绍.

** $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 分别称为反正弦函数和反余弦函数, 将在本章第 2 节介绍.

【例 1.1】求函数 $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域.

【解】为使 $f(x)$ 有意义, 应有

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

所求函数的定义域为 $D_f = (1, 2) \cup (2, 3]$.

1.1.3 函数的表示法

函数的表示方法主要有表格法、图形法和解析法(公式法). 其中图形法可以帮助我们直观地理解函数的性质, 在微积分的学习中非常有用. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点集

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的图形(如图 1.2 所示).

下面再认识几个特殊的函数.

【例 1.2】 $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ 称为绝对值函数,

其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $W_f = [0, +\infty)$, 其图形如图 1.3(a) 所示.

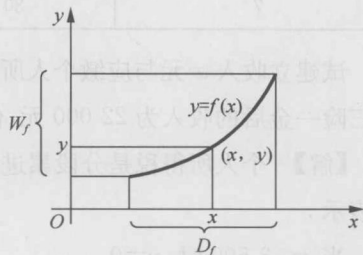


图 1.2

【例 1.3】 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 其定义

域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $W_f = \{-1, 0, 1\}$, 对任意实数 x , 都有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$, 其图形如图 1.3(b) 所示.

【例 1.4】 $f(x) = [x]$ 称为取整函数, 表示不超过 x 的最大整数.

如 $[8.2] = 8$, $[-3.5] = -4$, $[0.5] = 0$. 对任意实数 x , 都有 $[x] \leq x < [x] + 1$. 其图形如图 1.3(c) 所示, 好像阶梯, 因此又称为阶梯函数. 其定义域 $D_f = \mathbb{R}$, 值域 $W_f = \mathbb{Z}$.

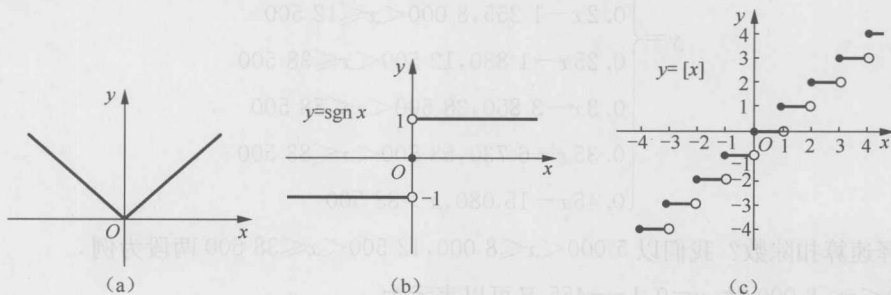


图 1.3

以上 3 个例子中的函数都具有这样的特点: 在其定义域的不同部分, 函数分别用不同的算式表示, 这类函数称为分段函数(注意: 分段函数在其定义域上是一个函数, 而不是多个函数). 分段函数在实际问题中经常遇到.

【例 1.5】 自 2011 年 9 月 1 日起,我国执行新的个人所得税税率,起征点由 2 000 元调到 3 500 元,累进税率见表 1.1.

表 1.1

个人所得税税率表

级 数	含税级距	税率(%)	速算扣除数
1	0~1 500	3%	0
2	1 500~4 500	10%	105
3	4 500~9 000	20%	555
4	9 000~35 000	25%	1 005
5	35 000~55 000	30%	2 755
6	55 000~80 000	35%	5 505
7	80 000 以上	45%	13 505

试建立收入 x 元与应缴个人所得税 y 元之间的函数关系. 怎样解释速算扣除数? 若张某本月扣除三险一金后的收入为 22 000 元,他应缴个人所得税多少元?

【解】 个人所得税是分段累进计税,所以收入与应缴个人所得税之间的函数关系可以用分段函数表示.

当 $x \leq 3 500$ 时, $y = 0$.

当 $3 500 < x \leq 5 000$ 时, $y = 0.03(x - 3 500)$.

当 $5 000 < x \leq 8 000$ 时, $y = 0.03 \times 1 500 + 0.1(x - 5 000) = 0.1x - 455$.

当 $8 000 < x \leq 12 500$ 时, $y = 0.03 \times 1 500 + 0.1(4 500 - 1 500) + 0.2(x - 8 000) = 0.2x - 1 255$.

第 4、5、6、7 级类似计算,可得如下结果.

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 3 500 \\ 0.03x - 105, & 3 500 < x \leq 5 000 \\ 0.1x - 455, & 5 000 < x \leq 8 000 \\ 0.2x - 1 255, & 8 000 < x \leq 12 500 \\ 0.25x - 1 880, & 12 500 < x \leq 38 500 \\ 0.3x - 3 850, & 38 500 < x \leq 58 500 \\ 0.35x - 6 730, & 58 500 < x \leq 83 500 \\ 0.45x - 15 080, & x > 83 500 \end{cases}$$

怎样解释速算扣除数? 我们以 $5 000 < x \leq 8 000$, $12 500 < x \leq 38 500$ 两段为例.

