前　言

2009 年 10 月，全国大学生数学竞赛首届比赛开始举办，时至今日已经吸引了越来越多的年轻学子参与其中，作为一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛，全国大学生数学竞赛为青年学子提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才并促进高等学校数学课程建设的改革和发展积累了调研素材.

本书是针对非数学专业的全国大学生数学竞赛编写的，书中很多例题选自国内、外大学生数学竞赛的一些特色试题，基于数学竞赛复习备考的特点，在《全国大学生数学竞赛辅导教程》一书的基础之上，进一步优化全书的结构，增加了大量的经典例题和新颖例题，同时内容上还增加了线性代数的内容. 本书共分为基础篇、提高篇和实战篇三大部分. 基础篇主要是对课本知识的总结及凝练，同时还配有部分习题来帮助学生针对基础知识做一回顾. 如果有的同学对基础知识非常熟悉的话，可以跳过第一部分，直接进入提高篇. 在提高篇中本书列有大量的例题，我们依据内容将高等数学的例题分为极限、一元微分学、一元积分学、微分方程、多元微分与空间解析几何、多元积分及无穷级数七个部分. 这里所举的例题构思绝妙，方法灵活，技巧性强，易于学生掌握竞赛试题的难度及竞赛考察的知识点. 另外线性代数部分由于是从第五届决赛开始才刚刚增加的内容而且只有决赛才有，因此线性代数所举的例子相对较少，但每道题目也均是经过我们精心编选的，均有一定难度. 在提高篇内，我们还给出了十几套国内省市或高校竞赛的试题，可供学生备考练习. 而实战篇则囊括了近些年全部的全国大学生数学竞赛的真题及解答，其中既有初赛试题也包含了决赛试题，供学生参考.

本书可供准备数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学、线性代数和考研的参考书，特别有益于成绩优秀的大学生进一步提高高等数学水平. 本书也是这些年我们教学改革成果的体现，编者在编写过程中得到了哈尔滨工业大学数学系系主任王勇教授、吴勃

要条件.

2. 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨判别法.

3. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.

4. 函数项级数的收敛域与和函数的概念.

5. 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)、收敛域与和函数.

6. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法.

7. 初等函数的幂级数展开式.

8. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlet)定理、函数在$[-1,1]$上的傅里叶级数、函数在$[0,1]$上的正弦级数和余弦级数.

全国大学生数学竞赛组委会

提高篇

3. 不定积分的计算

(1)第一换元积分法(凑微分法)

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u$$

(2)第二换元积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

注 由于积分之后还要将 t 换为 x 的函数,所以要求 $x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$.

(3)分部积分法

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int g(x)\mathrm{d}f(x) = f(x)g(x) - \int f(x)\mathrm{d}g(x)$$

(4)简单的有理函数的积分

任一有理函数可分解为一个多项式(对于真分式此为零多项式)与若干个部分分式的和.这些部分分式的形式为

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x \quad n \in \mathbf{N}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x \quad p^2 < 4q, n \in \mathbf{N}$$

这两种形式的部分分式都是可用第一换元积分法积分的.

4. 定积分的基本概念

(1)定义:设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义,用分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$,记 $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$, $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 任取 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,2,\cdots,n$. 如果乘积的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(称为积分和)的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在,且这个极限值与 x_i 和 ξ_i 的取法无关,则说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且称此

梯度方向为方向导数取最大值时的方向，梯度的模为方向导数的最大值.

(5)散度，旋度

设 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，$P,Q,R$ 有一阶连续偏导数，则 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$.

