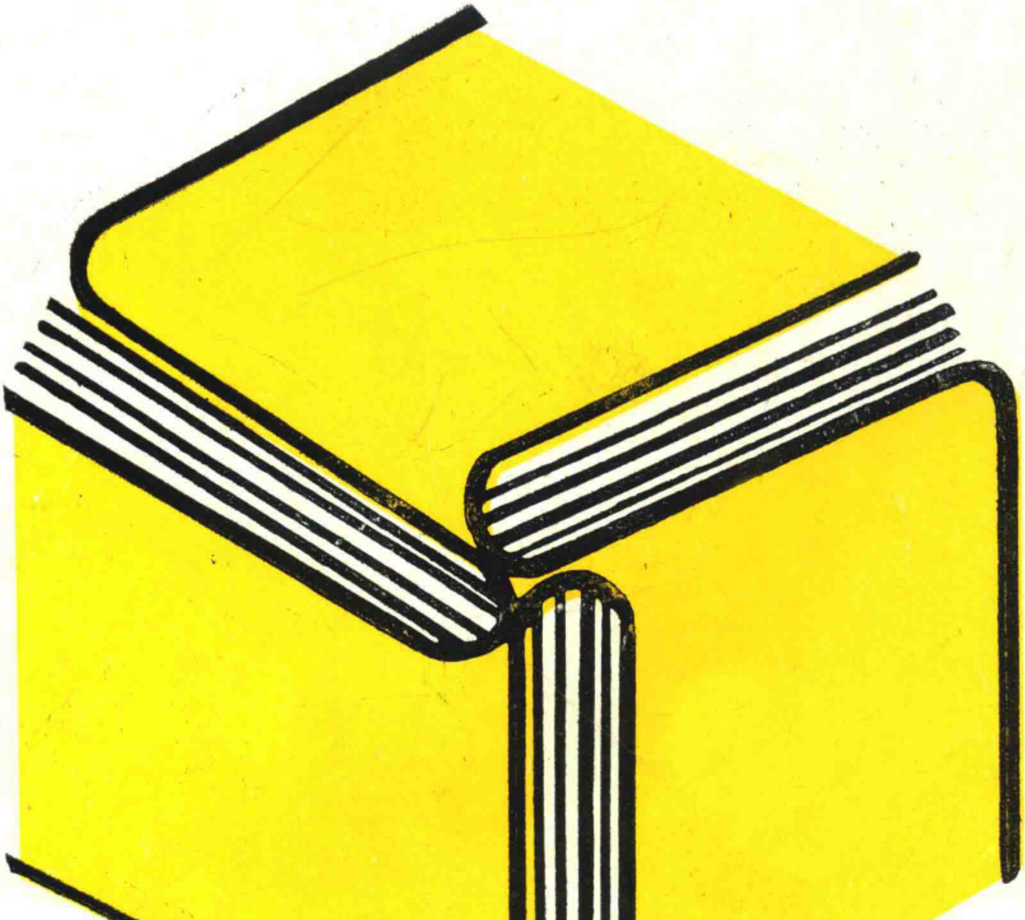
SHUXUE

FENXI

数学分析 (2)

诸少民　罗桂诗　黄树荣



广 州 暨 南 大 学

一九九二年七月

数 学 分 析 (2)

诸少民 罗桂诗 黄树荣

广 州 暨 南 大 学

一九九二年七月

目　　录

第七章　极限与连续性(续)

第八章　不定积分

第九章　定积分

第十章　定积分的应用

第七章　极限与连续性(续)

极限与连续性理论是数学分析的基础部分，在数列极限一章中，我们留下两条定理未有证明，一是“单调有界定理”，二是“柯西(cauchy)收敛准则”；在函数连续性的一章中，也留下“闭区间上连续函数的基本性质”未有证明。以上定理的证明，将在这一章中完成。

在这一章里，我们还要介绍实数的一些基本定理，除单调有界定理和柯西收敛准则外，还有确界存在定理，闭区间套定理，有限复盖定理，聚点定理，收敛子列定理等一共 7 条定理，它们是整个数学分析理论的基础。

§1　实数系的一些基本定理

一　确界存在定理

若一个数集$\{x\}$有上界，就有无限多个上界，在$\{x\}$的一切上界中，最小的上界常常具有重要作用，称它为$\{x\}$的上确界，它的精确定义是

定义 1　设$S=\{x\}$是非空数集，若数η满足

(i)　对一切$x\in S$，有$x\leqslant\eta$(即η是 S 的上界)；

(ii)　对任意的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in S$使得$x_0>\eta-\varepsilon$(即比η小的任何数都不是 S 的上界)则称η为 S 的上确界，记作

$$\eta=\sup S \qquad 或 \qquad \eta=\sup_{x\in S}\{x\}$$

类似地有

定义 2　设$S=\{x\}$是非空数集，若数ξ满足

(i)　对一切$x\in s$，有$x\geqslant\xi$(即ξ是 S 的下界)；

(ii)　对任意的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in S$，使得$x_0<\xi+\varepsilon$(即比ξ大的任何数都不是 S 的下界)