当 $5 000 < x \leq 8 000$ 时, $y = 0.1x - 455$ 又可以表示为

$$y = 0.1(x - 3 500) - 105 \quad (1.1)$$

当 $12 500 < x \leq 38 500$ 时, $y = 0.25x - 1 800$ 又可以表示为

$$y = 0.25(x - 3 500) - 1 005 \quad (1.2)$$

式(1.1)、式(1.2)中的 105 和 1 005 就是相应级数所对应的速算扣除数. 实际上,税务部门在计算个人所得税时,就是先将收入 x 归入相应的级数,然后用该级数对应的税率乘以收入 x 与 3 500 的

差,再减去该级数对应的速算扣除数.

张某本月收入 22 000 元,应归入第 4 级,税率为 25%,所以应缴个人所得税为

$$\begin{aligned} y &= 0.25 \times (22\,000 - 3\,500) - 1\,005 \\ &= 3\,620(\text{元}) \end{aligned}$$

1.1.4 函数的几何特性

研究函数的目的就是为了解它所具有的一些性质,以便掌握它的变化规律. 函数的几何特性主要包括单调性、奇偶性、周期性和有界性等.

1. 单调性

定义 1.3 如果函数 $y=f(x)$ 定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于区间 I 内的任何两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

那么称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调增加, 常用符号“↗”表示, I 称为单调增区间; 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 I 内的任何两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

那么称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调减少, 常用符号“↘”表示, I 称为单调减区间.

单调增加或单调减少的函数, 统称为单调函数, 单调增区间和单调减区间统称为单调区间. 在单调增区间内, 函数的图形随 x 的增大而上升(如图 1.4(a)所示); 在单调减区间内, 函数的图形随 x 的增大而下降(如图 1.4(b)所示).

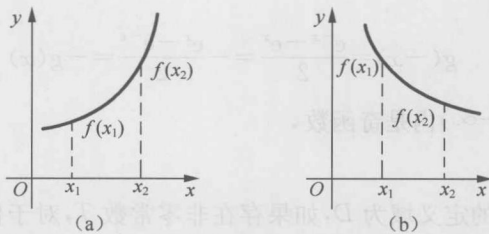


图 1.4

【例 1.6】 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

【证】 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则有

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

即 $f(x_2) > f(x_1)$, 也就是说 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

函数的单调性与所讨论的自变量的区间有关. 例如, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的, 而在 $(-\infty, +\infty)$ 内是不单调的.

用单调性的定义直接判断函数的单调性有时还是比较困难的, 我们将在第 3 章运用导数的有关知识进一步去讨论.

2. 奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, $-x \in D$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$, 那么称 $y=f(x)$ 为奇函数; 如果对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$, 那么称 $y=f(x)$ 为偶函数.

例如, $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数, $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数, 而 $y=x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于坐标原点对称(如图 1.5 所示).

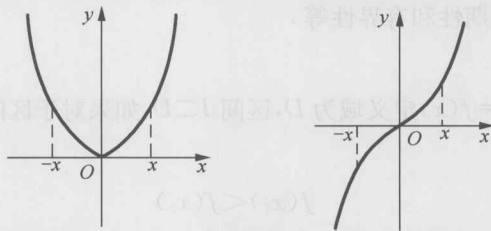


图 1.5

【例 1.7】 判断函数 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与函数 $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

【解】 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 恒有

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数.

对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 恒有

$$g(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-g(x)$$

所以 $g(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数.

3. 周期性

定义 1.5 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在非零常数 T , 对于任意的 $x \in D$, $x+T \in D$, 都有 $f(x+T)=f(x)$, 那么称 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 为函数 $y=f(x)$ 的周期.

容易证明, 如果 T 为 $f(x)$ 的一个周期, 那么 T 的任意非零整数倍数都是 $f(x)$ 的周期. 因此, 周期函数有无穷多个周期. 通常所说的周期是指周期函数的最小正周期.

例如, 正弦函数 $y=\sin x$ 中, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ 都是它的周期, 其最小正周期 $T=2\pi$. 又如, 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$, 其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

4. 有界性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M , 对于任意的 $x \in X$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

那么称函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界, 或称 $y=f(x)$ 是 X 上的有界函数(如图 1.6 所示). 否则称 $y=f(x)$ 在 X 上无界, $y=f(x)$ 也

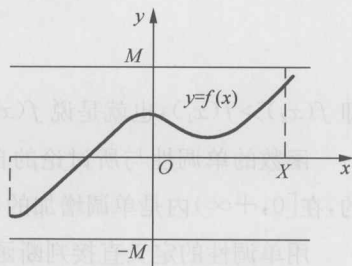


图 1.6

就称为 X 上的无界函数.