2. 偏导数、全微分、方向导数、梯度的计算

定理 1 设函数 $z=f(u,v)$ 可微，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 具有一阶偏导数，并且由它们可构成 z 关于(x,y)在某区域 D 内的复合函数，则在 D 内有复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

定理 2(隐函数存在定理) 设函数 $F(x,y)$ 在 (a,b) 某邻域内连续可微，$F(a,b)=0$，$F'_y(a,b)\neq 0$，则存在 $x=a$ 的邻域 U 和唯一的函数 $y=f(x)$ $(x\in U)$，使得

$$b=f(a),\ \forall x\in U,\ F(x,f(x))=0$$

这里 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且

$$f'(a)=-\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}$$

3. 极值与最值

(1)极值的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 使 z 取到极值，且 $f(x,y)$ 在 P_0 存在偏导数，则 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$. 若 $\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\ f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的驻点.

(2)二元函数极值的充分条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 具有二阶连续偏导数，并设点 P_0 是 $f(x,y)$ 的驻点，记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$

则：

$$x^{*}=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}xf(x,y,z)\mathrm{d}v,y^{*}=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}yf(x,y,z)\mathrm{d}v,z^{*}=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}zf(x,y,z)\mathrm{d}v$$

其中 $m=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(3)转动惯量的计算：设物体的体密度函数为 $\rho=f(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$，则此物体关于直线 l 的转动惯量为

$$J=\iiint\limits_{\Omega}r^{2}f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

其中 r 为 Ω 中的点到直线 l 的距离.

4. 曲线积分

(1)第一型曲线积分(对弧长的曲线积分)

1) 曲线积分 $\int_{C}f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的意义：

①若 $f(x,y,z)=1$，积分为曲线 C 的弧长.

②若 $f(x,y,z)>0$ 为曲线 C 的线密度，则积分为曲线 C 的质量.

③若 C 为平面曲线，$f(x,y,z)=f(x,y)\geqslant0$，则积分为以 C 为准线的柱面面积.

2) 曲线积分 $\int_{C}f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的计算：

若曲线 C 的方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，起点 $t=\alpha$，终点 $t=\beta$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^{2}+(\mathrm{d}y)^{2}+(\mathrm{d}z)^{2}}=\sqrt{[x'(t)]^{2}+[y'(t)]^{2}+[z'(t)]^{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{C}f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\min\{\alpha,\beta\}}^{\max\{\alpha,\beta\}}f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^{2}+[y'(t)]^{2}+[z'(t)]^{2}}\,\mathrm{d}t$$

(2)第二型曲线积分(对坐标的曲线积分)

1) $\int_{C}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{C}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的意义：

若 $\boldsymbol{F}=\{P,Q\}$ 为力，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$ 为位移，则积分为质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下由曲线的起点沿曲线 C 运动到曲线的终点所作的功.

2)两类曲线积分的关系

$$\int_{C}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C}[P\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau},x})+Q\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau},y})]\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为曲线在任一点处的切线矢量(由起点指向终点).

⑤设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

定理 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量(或列向量)构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交向量组.

定义 2 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 称为正交变换.

性质 正交变换保持向量的长度不变.

5. 特征值与特征向量

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在一个数 λ 和一个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,而称非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

注 ①$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 等价于

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

该齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$.

上式是以 λ 为未知数的一元 n 次方程,称之为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程;方程左端是 λ 的 n 次多项式,记为 $f(\lambda)$,称之为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

②任一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必有 n 个复的特征值(重根按重数计算).

③若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的非零线性组合 $k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{y}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量(k_1,k_2 是不全为零的常数).

④对应于不同的特征值的特征向量不相等.

(1)特征根和特征向量的求法

第一步 解特征方程

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

求出特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$.

第二步 对每一特征值 λ_i,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求出其基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征根 λ_i 的所有特征向量可表示为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$.

(2)特征值与特征向量的性质

定理 1 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有:

$$\text{由于 } \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\text{，故 } \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\times\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}.$$

所以应选(C).

8. 分析：因为 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$$

由此可得 $a_{ij}=A_{ij}$，$\forall\, i,j=1,2,3$，那么

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2>0$$

又由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，两边取行列式并利用 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$ 得 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|$.

从而 $|\boldsymbol{A}|=1$. 因此，$3a_{11}^2=1$，故 $a_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 应选(A).