则称ξ为 S 的下确，，记作

$$\xi=\inf S \qquad 或 \qquad \xi=\inf_{x\in S}\{x\}$$

例 1　根据以上定义，若 S 有最大(小)值，它就是 S 的上(下)确界，例如闭区间$[0,1]$的上、下确界分别是$\sup[0,1]=1$，$\inf[0,1]=0$，又如$S=\{y|y=x^2,x\in[0,2]\}$的上、下确界分别是$\sup S=4$，$\inf S=0$。

例 2　数集$S=\{y|y=\sin x,x\in(0,\pi)\}$的上确界为 1，下确界为 0。

证　因为数 1 满足：

(i)　对每个$y=\sin x\in S$，有$y\leqslant 1$；

(ii)　对任意的$\varepsilon>0$，取$y_0=\sin\frac{\pi}{2}\in s$，有$y_0>1-\varepsilon$。

故　$\sup S=1$。

又因为0满足：

(i) 对每个数 $y=\sin x\in S$，有 $y\geqslant 0$；

(ii) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $x_0=\arcsin\frac{\varepsilon}{2}\in(0,\pi)$，则有 $y_0=\sin x_0\in S$，它满足 $y_0=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。

故 $\inf S=0$。

此外，不难验证下面的例子：

例3 开区间(0,1)与半开区间(0,1]的上确界都是1，下确界都是0。

例4 数列$\{\frac{1}{n}\}$的上确界 $\sup\{\frac{1}{n}\}=1$；下确界 $\inf\{\frac{1}{n}\}=0$.

由以上各例可见，数集S的上(下)确界可能属于S，也可能不属于S，如果属于S，它就是S的最大(小)值。

例5 数列$\{-n\}$仅有上确界 $\sup\{-n\}=-1$，它没有下界，从而没有下确界。

例6 $S=\{y\,|\,y=e^x,-\infty<x<+\infty\}$仅有下确界 $\inf S=0$，它没有上界，从而没有上确界。

是否任何有上(下)界的数集都有上(下)确界？回答是肯定的。

定理1 (确界存在定理)

1° 非空有上界的数集必有上确界；

2° 非空有下界的数集必有下确界。

证 1° 我们给出一个"构造性"的证法，即按一定的步骤确定出一个无限十进小数 η，然后证明这个实数 η 就是数集S的上确界。

设S有上界b，因S非空，必有 $a\in S$，使 $a\leqslant b$，显然，在有限个整数

$$[a]-1,\quad [a],\quad \cdots,\quad [b]$$

中，必有一个(记为N)，使得N不是S的上界，而N+1是S的上界。

现将区间[N,N+1] 10等分，在10个分点

$$N,\quad N+\frac{1}{10},\quad N+\frac{2}{10},\quad \cdots,\quad N+\frac{9}{10}$$

中同样有一个(记为$N+\frac{a_1}{10}$，a_1是0,1,…,9中某一个)，使得$N+\frac{a_1}{10}$不是S的上界，而$N+\frac{a_1+1}{10}$是S的上界。

再将区间$[N+\frac{a_1}{10},N+\frac{a_1+1}{10}]$ 10等分，在10个分点

$$N+\frac{a_1}{10},\quad N+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2},\quad N+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2},\quad \cdots,\quad N+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}$$

中，又同样有一个(记为$N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}$，$a_2$是0,1,…,9中的某一个)，使得$N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}$不是S的上界，而$N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$是S的上界。

照这样的步骤无限地做下去，就得到一个无限十进小数，记为

$$\eta=N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots=N+0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

由作法知，η 的任何不足近似值 $N+0.a_1a_2\cdots a_n$ 都不是 S 的上界，而任何过剩近似值 $N+0.a_1a_2\cdots(a_n+1)$ 都是 S 的上界，下面证明 η 为 S 的上确界：

(i) 对每个 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$。假设不然，有 $x_0\in S$，使 $x_0>\eta$，由于 $x_0-\eta$ 为一正数，必然存在某个 n，使 $\frac{1}{10^n}<x_0-\eta$，于是

$$x_0>\eta+\frac{1}{10^n}\geqslant N+0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{10^n}=N+0.a_1a_2\cdots(a_n+1)$$

