王杰观

集合与逻辑代数初步

福建人民教育出版社

集合与逻辑代数初步

王 杰 观　编著

福建人民教育出版社

内　容　简　介

集合论是学习数学所必不可少的基础知识之一，本书根据目前中学数学教师的实际需要，对集合论的基础知识作扼要的叙述，并介绍了映射、等价、同构和数学归纳法等基础知识．

逻辑代数亦称布尔代数、门代数或开关代数等，它在开关电路的分析与综合，电子计算机的逻辑设计，射流技术等方面都有广泛的应用．本书以逻辑代数的基础知识和命题演算为主，并简单介绍它在开关电路、电子计算机等方面的应用．

集合与逻辑代数初步

王杰观　编著

出版：福建人民教育出版社
发行：福 建 省 新 华 书 店
印刷：福 建 新 华 印 刷 厂

开本：787×1092　1/32　3.25印张　70千字
1981年3月第1版　1981年3月第1次印刷
印数：1—10,500
统一书号：7159·548　定价：0.29元

前　　言

为了适应目前我省中学数学教师进修提高的需要，笔者曾在福州市、三明、莆田、建阳等地区讲解集合与逻辑代数的基础知识，本书就是在这个基础上整理补充而成的。

教育部制订的全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)，“关于教学内容的确定”部分指出：“增加微积分以及概率统计，逻辑代数(有关电子计算机的数学知识)等的初步知识。学习这些知识，对于直接参加三大革命运动和进一步学习现代科学技术都非常必要。”“把集合、对应等思想适当渗透到教材中去，这样，有利于加深理解有关教材，同时也为进一步学习作准备。”根据上述要求，我把集合、映射和逻辑代数的初步知识分成两章。

第一章集合论初步。主要介绍集合与映射的概念，集合的“并”、“交”、“余”运算及其性质，有穷集、无穷集的基本定理，集合的势的基础知识，良序集合与数学归纳法，等价关系与集合的分类，同构映射及其在中学数学中的应用等内容。

第二章逻辑代数初步。主要从开关电路、自动控制等问题引入布尔代数的概念。内容包括格与布尔代数，“或”、“与”、“非”的意义及其性质，二元布尔代数与命题演算，命题范式以及布尔代数公理的评价，以及逻辑代数的应

用等。

本书主要是提供中学数学教师进修和教学参考的，也可供高中学生的课外阅读。工厂里的技术员、技术工人学习电子计算机、逻辑电路数控基本知识时，本书亦可资参考。

本书承马长冰同志详细审阅并提出一些很好的修改意见，特在此表示感谢。

限于作者水平，本书的缺点与错误一定不少，敬希广大读者批评指正。

王 杰 观

1980年4月

目　　录

第一章　集合论初步

19世纪末，德国数学家坎托儿（Gearg Cantor，1845—1918），创造性地建立了集合论分支。它是一门富有革命色彩而又有巨大建设性的理论学科；它对于“无穷”的概念与性质给予精确而严密的描述；它对于客观世界种种事物之间的某种内在联系给予科学的抽象。

集合论具有巨大的生命力，诞生之后在短短的几十年内就渗透到数学的任何分支，所以不具备集合论的初步知识，将无法阅读数学的有关书籍。

中学数学的传统内容是研究数和图形的性质，也就是研究数集与点集的一些性质，数集与点集又是互相联系的，例如，数轴上的点集与实数集建立了一一对应关系之后，就产生了一元坐标系；平面上的点集与有序实数对的集合建立一一对应关系之后，建立了二元坐标系，从而开辟了用解析方法研究几何图形性质的广阔道路。

如果中学学生有了集合论的初步知识，将能够更系统地、更深刻地、相互联系而不是彼此孤立地掌握中学数学的有关内容，并为进一步学习打下必要的基础。

§1 集合的概念

不论在数学里或是在日常生活中，我们会经常遇到集合这个概念。如，某一教室里学生的集合，一条直线上点的集合，自然数的集合等等。集合的概念是某些事物的“总体”在我们头脑中的反映，“总体”、“元素的汇合”都是集合的同义词。我们不好用它们来定义集合。