【思考】 如果函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界,那么存在多少个这样的 M ,能够使得 $|f(x)|\leq M$?

函数的有界性同样与所讨论的自变量的区间有关.例如,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界,而在 $[1,+\infty)$ 内有界.

【例 1.8】 讨论下列函数在各自定义域上是否有界.

(1) $y=\sin x$.

(2) $y=e^x$

【解】 (1) 对于任意的 $x\in R$,存在 $M=1$,恒有

$$|\sin x|\leq 1$$

所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) 对于任意的 $x\in R$,不存在 $M>0$,使得

$$|e^x|\leq M.$$

所以 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

习题 1.1

1. 判断下列各组函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=\ln x^2, y=2\ln x$

(2) $y=\sqrt{1-x}\sqrt{2+x}, y=\sqrt{(1-x)(2+x)}$

(3) $y=\sqrt{x^2}, y=|x|$

(4) $y=\frac{x^2-1}{x+1}, y=x-1$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln(x^2+2x-3)$

(2) $y=\sqrt{x^2-1}$

(3) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

(4) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x-1)}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leq 1 \\ x^2-1, & 1<|x|<2 \end{cases}$, 确定函数的定义域,求 $f(-0.5), f(1), f(1.5)$ 的

值,并作出函数图形.

4. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=a^x-a^{-x}(a>0, \text{且 } a\neq 1)$

(2) $f(x)=x^3+x\cos x$

(3) $f(x)=x+\cos 2x$

(4) $f(x)=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$

$$(5) f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$$

(6) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

5. 讨论下列函数在各自定义域上的有界性.

(1) $y=\sin \frac{1}{x}$

(2) $y=\frac{1}{1-x}$

(3) $y=e^{-|x|}$

(4) $y=\frac{x^4}{1+x^4}$

6. 设下面所讨论的函数的定义域关于原点对称, 试研究函数的奇偶性.

(1) 两个偶函数的和; 两个奇函数的和; 偶函数与奇函数的和;

(2) 两个偶函数的积; 两个奇函数的积; 偶函数与奇函数的积.

7. 从2012年7月1日起, 全国29个省份同步实施阶梯电价. A省具体方案是: 首档电量为180度以内, 这档电量将按照目前的价格, 每度0.5653元. 第二档电量为181度至350度, 这档电量电价每度涨5分钱. 第三档电量为350度以上, 这档电量每度涨3毛钱. 以一个年度为计量周期, 月度滚动使用.

若以 y 表示应缴电费(单位:元), x 表示用电量(单位:度), 试建立 y 与 x 之间的函数关系. 若某户在2013年全年共用电3000度, 问该户需缴电费多少元?

1.2

反函数与复合函数

学习要求

1. 理解反函数、复合函数的定义, 会求函数的反函数, 会进行函数的复合与分解.
2. 了解余切函数、正割函数、余割函数、几种反三角函数的定义域、图形和性质.
3. 了解基本初等函数、初等函数的概念.

1.2.1 反函数

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 如果对 W 中的任何一个实数 y , 都有唯一的一个 $x \in D$, 使 $f(x)=y$ 成立. 那么把 y 看成自变量, x 看成因变量, 由函数的定义, x 就成为 y 的函数, 称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$, 其定义域是 W , 值域是 D .

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是坐标平面内的同一条曲线(如图 1.7 所示).

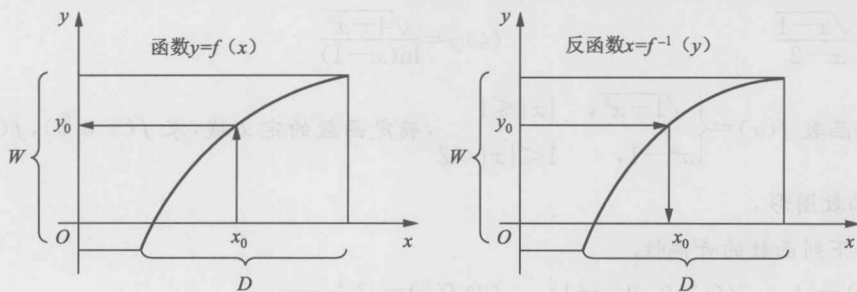


图 1.7

按照习惯, 我们总是取 x 为自变量, y 为因变量, 这样函数 $y=f(x)$ 的反函数就写成

$$y=f^{-1}(x)$$

如果把 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称(如图 1.8 所示).

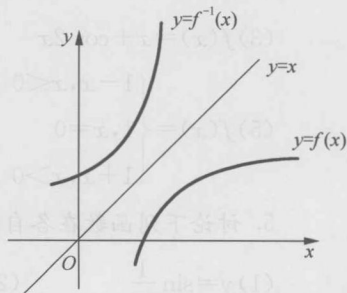


图 1.8