这与 $N+0.a_1a_2\cdots(a_n+1)$ 是 S 的上界相矛盾。

(ii) 对任意的 $\varepsilon>0$，必有某个 n，使 $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$，于是

$$\eta-\varepsilon<\eta-\frac{1}{10_n}\leqslant N+0.a_1a_2\cdots(a_n+1)-\frac{1}{10^n}=N+0.a_1a_2\cdots a_n$$

因 $N+0.a_1a_2\cdots a_n$ 不是 S 的上界，故必有 $x_0\in S$，使得

$$x_0>N+0.a_1a_2\cdots a_n>\eta-\varepsilon$$

按照定义 1 $\qquad \eta=\sup S$

2° 设 S 是非空有下界的数集，令

$$T=\{-x\,|\,x\in S\}$$

则 T 非空有上界，从而有上确界 $\sup T=\eta$，于是

$$\inf S=-\sup T=-\eta$$

存在 证毕.

注 1：上(下)确界若存在则必唯一。

注 2：定理 1 告诉我们，在实数集 R 的范围内，有上(下)界的实数集必有一个实数为其上(下)确界，这是实数 R 的一个重要性质，称为实数集 R 的连续性或完备性。而有理数集则不具有这个完备性，即是说，有上(下)界的有理数集未必有一个有理数为其上(下)确界。例如平方大于 2 的正有理数集有下界，但在有理数范围内它没有下确界。它的下确界 $\sqrt{2}$ 不属于有理数集。

甚至，在全体实数集 R 中，随便去掉一个实数，也都破坏了它的完备性。例如，去掉一个数 0，即限于考虑数集 $R'=R-\{0\}$，则正实数集有下界但无下确界；负实数集有上界但无上确界。

现在把确界的概念推广到无界集上去：

若 S 没有上界，则定义 $\sup S=+\infty$；若 S 没有下界，则定义 $\inf S=-\infty$。

于是确界存在定理又可推广为：

任一非空数集必有上确界和下确界，当 S 有界时，其上、下确界都是有限数；当 S 无上(下)界时，其上(下)确界为 $+\infty(-\infty)$。

二　单调有界定理

利用确界存在定理可以证明下面的

定理 2　(单调有界定理)

1°　递增有上界的数列必有极限；

2°　递减有下界的数列必有极限。

证　1°　设 $\{x_n\}$ 是递增有上界的数列，于是由这个数列各项组成的数集 S 非空且有上界。根据定理 1，它有上确界 $\sup S=\eta$，下证这个 η 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

由上确界定义有：

(i)　$x_n\leqslant\eta(n=1,2,\cdots)$；

(ii)　任给 $\varepsilon>0$，在 S 中必有某个 $x_N>\eta-\varepsilon$。但由于 $\{x_n\}$ 是递增数列，当 $n>N$ 时，有 $x_n\geqslant x_N$，从而 $x_n>\eta-\varepsilon$。于是，当 $n>N$ 时，有

$$\eta-\varepsilon<x_n\leqslant\eta<\eta+\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\eta$。

此处不仅证明了递增有上界的数列极限存在，而且也证明了其极限就是 S 的上确界。

2°　同法可证递减有下界的数列极限存在，其极限就是它的下确界。

注 1　大家知道，如 $\{x_n\}$ 无上界，则一定发散，但未必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，例如 $x_n=[1-(-1)^n]^n$。但对递增无上界数列来说，则 $\{x_n\}$ 无上界，$\{x_n\}$ 发散，$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=+\infty$ 是同一回事(§1 的习题 2)。

注 2　定理 2 告诉我们，在实数集 R 的范围内，单调有界数列必有极限，同样表明实数集 R 的完备性。有理数集就不具有这种完备性，即由有理数组成的单调有界数列未必收敛于一个有理数。例如 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是递增有上界的有理数列，在有理数范围内它没有极限，它的极限 e 不属于有理数集。

三　区间套定理

定义 3　若闭区间列 $\{[a_n,\ b_n]\}$ 满足

(i)　$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$

(ii)　$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个闭区间套，或简称区间套。

换句话说，区间套是一列闭区间，一个套一个：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\supset\cdots$$

或写成　$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$　(1)

并且区间长度趋于 0.