9. 分析：对任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 关系式要成立，那么 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时仍应成立，故可看 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时 $\boldsymbol{C}^*=?$

由于

$$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$$

故应选(D).

10. 分析：按可逆定义，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2a^2$，而 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的矩阵，故

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=0\Leftrightarrow\frac{1}{a}-1-2a=0\Rightarrow a=\frac{1}{2},a=-1$$

已知 $a<0$，故应填：-1.

即
$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)$$
这是一阶可分离变量的微分方程.在方程两边同时对变量 x 积分,得
$$\arctan[f(x)]=f'(0)x$$
于是
$$f(x)=\tan[f'(0)x]$$

【例 2】 设有实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,函数 $f(x)$在$[a_1,a_n]$上有 n 阶导数,并满足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$. 证明:对每个 $c\in[a_1,a_n]$,都相应地存在 $\xi\in(a_1,a_n)$,使得
$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

解析 当 $c=a_i(i=1,2,\cdots,n)$时,由 $f(c)=(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)=0$ 知,此时可取$[a_1,a_n]$上任一点为 ξ,都有
$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

当 $c\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)$时,记
$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$
$$F(x)=f(x)g(c)-f(c)g(x)$$
则 $F(x)$在$[a_1,a_n]$上 n 阶可导,且
$$F(a_1)=F(a_2)=\cdots=F(a_n)=0$$
所以存在 $\xi\in(a_1,a_n)$,使得 $F^{(n)}(\xi)=0$,即
$$f^{(n)}(\xi)g(c)=f(c)g^{(n)}(\xi)$$
又 $g^{(n)}(x)=n!$,故存在 $\xi\in(a_1,a_n)$,使得
$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

【例 3】 设函数 $f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导,且$|f(x)|\leqslant 1$,$f(-2)=f(0)=f(2)$,又设$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 证明:存在 $\xi\in(-2,2)$,使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

解析 记 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$,则 $F(x)$在$[-2,2]$上可导.

由于 $f(x)$在$[-2,2]$上可导及 $f(-2)=f(0)=f(2)$,所以存在 $a\in(-2,0)$及 $b\in(0,2)$,使得 $f'(a)=f'(b)=0$,由此得到
$$F(a)=[f(a)]^2+[f'(a)]^2\leqslant 1$$
$$F(b)=[f(b)]^2+[f'(b)]^2\leqslant 1$$
于是,由题设 $F(0)=4$ 知,$F(x)$在$[a,b]$上的最大值 M 必在(a,b)内取到,即

解析 由
$$\frac{f(\xi)-f(0)}{x}=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}$$
得
$$\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}$$
故
$$f'(0)\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{2}-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3f(0)}{2x}\qquad(*)$$
又由
$$f(x)-f(0)=2f(\xi)$$
可得$\lim\limits_{x\to0}f(x)-f(0)=\lim\limits_{\xi\to0}2f(\xi)=0$，即 $f(0)=0$. 代入式($*$)
$$f'(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0)$$
由 $f'(0)\neq0$，故$\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$.

【例 22】 设 $f(x)$在$[0,1]$上 n 次连续可导，在$(0,1)$中 $n+1$ 次可导，且 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0(k=0,1,2,\cdots,n)$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$.

解析 令 $F(x)=[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n-1)}(x)+f^{(n)}(x)]e^{-x}$，$x\in[0,1]$，则 $F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且
$$F'(x)=[f^{(n+1)}(x)-f(x)]e^{-x}$$
由于 $F(0)=F(1)=0$，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，从而有
$$f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$$

【例 23】 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微，$0<a<b$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$使得
$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

解析 要证的式子等价于
$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$，$\psi(x)=\frac{1}{x}$，对 $\varphi(x)$，$\psi(x)$在$[a,b]$上使用柯西中值定理就可证明上式.

