高等学校教材

高等数学

（基础部分）

下册

西安交通大学高等数学教研室　编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（基础部分）

下册

西安交通大学高等数学教研室　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是以西安交通大学高等数学教研室1959年编写的高等数学讲义为基础，根据1962年5月审订的高等工业学校本科五年制各类专业适用的“高等数学（基础部分）教学大纲（试行草案）”改编的。

全书分上、下两册出版。下册内容为：空间解析几何（包括矢量代数初步）、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数。

参加本书编写和定稿工作的有陆庆乐（主编）、赵孟养、邵济煦、马知恩等同志。本书由侯希忠、王元吉同志初审后，又经高等工业学校高等数学课程教材编审委员会复审。

本书可作为高等工业学校“高等数学”课程的试用教科书。

本书于1964年出版，恰逢高等教育出版社建社60周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．基础部分．下册/西安交通大学高等数学教研室编．—北京：高等教育出版社，2014.7

ISBN 978-7-04-039523-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①西… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第064794号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 蒋 青 封面设计 王 雎 版式设计 于 婕
插图绘制 黄建英 责任校对 窦丽娜 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	9.5	版 次	2014年7月第1版
字 数	240千字	印 次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	20.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39523-00

郑重声明

下册目录

第三篇　空间解析几何

第四篇　多元函数的微积分学

第五篇 微分方程

第六篇　无 穷 级 数

第三篇
空间解析几何

第十三章

空间直角坐标

在第一篇中我们已经阐释了怎样在平面内用代数的方法来解决几何问题,但这种方法的使用并不局限于平面.现在就让我们把它运用到空间.这样的推广不仅是自然的,而且是必要的,因为在三度空间也有许多几何问题需要我们去解决.

另一方面,在本书中,空间解析几何的主要用途在于给二元函数提供有用的几何解释,正像平面解析几何跟一元函数的关系一样.这说明了为什么我们把这一篇插在一元函数微积分学与多元函数微积分学之间.

13－1 空间投影定理

在平面解析几何中,我们已经定义并且讨论了有向直线、有向线段及数轴(见1－2与1－3节).但一条有向直线可以坐落在空间的任何位置.所以在那里所得到的一切结果都依旧在空间解析几何中有效.

要把投影定理推广到空间,让我们先明确规定什么是空间任意两条有向直线的夹角.两直线如果相交,必在同一平面内;我们就把两有向直线正向之间不大于 π 的正角作为两直线的**夹角**.如果两直线不相交,可取空间任意一点 A,并过 A 作两条有向直线,

分别跟已知直线平行而且同向;我们就把这两条相交于 A 的直线的夹角作为已知两直线的夹角.

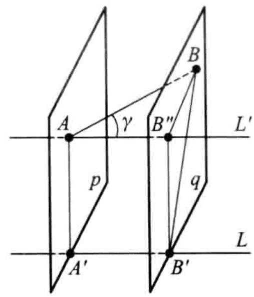

图 13.1

设在空间已给有向线段 AB 及另一条有向直线 L. 由 AB 的两端分别作 L 的垂直平面 p 与 q,跟 L 相交于 A' 与 B'(图 13.1). 这样,与有向线段 $A'B'$ 相对应的实数称为 AB 在 L 上的**投影**.

在空间我们也有两条投影定理.

定理一 有向线段 AB 在 L 上的投影是

$$\boxed{A'B' = AB\cos\gamma,} \tag{1}$$

其中 γ 是 AB 所在的有向直线与 L 的夹角.

[**证**] 过 A 作与 L 平行且同向的有向直线 L',与平面 q 相交于 B''(图 13.1). 于是 AB 与 AB'' 在同一平面内. 所以根据 1-4 节的定理一,

$$AB'' = AB\cos\gamma.$$

但 AB'' 与 $A'B'$ 是夹在平行平面 p 与 q 之间的两条同向的平行线段,因此相等,即 $AB''=A'B'$. 代入上式,即得欲证的(1)式.

如果把有向折线及其投影的定义(1-4 节)都推广到空间折线 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$,我们立即有

定理二 空间有向折线 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$ 在 L 上的投影就等于有向线段 AB 在 L 上的投影.

这定理的证明跟 1-4 节定理二完全一样,并且我们也可以从这定理推知如果有向折线是闭合的,那么它在任何有向直线上的投影等于零.