例如 $\left\{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\right\}$（图 7－1）和$\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right]\right\}$（图 7－2）都是闭区间套。

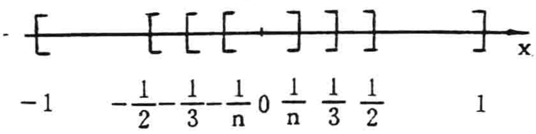


图 7—1

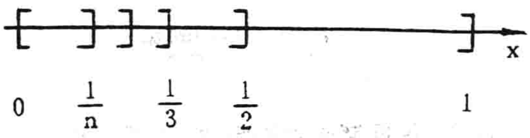


图 7—2

可以看出，$\left\{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\right\}$和$\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right]\right\}$都有唯一一个公共点 $X=0$，现在要问：是否任何一个闭区间套都有唯一一个公共点？

下面的定理作出了肯定的回答

定理 3 （区间套定理）任何闭区间套必有唯一的公共点。即存在唯一的点 ξ，使得

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\qquad n=1,2,\cdots \tag{2}$$

证 用单调有界定理证 由闭区间套定义知，数列$\{a_n\}$递增且有上界，（任何一个 b_n 都是$\{a_n\}$的上界），根据定理 2，它存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，并且 ξ 是$\{a_n\}$的上确界，故有

$$a_n\leqslant\xi\qquad(n=1,2\cdots)$$

现在证明对任何 n 也有 $\xi\leqslant b_n$. 事实上，对于任意固定的 b_n，总有 $a_m\leqslant b_n(m=1,2,\cdots)$

令 $m\to\infty$，得

$$\xi=\lim_{m\to\infty}a_m\leqslant b_n.$$

于是证得 $\qquad a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\qquad(n=1,2,\cdots)$

再证满足上述关系式的数 ξ 是唯一的。

设另有一点 ξ' 也满足

$$a_n\leqslant\xi'\leqslant b_n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则有 $$|\xi-\xi'|\leqslant b_n-a_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

由闭区间套定义的条件(ii)，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以 $\xi=\xi'$。

证毕

注 1　在定理证明中可见，闭区间套条件(i)保证公共点 ξ 的存在，条件(ii)保证 ξ 的唯一性。还可以看出

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

注 2　区间套必须是闭的。如果不是闭的，例如开区间套 $\{(0,\frac{1}{n})\}$，虽然前一个套住后一个，且区间长度趋于 0，但 $\{(0,\frac{1}{n})\}$ 没有公共点。

注 3　定理 3 告诉我们，在实数集 R 的范围内，任何闭区间套必有唯一的公共点，这也表明实数集 R 的完备性。有理数集就不具有这种完备性。例如由 $\sqrt{2}$ 的不足近似值与过剩近似值(都是有理数)构成的闭区间套：

$$[1,2]\supset[1.4,1.5]\supset[1.4,1.42]\supset\cdots$$

就不存在一个有理数作为这个闭区间套的公共点，它的公共点 $\sqrt{2}$ 不属于有理数集。

注 4　定理 3 给出逐步缩小搜索范围，找出所求点的一种方法。

四　有限复盖定理

有限复盖定理是实数集 R 的又一个定理。

定义 4　设 S 为数集，H 是开区间集(即 H 的每个元素都是开区间)。若 S 中任何一点都含在 H 中至少一个开区间内，则称 H 为 S 的一个**开复盖**，或说 H 复盖了 S，若 H 中开区间的个数是有限的，则称 H 为 S 的**有限开复盖**；若 H 中开区间的个数是无限的，则称 H 为 S 的**无限开复盖**。

例 1　设 $H=\{(\frac{1}{n},1)\,|\,n=2,3,\cdots\}$，$S=(0,1)$(图 7—3)则 H 是 S 的一个无限开复盖，因为任给 $X\in S$，即 $X>0$，总存在一个正整数 N，使 $X>\frac{1}{N}>0$，于是 X 含在 H 中的一个开区间 $(\frac{1}{N},1)$ 内。但 H 不是 $S_1=[0,\frac{1}{2}]$ 的开复盖。因为 $[0,\frac{1}{2}]$ 中有一点 0，它不属于 H 中任何区间。

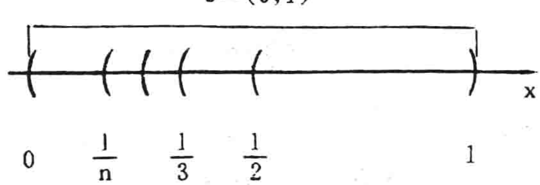


图 7—3

例 2 设 $H=\{(x-\frac{1}{10},\ x+\frac{1}{10})\mid x\in(0,1)\}$，$S=[0,1]$，则 H 是 S 的一个无限复盖。因为对 $(0,1)$ 内的每一个点 x_0，它显然属于 $(x_0-\frac{1}{10},\ x_0-\frac{1}{10})$，而 $(x_0-\frac{1}{10},x_0+\frac{1}{10})$ 是 H 中的一个开区间，对于 S 的左端点 0，在 H 中取 $x=\frac{1}{20}\in(0,1)$，则 0 属于 $(x-\frac{1}{10},x+\frac{1}{10})=(-\frac{1}{20},\frac{3}{20})$. 对于 S 的右端点 1，在 H 中取 $x=1-\frac{1}{20}\in(0,1)$，则 1 属于 $(x-\frac{1}{10},x+\frac{1}{10})=(1-\frac{3}{20},1+\frac{1}{20})$.