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\mid\beta-\alpha\mid^{1+\delta}$$

其中,M,δ 为正常数. 求证:$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

解析 $\forall x_0\in[a,b]$,应用积分中值定理,有

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x = f(x_0+\theta h)h$$

这里 $x_0+h\in[a,b], h\neq 0, 0<\theta<1$. 所以

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x\right| = \mid f(x_0+\theta h)h\mid \leqslant M\mid h\mid^{1+\delta}$$

$$\mid f(x_0+\theta h)\mid \leqslant M\mid h\mid^{\delta}$$

由于 $M>0, \delta>0, \lim\limits_{h\to 0} M\mid h\mid^{\delta}=0$,且 $f(x)$ 在 x_0 处连续,得

$$\lim_{h\to 0}\mid f(x_0+\theta h)\mid = 0, \lim_{h\to 0} f(x_0+\theta h) = f(x_0) = 0$$

由 $x_0\in[a,b]$ 的任意性得 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

【例 35】 设 $\varphi_i(x)\in C[a,b]$,其中 $i=1,2,3,\cdots$,且 $\int_a^b \varphi_i^2(x)\mathrm{d}x=1$,求证:$\exists N\in\mathbf{N}$ 及常数 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$,使得

$$\sum_{i=1}^N c_i^2 = 1, \max_{x\in[a,b]}\left|\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x)\right| > 100$$

解析 取 $N\in\mathbf{N}$,且 $N>10\,000(b-a)$,则

$$\int_a^b\Big(\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(x)\Big)\mathrm{d}x = N \tag{1}$$

应用积分中值定理,$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b\Big(\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(x)\Big)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N\varphi_i^2(\xi)\cdot(b-a) \tag{2}$$

取

$$c_i = \frac{\varphi_i(\xi)}{\sqrt{\varphi_1^2(\xi)+\varphi_2^2(\xi)+\cdots+\varphi_N^2(\xi)}}\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

则 $\sum\limits_{i=1}^N c_i^2 = 1$,且由(1),(2) 两式可得

$$\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(\xi)} = \sqrt{\frac{N}{b-a}} > \sqrt{10\,000} = 100$$

于是

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x)\right| > 100$$

【例 36】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0, \int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 求证:

$$f'(x)+f(-x)=0 \tag{1}$$

再求导

$$f''(x)-f'(-x)=0 \tag{2}$$

式(1)中 x 换为 $-x$ 得

$$f'(-x)+f(x)=0 \tag{3}$$

由式(2),(3)得

$$f''(x)+f(x)=0$$

它的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$$

由前式 $f(0)=1,f'(0)=-1$,得到 $C_1=1,C_2=-1$,将它们代入通解得

$$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2)可得

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sqrt{2})^n\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|^n\mathrm{d}x \quad 令\ t=x+\frac{\pi}{4}$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}|\cos t|^n\mathrm{d}x=2^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|^n\mathrm{d}x$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}2^{\frac{n+2}{2}}\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3},n=3,5,\cdots\\[2ex] 2^{\frac{n+2}{2}}\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2},n=2,4,\cdots\end{cases}$$

【例 5】 设微分方程 $y''-\frac{1}{x}y'+q(x)y=0$ 有两个满足 $y_1y_2=1$ 的特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$,求该微分方程的通解.

解析 (1)当 $y_1(x)=a$ 时,由 $y_1y_2=1$ 知 $a\neq 0$,并且由 $y_1(x)=a$ 是所给微分方程

$$y''-\frac{1}{x}y'+q(x)y=0$$

的特解,知 $aq(x)=0$,由此可得 $q(x)=0$,因此此时上式化为

$$y''-\frac{1}{x}y'=0$$

$\frac{1}{4}$围成的立体. 记 $S=S_1+S_2$，其中 S_1 是 S 位于三个平面上的部分，S_2 是 S 位于抛物面上的部分，由于上述三个平面的切平面就是它们自己，不可能经过 l，因此点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 要从 S_2 上去寻找.