数学里的每一个概念，如果都要求用前面已知的概念来定义它，这将犯逻辑上循环的毛病，所以这样的要求是不合理的、不能实现的。必然有一些概念，是经过人们的长期实践，深刻地、正确地认识了它们的本质特征，这些概念就不必用定义来给出，而只用它们的本质特征来描述，这种概念叫做不定义概念或基本概念。用这些概念来定义其他概念，我们希望不定义概念的个数愈少愈好。下面我们将以集合、元素、元素属于集合、对应作为不定义概念。

我们把具有某种共同特征的事物的总体叫做集合或简称为集；事物的个体叫做元素。它们都是不定义的概念，我们并不是以“特征”、“总体”来定义集合，“个体”来定义元素。它们仅是用通俗语言来描述不定义概念集合与元素。通常我们用大写的拉丁字母A，B，C，…，P，Q，R，X，Y，Z等等来表示集合；用小写字母a，b，c，…x，y，z等等来表示元素。

每一个元素a与集合A，有且只有下列两种关系之一：

1°元素a在集合A里面，称为元素a属于集合A。记作

$$a \in A.$$

2°元素a不在集合A里面，称为元素a不属于集合A。记作

$$a \overline{\in} A.$$

当元素a属于集合A时，也可以说集合A含有元素a，否则，说集合A不含元素a，分别记作

$$A \ni a, \quad A \overline{\ni} a.$$

例如，A表示一切自然数的集合(简称自然数集)，B表示正分数集。那末$1 \in A$，$2 \in A$，$\frac{1}{2} \overline{\in} A$；$1 \in B$，$2 \in B$，$\frac{1}{2} \in B$，$-1 \overline{\in} B$等等。$A$、$B$可以用下列三种形式来表示：

A：自然数；　　B：正分数。

$A = \{ x |$自然数$\}$；$B = \{ x |$正分数$\}$。

或 $A = \{ x:$自然数$\}$；$B = \{ x:$正分数$\}$

$A = \{ 1, 2, 3, \cdots n, \cdots, \}$；$B = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{p}{q}, \cdots \right\}$，其中$n$、$p$、$q$是任意自然数，$(p, q) = 1$*。

又如，C表示某$\odot O$上一切点的集合，可记作

$$C = \{ x | \odot O\text{上的点} \}.$$

下面我们用集合、元素、元素属于集合三个不定义概念来定义其他概念。

定义 1·1　两个集合A与B，如果任一$a \in A$都有$a \in B$；并且任一$b \in B$都有$b \in A$，那末称集合A与集合B相等。记作

$$A = B.$$

下面引用几个常用的符号："$\Longrightarrow$"表示从左边的前提可以推得右边的结论。"$\Longleftrightarrow$"表示左边是右边的充分必要条件。"$\exists \cdots \ni \cdots$"读作存在…使得…。

定义1·1可以用下面的符号关系式来表示：

---

* $(p, q) = 1$ 表示两个自然数p与q互素.

$$(a\in A \Longleftrightarrow a\in B) \Longleftrightarrow A=B.$$

用语言来叙述，就是：$A=B$的充分必要条件是：任一$a\in A$都有$a\in B$，且任一$a\in B$都有$a\in A$。

定义 1·2 两个集合A与B，如果任一$a\in A$都有$a\in B$，那末称集合A是集合B的子集，亦称集合B是集合A的扩集。记作

$$A\subseteq B \text{或者} B\supseteq A.$$

特别当任一$a\in A$，都有$a\in B$，并且存在一个$b\in B$，而$b\,\overline{\in}\,A$时，则称A是B的真子集，或B是A的真扩集。记作

$$A\subset B \quad \text{或者} \quad B\supset A.$$

定义1·2可以符号关系式表示如下：

$(a\in A \Longrightarrow a\in B) \Longleftrightarrow A\subseteq B$；

$(a\in A \Longrightarrow a\in B$，且 $\exists b\in B$；$b\,\overline{\in}\,A) \Longleftrightarrow A\subset B$。后一式或写为：

$(A\subseteq B$且$\exists b\in B$；$b\in A) \Longleftrightarrow A\subset B$。

例 1·1 $A=\{x|$自然数$\}$，$B=\{x|$正偶数$\}$，$C=\{x|4n$，n为任意自然数$\}$，$D=\{x|$被4整除的自然数$\}$则有