现在要问：如果开区间集 H 无限复盖了 S，是否可从中选出有限个开区间也能把 S 复盖住（即选出有限复盖）？回答是：如 S 是一个开区间，则不一定。在例 1 中，$H=\{(\frac{1}{n},1)\mid n=2,3,\cdots\}$ 复盖了 $S=(0,1)$，但不能选出有限复盖来；若 S 是一个闭区间，则一定。

如在例 2 中，从 $H=\{(x-\frac{1}{10},x+\frac{1}{10})\mid x\in(0,1)\}$ 可选出 10 个开区间 $(\frac{2K-1}{20}-\frac{1}{10},\frac{2K-1}{20}+\frac{1}{10})$ $(K=1,2,\cdots 10)$ 即把 $S=[0,1]$ 复盖住，一般地有下面的定理。

定理 4 （海涅～波莱尔 Heine—Borel 有限复盖定理）

若开区间所成的区间集 H 复盖一个闭区间 $[a,b]$，则总可以从 H 中选出有限个开区间，构成 $[a,b]$ 的有限开复盖。

证 用区间套定理和反证法证 设 $[a,b]$ 不能被 H 中有限个开区间复盖，等分 $[a,b]$ 为两个部分区间，则至少有一个部分区间不能被 H 中有限个开区间复盖，把这个部分区间记为 $[a_1,b_1]$，再等分 $[a_1,b_1]$，记不能被 H 中有限个开区间复盖的那个部分区间为 $[a_2,b_2]$. 照这样继续分割下去，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，它显然适合下面三个条件：

(i) 每一个 $[a_n,b_n]$ 都不能被 H 中有限个开区间复盖；

(ii) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\subset[a_2,b_2]\cdots[a_n,b_n]\supset\cdots$

(iii) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$

由条件(ii)及(iii)知，$\{[a_n,b_n]\}$ 构成一个区间套，根据定理 3，存在唯一公共点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$，并且有

$$a_n\to\xi,\quad b_n\to\xi\quad(n\to\infty)\tag{1}$$

因为 H 复盖 $[a,b]$，按复盖概念，在 H 中至少存在一个开区间 (α,β)，使

$$\xi\in(\alpha,\beta)\tag{2}$$

由(1)及(2)可知，必定存在一个正整数 n. 使得

$$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)\tag{3}$$

这说明 H 中一个区间 (α,β) 就复盖了 $[a_n,b_n]$，与条件(i)矛盾。 证毕

注 1 定理假设 H 是开区间集，如改为闭区间集结论未必成立。例如，由 $[-1,0]$，$[\frac{1}{n},1](n=2,3,\cdots)$ 组成一个闭区间集 H，它是 $S=[-1,1]$ 的一个无限复盖，但从 H 中不能选出有限个闭区间把 $S=[-1,1]$ 复盖住。

注 2 用区间套定理证明某个命题时，总是逐次把区间二等分，选定其中一个部分区间，作出一个闭区间套$[a_n,b_n]$$(n=1,2,\cdots)$来，同时注意，在选定部分区间时应该使它具有某种性质（如本定理证明中作出的$[a_n,b_n]$都是不能被 H 中有限个区间复盖）。由所作的闭区间套，得出一个公共点ξ之后，再进行下一步的论证。这就是逐步缩小搜索范围对命题进行论证的一种方法。

注 3 区间套定理只能在实数集 R 的范围内成立，同时，也反映了实数集 R 的完备性。因此，根据区间套定理证明的有限复盖定理，也只能在实数集 R 的范围内成立，而且也反映了实数集 R 的完备性。

注 4 有限复盖定理的作用，在于把无穷多个转化为有穷多个。这是证题的又一种方法。

五 聚点定理

定义 5 设 S 是个点(数)集，ξ是一定点(ξ可以属于 S，也可以不属于 S)。如在ξ的任何邻域$U(\xi,\varepsilon)$内，至少含有 S 中一个异于ξ的点，则称ξ为 S 的聚点。