设经过 l 的切平面 π 的方程为

$$(3x-2z-5)+\lambda(x-2y-3)=0$$

即
$$(\lambda+3)x-2\lambda y-2z=3\lambda+5$$

记 $H(x,y,z)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-z$，则 S_2 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的法向量为

$$(H'_x,H'_y,H'_z)\mid_P=\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y,-1\right)\Big|_P=\left(\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}y_0,-1\right)$$

于是有以下方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda+3}{\frac{1}{2}x_0}=\dfrac{-2\lambda}{\frac{1}{2}y_0}=\dfrac{-2}{-1}\\(\lambda+3)x_0-2\lambda y_0-2z_0=3\lambda+5\\z_0=\dfrac{1}{4}(x_0^2+y_0^2)\end{cases}$$

解得

$$x_0=3-\frac{1}{\sqrt5},y_0=\frac{2}{\sqrt5},z_0=\frac{5}{2}-\frac{3}{2\sqrt5}$$

即
$$P=\left(3-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},\frac{5}{2}-\frac{3}{2\sqrt5}\right)$$

【例 2】 设对于任意 x,y，有 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，请用变量代换 $\begin{cases}x=uv\\y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$ 将 $f(x,y)$变换成 $g(u,v)$，并：

(1)求满足 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 中的常数 a,b 的值；

(2)对(1)求得的 a,b，将(1)中的表达式用极坐标 r,θ 表示.

解析 $\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}v+\frac{\partial f}{\partial y}u$，$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}u-\frac{\partial f}{\partial y}v$.

将它们代入 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，得

知，Σ 的方程为

$$x^2+y^2=1+z^2 \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[y^2-yf(xy)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+S_0+S_1}-\iint\limits_{S_0}-\iint\limits_{S_1}$$

其中，S_0，S_1 分别是平面 $z=0$ 与 $z=1$ 被 Σ 截下部分，前者为下侧，后者为上侧，它们在 xOy 平面上的投影分别为 $D'_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 与 $D'_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，$\Sigma+S_0+S_1$ 组成闭曲面外侧，记由它围成的立体为 Ω

$$I=\iiint\limits_{\Omega}2(y+z)\mathrm{d}v+\iint\limits_{D'_{xy}}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D'_{xy}}4\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}v+\iint\limits_{D'_{xy}}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D'_{xy}}4\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\,\mathrm{d}\sigma+\pi-8\pi$$

其中 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1+z^2\}$ 是 Ω 的纵坐标为 z 的截面在 xOy 平面的投影

$$=2\int_0^1 z\cdot\pi(1+z^2)\mathrm{d}z-7\pi=\frac{3}{2}\pi-7\pi=-\frac{13}{2}\pi$$

【例 17】 求曲线积分 $\int_\Gamma |y-x|\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，其中 Γ 为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$$

其方向与 z 轴正方向满足右手法则.

解析 曲线 Γ 的方程可写为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$，$z=\frac{1}{2}$，将 Γ 的位于 $y=x$ 上方的部分记为 Γ_1，位于 $y=x$ 下方的部分记为 Γ_2，Γ 与 $y=x$ 的交点记为 A，B. 将 Γ 所围的圆域用 $\overline{AB}$ 分为 D_1 与 D_2，则

$$\text{原式}=\int_{\Gamma_1}(y-x)\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}(x-y)\mathrm{d}y+0$$

$$=\int_{\Gamma_1+\overline{AB}}(y-x)\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2+\overline{BA}}(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-x)-\frac{\partial}{\partial y}0\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-\frac{\partial}{\partial y}0\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{9}{10}x_n+\dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{10}x_n+\dfrac{3}{5}y_n \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

可见

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(2)因为行列式

$$|(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)|=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

可见 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1$$

故 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,且对应的特征值为 $\lambda_1=1$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$$

故 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,且对应的特征值为 $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$.