$A\supset B$即$B\subset A$，$C\subset B$，$C\subset A$，$D\subseteq C$，$C\subseteq D$，$C=D$，$D\subset B$，$D\subset A$等等。

当A是B的子集时，也可以说A包含于B，或B包含A。必须注意，$A\ni a$是集合A含有元素a，它是集合与元素的一种关系；而$B\supseteq A$却是两个集合之间的一种关系：集合B包含集合A。

集合的相等关系与子集有下列诸性质：

1° $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$；

2° 自反性：$A=A$，$A\subseteq A$；

3° 对称性：$A=B \Longleftrightarrow B=A$；

4° 传递性：$A\subseteq B$且$B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C$.

可以从定义1·1、1·2直接证明上面四条性质，下面只证明性质1°，其余留给读者作练习。

证 $A=B\Longrightarrow$若$a\in A$则$a\in B\Longrightarrow A\subseteq B$,

又 $A=B\Longrightarrow$若$b\in B$则$b\in A\Longrightarrow B\subseteq A$.

$\therefore$ $A=B\Longrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$.

反之，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A\Longrightarrow$任一$a\in A$都有$a\in B$，且任一$b\in B$都有$b\in A\Longrightarrow$ ($a\in A\Longleftrightarrow a\in B$) $\Longrightarrow A=B$.

定义 1·3 含有所考虑（研究）的一切元素的集合，称为全集。不含有任何元素的集合，称为空集。用U或I表示全集，用V或ϕ表示空集。

有了全集的定义之后，在我们研究某一问题的过程中，任何集合都是全集U的子集。由于下节介绍集合运算的需要，我们定义

定义 1·4 空集V是任何集合的子集。

§2 集合的运算

集合的运算是由给定的一个或者两个集合得出新集合的一种方法。

定义 2·1 我们把既属于集合A，又属于集合B的一切元素的集合C，叫做集合A和集合B的交集。记作

$$C=A\cap B.$$

即 $x\in A$且$x\in B\Longleftrightarrow x\in A\cap B$.

定义 2·2 我们把属于集合A，或者属于集合B的一切元素的集合D，叫做集合A和集合B的并集。记作

$$D=A\cup B.$$

即 $x\in A$或$x\in B\Longleftrightarrow x\in A\cup B$.

定义 2·3 我们把一切$x\in B$且$x\bar{\in}A$的元素x的集合E，叫做集合A和集合B的差集。记作

$$E=B-A.$$

即 $x\in B$且$x\bar{\in}A\Longleftrightarrow x\in B-A$.

定义 2·4 当$B=U$为全集时，称$U-A=\overline{A}$为A的余集或补集。

即 $a\bar{\in}A\Longleftrightarrow a\in\overline{A}$.

有了余集的概念之后，我们所研究的任一元素x，都有且只有$x\in A$或者$x\in\overline{A}$之一。

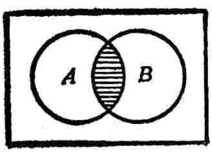
由定义2·3、2·4、2·1立即可得：

$x\in B-A\Longleftrightarrow x\in B$且$x\bar{\in}A\Longleftrightarrow x\in B$且$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow x\in B\cap\overline{A}$.

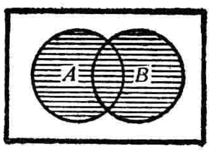
$\therefore\quad B-A=B\cap\overline{A}$.

所以求差集不是一个独立运算，实际上，学习反演律之后将知道，并、交、余中并、交之一亦非独立运算。

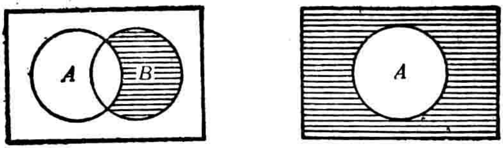
为了更加直观，姑且用一个矩形内部所有点的集合(不包括边界上的点，下同)表示全集U，用矩形里的圆或其他闭曲线内部所有点的集合表示任意集合A、B等，这样的图形称为韦恩图(Venn's digrams)或称为欧拉图(Euler's digrams)。自然，空集是无法表示的。