例 1 $S=\{\frac{1}{n}|n=1,2,\cdots\}$有一个聚点$\xi=0$，它不属于 S。

例 2 $S=\{(-1)^n+\frac{1}{n}|n=1,2,\cdots\}$有两个聚点$\xi_1=-1,\xi_2=1$，它们不属于 S。

例 3 $S=(a,b)$的聚点的全体是$[a,b]$，除 a，b 外，它们都属于 S。

例 4 $S=\{[0,1]$上一切有理点$\}$的全体聚点是闭区间$[0,1]$，其中有理聚点属于 S，无理聚点不属于 S。

下面的聚点定义与定义 5 等价：

定义 5′ 如在ξ的任何邻域$U(\xi,\varepsilon)$内，含有 S 中无限多个点，则称ξ为 S 的聚点。

事实上，如$U(\xi,\varepsilon)$含有 S 中无限多个点，当然含有 S 中一个异于ξ的点；反之，如任何邻域$U(\xi,\varepsilon)$内至少含有 S 中一个异于ξ的点，则必定含有 S 中无限多个点。假设结论不成立，即存在某个邻域$U(\xi,\varepsilon_0)$，它只含 S 中有限个异于ξ的点：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，令

$$\delta=\min_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi-X_k|>0$$

则$U(\xi,\delta)$不含 S 中异于ξ的点，与假设矛盾。

由定义 5′可知，任何有限点集都没有聚点。

值得注意，无限点集也不一定有聚点，例如$S=\{n|n=1,2,\cdots\}$就没有聚点。什么点集保证有聚点呢？下面的定理给出回答。

定理 5 （维尔斯特拉斯 Weierstrass 聚点定理）

有界无限点集 S 至少有一个聚点。

证 以有限复盖定理为工具，用反证法证明。

因 S 有界，必有闭区间$[a,b]\supset S$。

假设 S 没有聚点，于是对于$[a,b]$中的每一点 x，都存在一个相应的邻域$U(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$，在每一个$U(x,\varepsilon)$内至多含有 S 的有限个点（否则 x 将是 S 的聚点）。

当 x 取遍$[a,b]$中的一切点时，便得到一个开区间集$H=\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)|x\in[a,b]\}$，它把$[a,b]$复盖住。根据有限复盖定理，从 H 中可选出有限个开区间：

$$(x_k-\varepsilon_k, x_k+\varepsilon_k) \quad (K=1,2,\cdots,N)$$

组成一个有限的开区间集 $H_N=\{(x_K-\varepsilon_K, x_K+\varepsilon_K)\mid K=1,2,\cdots\}$，同样把$[a,b]$复盖住，当然也复盖了S。

一方面，H_N 只含有有限个开区间，而每个开区间又至多含有S的有限个点，另一方面，H_N 又复盖了S。于是S必为有限点集，这与S为无限点集的假设相矛盾。 证毕

注 用有限复盖定理证明某个命题时，总是要作出一个闭区间$[a,b]$以及一个能复盖$[a,b]$的开区间集H，并使H中的每一个开区间具有某种性质（如本定理证明中作出的$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$都是至多含有S的有限个点），然后利用有限复盖定理，把无穷转化为有穷，继续进行下一步的讨论。

六、收敛子列定理

本段主要讲点（数）列。点列与点集在概念上是有区别的。如点列$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$含有无穷多项：

$$-1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad \cdots,\quad (-1)^n,\quad \cdots$$

但作为点集看它只是由-1和1两个点组成的有限集$\{-1,1\}$.

定义6 给定一个点列

$$x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_n,\quad \cdots$$

考虑由它的一部分元素，而不变更先后次序所构成的点列

$$x_{n_1},\quad x_{n_2},\quad \cdots,\quad x_{n_k},\quad \cdots$$

称为$\{x_n\}$的一个**子列**。

关于子列$\{x_{n_k}\}$的序号 n_K 有三点需要说明：

1° n_K 是一个严格上升的自然数列：

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

2° x_{n_k}中的K是子列的序号，表示x_{n_k}是子列的第K项；n_k是原数列的序号，表示x_{n_k}是原数列的第n_k项；

3° 对一切K有$n_k\geqslant K$. 所以$\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$

例1 已给数列 $x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$

取 $n_k=2$（即偶数项），得子列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\quad \frac{1}{6},\quad \cdots,\quad \frac{1}{2k},\quad \cdots$

取 $n_k=2k-1$（即奇数项），得子列 $1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\quad \cdots,\quad \frac{1}{2k-1},\quad \cdots$

取 $n_k=3k$，得子列$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{9},\quad \cdots,\quad \frac{1}{3k},\quad \cdots$

取 $n_k=2^k$，得子列$\frac{1}{2}$， $\frac{1}{4}$， $\frac{1}{8}$， …， $\frac{1}{2^k}$， …