但在空间我们还可以考虑其他的投影关系. 设已给一个平面 K 及一条直线 L. 如果 L 不跟 K 垂直,过 L 可作 K 的垂直平面,与 K 相交于另一条直线 L'. 这样所得到的直线 L' 称为 L 在 K 上的投影

直线.如果 L 跟 K 垂直,那么 L 在 K 上的投影就只是一点,即 L 与 K 的交点,如果 L 是有向的,那么 L' 也有确定的方向.

13－2 空间直角坐标系

为了把坐标法推广到空间,让我们在空间作三条互相垂直相交的数轴 OX,OY 及 OZ,它们有相同的长度单位,而它们的交点 O 就是**坐标原点**(图 13.2).OX 叫做**横轴**或 x **轴**,通常取自后至前的方向作为正向;OY 叫做**纵轴**或 y **轴**,通常取自左至右的方向作为正向;OZ 叫做**竖轴**或 z **轴**,通常取自下至上的方向作为正向.OX,OY 与 OZ 统称为坐标轴.三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面 XOY,YOZ,ZOX,称为**坐标平面**,而这三个平面把空间分为八个部分,称为**卦限**.各个卦限可以逐一编号,以资区别,特别是在 XOY 平面之上、YOZ 平面之前、ZOX 平面之右的卦限通常称为**第一卦限**.

设 P 是空间的任意一点,让我们来考虑有向线段 OP(图 13.2).它在三轴上的投影,即分别与有向线段 OQ,OR 及 OS 相对应的实数称为 P 点的**坐标**,分别记作 x,y 及 z

$$OQ = x, OR = y, OS = z,$$

并且合写在一个括号里,如(x,y,z).第一个数 x 叫做 P 点的**横坐标**或 x **坐标**;第二个数 y 叫做 P 点的**纵坐标**或 y **坐标**;第三个数 z 叫做 P 点的**竖坐标**或 z **坐标**.所以对应于空间的每一点 P,必有一组确定的坐标(x,y,z).

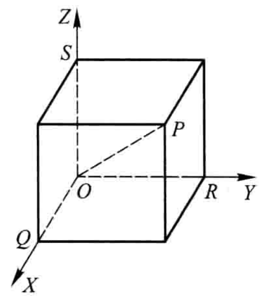

图 13.2

反之,已知一组实数 x,y 与 z,我们可以在 x 轴上作 $OQ=x$,在 y 轴上作 $OR=y$,在 z 轴上作 $OS=z$,然后通过 Q,R 与 S 分别作 x

轴，y 轴与 z 轴的垂直平面．这三个垂直平面的交点 P 便是具有坐标 (x,y,z) 的点（图 13.2）．所以对应于一组实数 (x,y,z)，必有空间的一个确定点 P．

这样，空间的点的集合就与一组三个有序的实数的集合构成一一对应的关系．这就是使空间的点与实数相结合的一种坐标法，使用这种坐标法时所取定的三条互相垂直相交的数轴，构成一个**空间直角坐标系**或**空间直角笛卡儿坐标系**．

如果在图 13.2 中把 x 轴与 y 轴对调，即令 x 轴的正向朝右，y 轴的正向朝前，那么我们将得到另一种空间直角坐标系（图 13.3）．我们把图 13.2 的坐标系称为**右手系**，因为如果我们用右手的拇指表示 x 轴的正向，食指表示 y 轴的正向，那么中指就是 z 轴的正向了（图 13.4）．同样，图 13.3 的坐标系须用左手来表示，因而称为**左手系**．在本书中始终采用右手系．

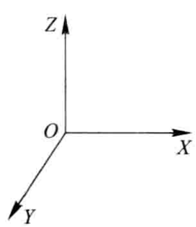

图 13.3

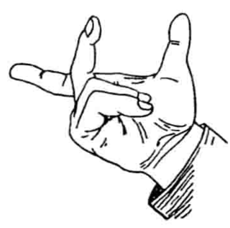

图 13.4

13－3 空间的距离及分点公式

正像在平面内一样，我们现在就可以利用空间直角坐标来计算空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 s 以及把线段 P_1P_2 分成定比的分点．