$A\cap B$



$A\cup B$



$B-A$　　　　$\overline{A}$

图 2·1

注意：$\overline{A}$含有圆周上的点，$B-A$含有B圆内A圆弧上的点。

例 2·1　(i)若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$。则$A\cap B=\{1,3,5\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$，$A-B=\{2,4\}$，$B-A=\{7,9\}$。

(ii)若$A=\{x|奇数\}$，$B=\{x|偶数\}$。则$A\cap B=V$（空集），$A\cup B=\{x|整数\}$，$A-B=A$，$B-A=B$。

(iii)若$A=\{x|自然数\}$，$B=\{x|正偶数\}$。则 $B\subset A$，$A\cap B=B$，$A\cup B=A$，$B-A=V$，$A-B=\{x|正奇数\}$。

(iv)若$A=\{x|甲班学生\}$，$B=\{x|乙班学生\}$，$C=\{x|甲、乙班运动员的学生\}$。则 $A\cap B=V$，$A\cap C=\{x|甲班运动员的学生\}$，$B\cap C=\{x|乙班运动员的学生\}$，$A\cup B=\{x|甲、乙班学生\}$，$A\cup C=\{x|甲班学生或乙班运动员的学生\}$，$B\cup C=\{x|乙班学生或甲班运动员的学生\}$，$A-B=A$，$B-A=B$，$A-C=\{x|甲班非运动员的学生\}$，$B-C=\{x|乙班非运动员的学生\}$，$C-A=\{x|乙班运动员的学生\}$，$C-B=\{x|甲班运动员的学生\}$。

(v)若$A=\{x|直角三角形\}$，$B=\{x|等边三角形\}$，

$C=\{x|$等腰三角形$\}$. 则$A\cap B=V$, $A\cap C=\{x|$等腰直角三角形$\}$, $B\cap C=B$; $B\cup C=C$; $A-B=A$, $B-A=B$, $A-C=\{x|$直角边不相等的直角三角形$\}$, $C-A=\{x|$顶角非直角的等腰三角形$\}$, $B-C=V$, $C-B=\{x|$有一角不等于60°的等腰三角形$\}$.

在中学数学课本里，解方程(组)或不等式(组)的问题，都是求它们的解集合. 如果在实(复)数范围内求解，那末一元的情况，就是以实(复)数集为全集，求出适合给定的方程(组)或不等式(组)的一切解,它是该全集的一个子集;多元的情况，就是以有序实(复)数组为全集，求出包含适合给定的方程(组)或不等式(组)的一切解的子集. 这样的子集称为该方程(组)或不等式(组)的解集合.

求方程组(或不等式组)的解集合，就是求其中每一个方程(不等式)的解集合的交集.

一元实函数的定义域，都是实数集与它的某一个子集的差集. 这个子集不是空集的时候实际定义域是该子集的一个余集.

例 2·2 设$U_1=\{x|$实数$\}$, $U_2=\{x|$复数$\}$.

(i)求方程 $x^3-1=0$的解集合S.

在实数范围内, $S=\{1\}\subset U_1$; 在复数范围内, $S=\{1, \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\}\subset U_2$.

(ii)求方程组

$$\begin{cases}x^3-1=0,\\x^2-1=0\end{cases}$$

的解集合S.

$S=\{1\}\cap\{1,-1\}=\{1\}\subset U_1$.

或者　$S' = \left\{1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$,

$$S = S' \cap \{1, -1\} = \{1\} \subset U_2.$$

(iii)求不等式 $2x-3>0$的解集合S。

$$S = \left\{x \,\middle|\, x > \frac{3}{2}\right\} \subset U_1.$$

(iv)求不等式组

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ x-4<0 \end{cases}$$

的解集合S。

$$A = \left\{x \,\middle|\, x > \frac{3}{2}\right\},\quad B = \{\times \mid x<4\},$$

$$S = A \cap B = \left\{x \,\middle|\, 4 > x > \frac{3}{2}\right\} \subset U_1.$$

(v)求不等式$x^2-x-2>0$的解集合。

$\because\quad x^2-x-2=(x-2)(x+1)$,

所以$x^2-x-2>0$的解集合，就是下面两个不等式组解集合的并集：

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+1>0; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x-2<0, \\ x+1<0. \end{cases}$$

即　$S = [\{x \mid x>2\} \cap \{x \mid x>-1\}] \cup [\{x \mid x<2\} \cap \{x \mid x<-1\}] = \{x \mid x>2\} \cup \{x \mid x<-1\} = \{x \mid x>2 或 x<-1\}$.*

例 2·3　设$U = \{(x, y) \mid 实数对\}$，求下列诸方程组或不等式组的解集合S。

(i) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x-3y=4. \end{cases}$

---

* 必须提醒读者注意的是："$x>2$或$x<-1$"里必须用"或"不能用"与"，这样才能与逻辑代数里相一致.