取 $n_k=K+N$，(即去掉前 N 项)，得子列

$$\frac{1}{N+1},\quad \frac{1}{N+2},\quad \frac{1}{N+3},\quad \cdots,\quad \frac{1}{N+K},\quad \cdots$$

取 $n_k=K$，得子列 1， $\frac{1}{2}$， $\frac{1}{3}$， …， $\frac{1}{K}$， …

即一个点列$\{x_n\}$也可以看作是自身的一个子列。

关于收敛性，原数列$\{x_n\}$与它的子列$\{x_{n_k}\}$有如下关系：

定理： 如 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于 a。

事实上，任给 $\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$，由无穷大数列的定义，对上述的正整数 N，存在正整数 K_0，当 $K>K_0$ 时，有 $n>N$.

于是，当 $K>K_0$ 时，$n_k>N$，从而有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon。$$

即
$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a$$

证毕

注 1 当 $a=+\infty$或 $a=-\infty$时，结论仍成立。

注 2 由定理推得：如$\{x_n\}$有一个子列发散，或有两个子列收敛于不同的数，则$\{x_n\}$发散，利用它判断某些发散数列往往比较方便。例如数列

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad 3,\quad \frac{1}{4},\quad 5,\quad \frac{1}{6},\quad \cdots,\quad n^{(-1)^{n-1}},\quad \cdots$$

发散，因为由奇数项组成的子列发散，又如数列

$$1,\quad -1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad -1,\quad \cdots,\quad (-1)^{n-1},\quad \cdots$$

发散，因为由奇数项组成的子列收敛于 1，偶数项组成的子列收敛于-1.

对于发散数列来说，有时也有收敛子列。例如由发散数列$\{n^{(-1)^{n-1}}\}$的偶数项组成的子列收敛于 0；$\{(-1)^{n-1}\}$的奇数项组成的子列收敛于 1。但也不是所有发散数列都有收敛的子列。例如数列

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots$$

就没有收敛的子列。究竟怎样的数列有收敛的子列，下面定理给出回答：

定理 6 （波尔察诺 Bolzano 收敛子列定理）

有界数(点)列$\{X_n\}$至少有一个收敛子列。

证 情形 1 用聚点定理证 如果$\{x_n\}$含有无限多个不同的点，则由所有x_n构成的点集S(为简单起见，有时就用$\{x_n\}$表示点集S)是一个有界无限点集，根据聚点定理，$\{x_n\}$至少有一个聚点ξ。下面证明：从$\{x_n\}$中可以找出一个收敛于ξ的子列$\{x_{n_k}\}$.

按照聚点定义，对任意正数δ，点ξ的邻域$U(\xi,\delta)=(\xi-\delta,\xi+\delta)$总含有点集$\{x_n\}$的异于$\xi$的点。

取$\delta_1=1$，则有$x_{n_1}\in(\xi-1,\xi+1)\cap S$，而$x_{n_1}\neq\xi$，

取$\delta_2=\min(\frac{1}{2},|\xi-x_{n_1}|)$，则有$x_{n_2}\in(\xi-\delta_2,\ \xi+\delta_2)\cap S$，而且$x_{n_2}\neq\xi$，$x_{n_2}\neq x_{n_1}$.

取($\delta_3=\min\frac{1}{3},|\xi-x_{n_2}|)$，则有$x_{n_3}\in(\xi-\delta_3,\xi+\delta_3)\cap S$，而且$x_{n_3}\neq\xi$，$x_{n_1}$，$x_{n_2}$中任何一个。

依此无限地进行下去便得到一个点列$\{x_{n_k}\}$，其中第K个点$x_{n_k}\in(\xi-\delta_k,\xi+\delta_k)\cap S$，$\delta_k=\min(\frac{1}{K},|\xi-x_{n_{k-1}}|)$而且$x_{n_k}\neq\xi$，以及$x_{n_k}\neq x_{n_i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ K-1)$.