(3)因为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因此只要计算 $\boldsymbol{A}^n$ 即可. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A}=\lambda_1^{\alpha}\lambda_2^{\beta}\lambda_3^{\beta}=\lambda_1^{\alpha}\cdot(\lambda_2\lambda_3)^{\beta}$$

由于 λ_1 和 $\lambda_2\lambda_3=|\lambda_2|^2$ 是正数,因而 $\det \boldsymbol{A}>0$.

【例 36】 设 V 是 10 维实线性空间,U_1 和 U_2 是两个线性子空间,满足 $U_1\subseteq U_2$,$\dim_R U_1=3$ 和 $\dim_R U_2=6$. 设 Σ 是从 $T:V\to V$ 的线性映射,并且 U_1U_1 是其不变子空间(i. e. ,$T(U_1)\subseteq U_1$,$T(U_2)\subseteq U_2$). 计算 Σ 作为实线性空间的维数.

解析 取 U_1 的基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$,那么可找到向量 $\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5$ 和 $\boldsymbol{v}_6$ 作为 U_2 的基底. 同理,可以寻找到向量 $\boldsymbol{v}_7,\cdots,\boldsymbol{v}_{10}$ 作为 V 的基底.

设 $\boldsymbol{T}\in\Sigma$ 是同态,并且以 U_1 和 U_2 为不变子空间. 那么矩阵 $\boldsymbol{T}$ 相对于基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{10}\}$的形式如下

$$\begin{pmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{pmatrix}$$

因而有 $\dim_R\Sigma=9+18+40=67$.

【例 37】 设 $\boldsymbol{M}$ 是 $2n\times 2n$ 的可逆矩阵,由如下矩阵块表示

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}$$

证明:$\det \boldsymbol{M}\det \boldsymbol{H}=\det \boldsymbol{A}$.

解析 设 $\boldsymbol{E}$ 是 $n\times n$ 单位矩阵,那么

$$\det \boldsymbol{M}\det \boldsymbol{H}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\det \boldsymbol{A}$$

【例 38】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实 $n\times n$ 矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{AB}$. 证明:如果 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵,那么 n 可被 3 整除.

解析 设 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}$,其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 那么由于 $\bar{\omega}+1=-\omega$,则

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	极小值$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	极大值 1	↘

又：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

记：$M(t)$与$m(t)$分别表示$f(x)$在区间$[t,+\infty)$上的最大值与最小值.

从上表不难看出：

①$t\leqslant-2$时，$m(t)=f(-2)=-\dfrac{1}{2}$，$M(t)=f(1)=1$；

②$-2<t\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，$m(t)=f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$，$M(t)=f(1)=1$；

③$-\dfrac{1}{2}<t\leqslant1$时，无$m(t)$，$M(t)=f(1)=1$；

④$1<t$时，无$m(t)$，$M(t)=f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$.

三、解

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin x+x^{\alpha}\cos x$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin x+2\alpha x^{\alpha-1}\cos x-x^{\alpha}\sin x\\&=[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-x^{\alpha}]\sin x+2\alpha x^{\alpha-1}\cos x\end{aligned}$$

注意到：当$x\in(0,\pi)$时，$\sin x\neq0$，故方程$f''(x)=0$与方程

$$\cot x+\frac{\alpha-1}{2x}-\frac{x}{2\alpha}=0$$

同解.

命：$g(x)=\cot x+\dfrac{\alpha-1}{2x}-\dfrac{x}{2\alpha}$，$x\in(0,\pi)$. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\cot x+\frac{\alpha-1}{2x}-\frac{x}{2\alpha}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\cos x+(\alpha-1)\sin x}{2x\sin x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{2(\cos x-x\sin x)+(\alpha-1)\cos x}{\sin x+x\cos x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{(\alpha+1)\cos x-2x\sin x}{\sin x+x\cos x}=+\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\pi^-}g(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(\cot x+\frac{\alpha-1}{2x}-\frac{x}{2\alpha}\right)=-\infty$$

由闭区间上连续函数零点定理知，$g(x)$在区间$x\in(0,\pi)$内至少有一个