$A=\{(x,y)\mid$直线$x+y=2$上的点$\}$，$B=\{(x,y)\mid$直线$2x-3y=4$上的点$\}$。

（如图2·2）

$S=A\cap B=\{(2,0)\}$。

(ii) $\begin{cases}x+y=2,\\2x+2y=6.\end{cases}$

$A=\{(x,y)\mid$直线$x+y=2$上的点$\}$，$C=\{(x,y)\mid$直线$2x+2y=6$上的点$\}$。

（如图2·2）

$S=A\cap C=V$。

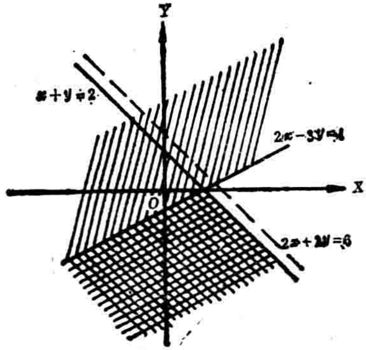


图 2·2

(iii) $\begin{cases}x+y=2,\\2x-3y<4.\end{cases}$

因为不等式$2x-3y<4$的解集合是直线$2x-3y=4$为界的上半平面的点集（如图2·2中的平行线阴影部分），所以$S=\{(x,y)\mid$满足$x+y=2$且$y>0\}$。

(iv) $\begin{cases}x+y<2,\\2x-3y>4.\end{cases}$

$A=\{(x,y)\mid$直线$x+y=2$为界的左半平面的点$\}$，$B=\{(x,y)\mid$直线$2x-3y=4$为界的下半平面的点$\}$，所以$S=A\cap B=\{(x,y)\mid$满足$2-y>x>\frac{3y+4}{2}\}$（如图2·2中的方格阴影部分）。

例 2·4 求下列定义在实数域上的函数，它的定义域是$U=\{x\mid$实数$\}$。

(i) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$的定义域$D=U-\{1,-1\}$。

(ii) $y=\sqrt{x-1}$的定义域$D=U-\{x\mid x<1\}$。

(iii) $y=\arcsin x$的定义域$D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$。

(iv) $y=\lg\arcsin x$的定义域$D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x\mid x>0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$。

集合的并、交、差、余有下列诸性质：

1° $A\cap B\subseteq A$(或B)$\subseteq A\cup B$。

当A与B没有公共元素时(如例2·1 (ii))，它们的交集是空集V，如果没有定义1·4，那末1°就必须排除$A\cap B=V$的情况，这是不方便的。

2° $B-A\subseteq B$。

3° $B-A=B\cap\overline{A}$。

4° 若$A\subseteq B$，则$A\cap B=A$，$A\cup B=B$，$A-B=V$。

上面四条性质，都可以由定义直接推得。

5° $B-A=\overline{A}-\overline{B}$。

证 $B-A=\{x\mid x\in B且x\bar{\in}A\}$

$$=\{x\mid x\in\overline{A}且x\bar{\in}\overline{B}\}$$

$$=\overline{A}-\overline{B}。$$

6° 重余律：$\overline{\overline{A}}=A$。

证 一切$a\in\overline{(\overline{A})}\Longleftrightarrow a\bar{\in}\overline{A}\Longleftrightarrow a\in A$。

$\therefore\ \overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A$。

7° 重复律：$\begin{cases}A\cup A=A,\\A\cap A=A。\end{cases}$

8° 吸收律：$\begin{cases}(A\cup B)\cap A=A,\\(A\cap B)\cup A=A。\end{cases}$

性质7°可由定义直接推得，性质8°可由性质1°及并、交的定义直接推得。