由于x_{n_1}，x_{n_2}，$\cdots$，x_{n_k}，$\cdots$各点互不相同，而且有

$$|x_{n_k}-\xi|<\delta_k<\frac{1}{K}$$

于是有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

情形 2 如果$\{x_n\}$只含有限个不同的点，则这有限个点中至少有一个点要重复出现无限多次。将这个点按照它在$\{x_n\}$中重复出现的次序抽出来排成一列，就得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，$\{x_{n_k}\}$是常数列，当然收敛。 证毕

注 对于无界数列，也有一个相似的定理：无上界的数列$\{x_n\}$至少有一个子列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$；无下界的数列$\{x_n\}$至少有一个子列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=-\infty$。

七 数列的柯西收敛准则

定义 7 给定数列$\{x_n\}$，如果对任给的正数ε，总存在某一个自然数N，使得$n,m>N$时，都有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

就称$\{x_n\}$满足柯西条件。满足柯西条件的数列称为柯西数列或基本数列。

定理 7 (数列的柯西收敛准则)

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\{x_n\}$满足柯西条件。

证 必要性

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由极限定义，对任给的正数$\frac{\varepsilon}{2}$，存在自然数N，当$n,m>N$时，都有

$$|x_m-A|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而有 $|x_m-x_n|\leqslant|x_m-A|+|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。

充分性　用收敛子列定理证.

先证$\{x_n\}$有界,因为$\{x_n\}$满足柯西条件,所以取$\varepsilon=1$,存在自然数N,当m,n>N时,有

$$|x_n-x_m|<1$$

取$m=N+1$,于是当$n>N$时有

$$\begin{aligned}|x_n|&=|x_n-x_{N+1}+x_{N+1}|\\&\leqslant|x_n-x_{N+1}|+|x_{N+1}|\\&<1+|X_{N+1}|\end{aligned}$$

令　$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$

则对一切n,有　　　　$|x_n|\leqslant M.$

其次证明$\{x_n\}$收敛,由于$\{x_n\}$有界,根据收敛子列定理,$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$:$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$. 下面证明这个A也是$\{x_n\}$的极限。

任给$\varepsilon>0$,因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$. 必存在自然数$K_0$,当$K>K_0$时,有

$$|x_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

又因为$\{x_n\}$满足柯西条件,对上面给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当n,K>N时,有

$$|x_n-x_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为$n_k\geqslant k>N$,当然有

$$|x_n-x_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

取　$K=\max\{K_0+1,\ N+1\}$,则(1)、(2)式同时成立。

于是,当$n>N$时,就有

$$|x_n-A|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-A|<\varepsilon。$$

即　　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$　　证毕.

前面讨论了实数的七条基本定理,推证方法是:先由实数的定义(无限十进小数)推得确界存在定理,然后按下表箭头所示顺序推证其它定理:

确界存在定理⇒单调有界定理⇒区间套定理⇒有限复盖定理⇒聚点定理⇒收敛子列定理⇒数列的柯西收敛准则。

我们还可以证明:数列的柯西收敛准则⇒确界存在定理(参考其它数学分析教材)。这说明实数

的七条基本定理是彼此等价的，其实从任何一个定理出发，都可以证明其余六个。究竟先证哪个，再证哪个，各本书有各自的处理方法。譬如，有的书先由实数定义推出单调有界定理，然后证明其它定理。甚至有的书就承认其中一个为实数公理，然后证明其它定理，这也是一种简单的处理方法。

实数的七条基本定理从不同的角度和观点反映了实数的完备性(连续性)。

§1 习 题

1. 试问下面解题方法是否正确？

求 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$.

解 设 $a_n=2^n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，由于 $a_n=2a_{n-1}$，两边取极限($n\to\infty$)，则有 $a=2a$，所以 $a=0$。

2. 证明：(i) $\{a_n\}$为递增而无上界的数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$；

(ii) 设$\{a_n\}$为递减而无下界的数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$。

3. 设 $a_1>b_1>0$，且 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$、 $b_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$， $(n=2,3,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限存在且都等于$\sqrt{a_1b_1}$.

4. 设有一严格的开区间套$\{(a_n,b_n)\}$，即满足不等式

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，证明存在唯一一点 ξ，使得对一切 n，有

$$a_n<\xi<b_n.$$

5. 求下列数集的上、下确界并加以验证：

(1) $S=\{x\,|\,x^2<2\}$；

(2) $S=\{x\,|\,x=n!,n=1,2,\cdots\}$；

(3) $S=\{x\,|\,x\in(0,1)$内的无理数$\}$；

(4) $S=\{x\,|\,x=1-\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots\}$.

6. 求下列函数的值域的上、下确界，它们也是最大值、最小值吗？

(1) $f(x)=x^2,x\in(-1,1)$；

(2) $f(x)=\sin x,x\in(0,\pi)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$.

7. 证明：$\sup\limits_{x\in S}\{x\}\in S$ 的充要条件是：S 有最大值。

8. 证明：若数集存在上确界则必唯一。

9. 证明收敛列必有正常上、下确界，趋于$+\infty$的数列必有正常下确界；趋于$-\infty$的数列必有正常上确界。

10. 设 A,B 为数集，证明：

(1) $\sup\{A\cup B\}=\max\{\sup A,\sup B\}$；