两点间的距离　以线段 P_1P_2 为对角线，作长方体，这长方体

的六个面两两平行于坐标面. 由图 13.5 可知

$$(P_1P_2)^2=(P_1Q)^2+(P_1R)^2+(P_1S)^2,$$

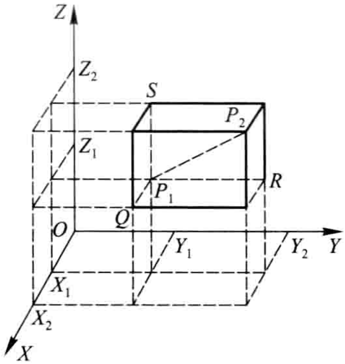

图 13.5

但根据 1－3 节公式(5),我们有 $P_1Q=X_1X_2=x_2-x_1$,$P_1R=Y_1Y_2=y_2-y_1$,$P_1S=Z_1Z_2=z_2-z_1$,所以

$$\boxed{s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.} \tag{2}$$

定比分点 设在连接 P_1 与 P_2 两点的直线上另有一点 $P(x,y,z)$,使得有向线段 P_1P 与 PP_2 所对应的实数之比为 λ,但 $\lambda\neq-1$①

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

把直线 P_1P_2 投影到坐标平面 XOY 及 ZOX (图 13.6),那么

$$P'_1P'=\lambda P'P'_2 \text{ 及 } P''_1P''=\lambda P''P''_2.$$

在 XOY 平面内,P_1',P_2',P'的坐标依次为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x,y),所以根据平面内线段的定比分点公式,得

① 详见《解析几何简明教程》,叶菲莫夫著,胥长辰译,32 页,人民教育出版社出版.

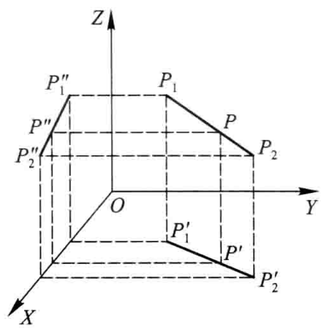

图 13.6

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.} \tag{3'}$$

同理,在 ZOX 平面内考虑,得

$$\boxed{z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.} \tag{3''}$$

特别是当 P 是 P_1P_2 的中点时,我们有

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.} \tag{4}$$

13－4　方向余弦与方向数

设已给一条空间有向直线 L. 让我们来阐释确定 L 方向的方法. 我们知道,L 与三条坐标轴 OX,OY,OZ 之间有确定的夹角,设依次为 α,β,γ;那么这三个角便称为 L 的**方向角**,它们的余弦,即 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,称为 L 的**方向余弦**.

根据关于两条有向直线夹角的规定,α,β,γ 的值限在 0 与 π 之间. 因此,如果知道了 L 的方向余弦,它的方向角也就被唯一地

确定.所以我们完全可以用方向余弦来确定 L 的方向.

从方向余弦的定义可知,如果把一条有向直线的方向反过来,那么方向余弦都要改变正负号.

例 1. 设在 ZOX 平面内,有与 z 轴成 $30°$ 角的有向直线,求它的方向余弦.

[**解**] 这样的有向直线有 L_1 及 L_2 两条(图 13.7),它们的方向角分别是

$$\alpha_1 = 60°,\quad \beta_1 = 90°,\quad \gamma_1 = 30°;$$
$$\alpha_2 = 120°,\quad \beta_2 = 90°,\quad \gamma_2 = 30°.$$

所以 L_1 的方向余弦是

$$\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{\sqrt{3}}{2};$$

L_2 的是

$$-\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

从上面的例子,发现有向直线 L_1 或 L_2 的方向余弦的平方和都等于 1.在一般情形也有

定理一 一条有向直线的方向余弦的平方和总等于 1

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

[**证**] 设有向直线 L 的方向角为 α,β,γ.过 O 作 OP 与 L 平行且同向.于是 OP 的方向角也是 α,β,γ (图 13.8).令 $OP=\rho$,根据投影定理一(13-1 节),即得

$$x = \rho\cos\alpha,\quad y = \rho\cos\beta,\quad z = \rho\cos\gamma,$$

或

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho},\quad \cos\beta = \frac{y}{\rho},\quad \cos\gamma = \frac{z}{\rho}.$$

因此,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2}.$$

但 $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$.于是定理得证.